

## معرفی

## • کتاب

- عنوان: ریاضیات گسسته و ترکیباتی (ویرایش چهارم)
- نویسنده: رالف پی. گریمالدی
- سرفصل مطالب
  - اصول اساسی شمارش (۱)
  - مبانی منطق (۲)
  - نظریه مجموعه ها (۳)
  - روابط و توابع: برخورد اول (۵)
  - روابط و توابع: برخورد دوم (۷)
  - نظریه گراف و درخت ها (۱۱ و ۱۲ و ۱۳)
  - توابع مولد و روابط بازگشتی (۹ و ۱۰)

N. Razavi - DM Course - 2006

2

## فصل اول

### اصول اساسی شمارش

سید ناصر رضوی

e-mail: [razavi@comp.iust.ac.ir](mailto:razavi@comp.iust.ac.ir)

۱۳۸۵

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

## ۱-۱ قوانین جمع و ضرب

– مسأله ← تجزیه ← ترکیب

قانون جمع:

- هرگاه اولین کار به  $m$  طریق و
- دومین کار به  $n$  طریق قابل انجام بوده و
- هر دو کار همزمان قابل انجام نباشند،
- آنگاه انجام هر یک از آنها به  $m+n$  طریق میسر می باشد.

## مثال ۱-۱.

۴۰ کتاب جامعه شناسی

۵۰ کتاب علوم انسانی

برای انتخاب یک کتاب: ۴۰+۵۰ انتخاب

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

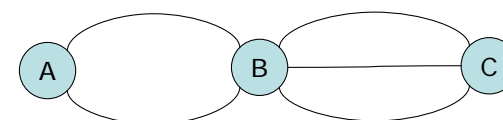
## ۱-۱ قوانین ضرب و جمع

حالت کلی قانون جمع

اشیاء	۱	۲	۳	...	$k$
روشهای انتخاب	$m_1$	$m_2$	$m_3$	...	$m_k$
انتخاب یک شیء: $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k$					

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

- مثال: به چند طریق می توان از شهر A به شهر C رفت؟



$$2 * 3$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۱ قوانین جمع و ضرب

**قانون ضرب** : (اصل انتخاب): هرگاه کاری را بتوان به دو مرحله چنان تقسیم نمود که:

- اولین مرحله به  $m$  طریق و
- دومین مرحله به  $n$  طریق قابل انجام بوده،
- آنگاه انجام کل کار به  $mn$  طریق میسر می باشد.

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۱ قوانین جمع و ضرب

**مثال**. تعداد متغیرهای زبان بیسیک: یک حرف یا یک رقم

$$26 + 26 * 10$$

قانون جمع

قانون ضرب

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۱ قوانین جمع و ضرب

**مثال ۱-۶**. پلاک اتومبیل: ۲ حرف انگلیسی، چهار رقم (الف) تکرار حروف و ارقام مجاز نمی باشد

$$26 * 25 * 10 * 9 * 8 * 7 = 3,276,000$$

(ب) تکرار حروف و ارقام مجاز می باشد

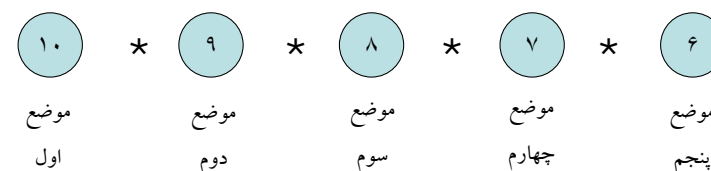
$$26 * 26 * 10 * 10 * 10 * 10 = 6,760,000$$

(ج) مانند (ب) فقط حروف صدادار (A,E,I,O,U) و ارقام زوج مجاز می باشند  
 $5^2 * 5^4$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

### ۲-۱ جایگشت ها (permutation)

**مثال ۱-۹:** به چند طریق می توان از میان ۱۰ دانشجو، ۵ دانشجو را انتخاب و برای گرفتن عکس در یک ردیف قرار داد؟



## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

**مثال ۱-۸:** به چند طریق از بین شش نوع کلوچه، هشت نوع ساندویچ و پنج نوع نوشیدنی (قهوه، چای، شیرکاکائو، کوکاکولا و آب پرتغال) می توان یک کلوچه و یک نوشیدنی داغ یا یک ساندویچ و یک نوشیدنی سرد انتخاب نمود؟

$$\begin{aligned}
 6 * 2 &= 12 && \text{یک کلوچه و یک نوشیدنی داغ} \\
 8 * 3 &= 24 && \text{یک ساندویچ و یک نوشیدنی سرد} \\
 12 + 24 &= 36 && \text{ترکیب اصل جمع و ضرب}
 \end{aligned}$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

### ۲-۱ جایگشت ها

**تعریف ۱-۲:** یک گردایه مرکب از  $n$  شیء متمایز در دسترس است. هر آرایش خطی از این اشیاء را یک **جایگشت** از این گردایه می نامیم.

مثلا سه حرف  $a$  و  $b$  و  $c$  را به شش طریق می توان جایگشت داد

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

به طور کلی: تعداد جایگشتهای  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز برابر است با:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n, r)$$

و اگر تکرار مجاز باشد، برابر است با  $n^r$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

**تعریف ۱-۱:** به ازای هر عدد صحیح  $n \geq 0$ ،  $n$  فاکتوریل ( $n!$ ) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}
 0! &= 1, \\
 n! &= (n)(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1), \text{ for } n \geq 1.
 \end{aligned}$$

**سرعت رشد  $n!$**

- $10! = 3,628,800$  (تعداد ثانیه ها در شش هفته)
- $11!$  (تعداد ثانیه ها در یک سال)
- $12!$  (تعداد ثانیه ها در ۱۲ سال)
- $13!$  (بیش از تعداد ثانیه ها در یک قرن)

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

### ۲-۱ جایگشت ها

مثال ۱-۱۰: جایگشت های computer برابر  $8!$   
جایگشت های computer با اندازه 5

$$P(8, 5) = 8!/3! = 6,720$$

مثال ۱-۱۱: جایگشت های BALL

$$4!/2! = 12$$

مثال ۱-۱۲: جایگشت های PEPPER

$$6!/(2!3!) = 60$$

مثال ۱-۱۳: جایگشت های MASSASAUGA

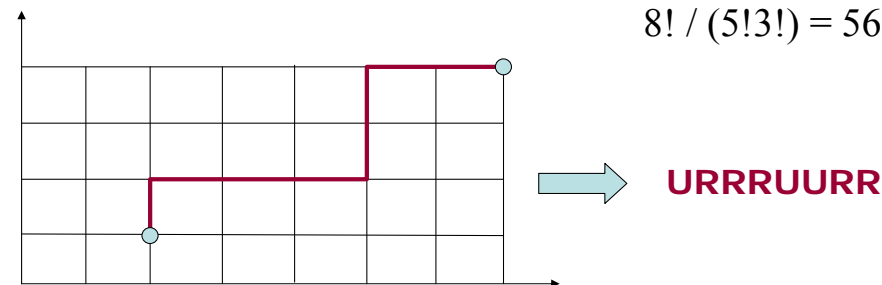
$$10!/(3!4!) = 25,200$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

### ۲-۱ جایگشت ها

مثال ۱-۱۴: تعداد مسیرهای مانهاتانی ( در هر حرکت تنها می توانیم به سمت راست R و یا به سمت بالا U برویم) از (1, 2) به (4, 7) برابر است با تعداد جایگشت های RRRRRUUU

$$8! / (5!3!) = 56$$



## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

### برهان ترکیباتی

مثال ۱-۱۵: هرگاه  $n$  و  $k$  اعداد صحیح و مثبتی باشند و  $n = 2k$ ، ثابت کنید  $n! / 2^k$  یک عدد صحیح می باشد.  
اثبات. نمادهای زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_k, x_k$$

تعداد جایگشت های این  $n$  نماد، عددی صحیح و برابر است با:

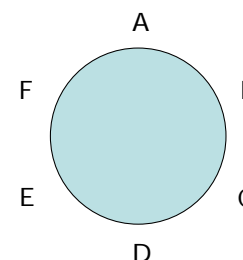
عدد صحیح می باشد  $\rightarrow \frac{n!}{\underbrace{2!2!\dots 2!}_k} = \frac{n!}{2^k}$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

### جایگشت چرخشی

مثال ۱-۱۶: تعداد جایگشت های چرخشی شش نفر دور یک میز گرد ( جایگشتهایی که از دوران یکدیگر حاصل می شوند، یکسان محسوب می شوند)

$$ABCDEF = BCDEFA = CDEFAB = DEFABC = EFABCD = FABCDE$$



$$6!/6 = 5! = 120$$

در حالت کلی:

$$n! / n = (n - 1)!$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

تمرین های ۱-۱ و ۲-۱

۱۰ -

۱۱ -

۱۹ -

۲۴ -

۲۶ -

۲۷ -

۲۸ -

۲۹ -

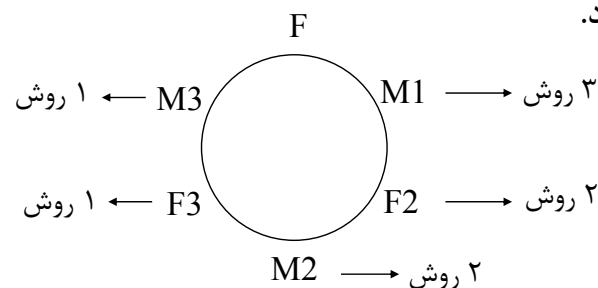
۳۳ -

۳۷ -

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

جایگشت چرخشی

مثال ۱-۱۷: سه زوج دور یک میز گرد به صورت یک در میان زن و مرد.



تعداد کل روشهای ممکن  $1 * 1 * 2 * 2 * 3 = 3$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

در هر مسأله شمارش اهمیت **ترتیب** باید مشخص باشد. هرگاه ترتیب مهم باشد به جایگشت ها و آرایش ها و قانون ضرب فکر می کنیم، و وقتی ترتیب مهم نیست، ترکیبات می توانند در حل مسأله نقش کلیدی داشته باشند.

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دوجمله ای

انتخاب سه کارت از یک دسته کارت ۵۲ تایی بدون جایگذاری:

الف-ترتیب انتخاب ها مهم است

$$P(52, 3) = 52 * 51 * 50$$

ب- ترتیب انتخاب ها مهم نیست

$$P(52, 3) / 3! = C(52, 3)$$

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \leq r \leq n$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۲۱: از یک کلاس ۳۶ نفری ۴ تیم ۹ نفری

روش اول: ترکیب

$$C(36, 9) * C(27, 9) * C(18, 9) * C(9, 9)$$

روش دوم: جایگشت

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_{35}, S_{36}$$

برای انتخاب چهار تیم A و B و C و D باید نه A و نه B و نه C و نه D را در ۳۶ محل توزیع کنیم

$$36! / (9!9!9!9!)$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۱۹:

الف- هفت سوال از ده سوال

$$C(10, 7) = 10! / (7!3!) = 120$$

ب- سه سوال از پنج سوال اول و چهار سوال از پنج سوال آخر

$$C(5, 3) * C(5, 4) = 10 * 5 = 50$$

ج- حداقل سه سوال از پنج سوال اول

$$C(5, 3)C(5, 4) + C(5, 4)C(5, 3) + C(5, 5)C(5, 2) = 50 + 50 + 10 = 110$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نماد سیگما ( $\Sigma$ )

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

مثال:

$$\sum_{i=1}^n 1 = n, \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{i=1}^n i^3 = ?$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۲۲: TALLAHASSEE

الف- تعداد جایگشت ها

$$11! / (3!2!2!1!1!1!) = 831,600$$

ب- چند تا از این جایگشت ها بدون A های مجاور می باشند؟

تعداد جایگشت های بدون A

$$8! / (2!2!2!1!1!1!) = 5040$$

حال هر یک از سه A را می توان در هر یک از ۹ مکان زیر قرارداد

E E S T L L S H  
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

$$C(9, 3) = 84$$

در نتیجه تعداد جایگشت ها بدون A های مجاور برابر است با:

$$5040 * 84 = 423,360$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نماد سیگما ( $\Sigma$ )

$$c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i \text{ (constant can move out)}$$

But, not  $i \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ia_i$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n (2n-1)(n+2) = n(2n-1)(n+2)$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)(i+2) = \sum_{i=1}^n (2i^2 + 3i - 2) =$$

$$2 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i - 2 \sum_{i=1}^n 1$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نماد سیگما ( $\Sigma$ )

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_i b_j = \sum_{j=1}^n b_j (a_1 + a_2 + \dots + a_j) =$$

$$a_1 b_1 + (a_1 + a_2) b_2 + \dots + b_n \sum_{i=1}^n a_i$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نماد پی ( $\Pi$ )

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$$

$$\prod_{i=1}^n ca_i = c^n \prod_{i=1}^n a_i$$

$$\prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \neq \prod_{i=1}^n a_i + \prod_{i=1}^n b_i$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ادامه مثال ۲۳-۱

پاسخ: تعداد یک ها باید زوج باشد ( $i=0,2,4,6,8,10$ ) بنابراین شش حالت مختلف داریم:

در هر یک از این شش حالت به تعداد  $i$  یک داریم و به تعداد  $10-i$  صفر و دو داریم

تعداد رشته ها به طول ۱۰ با  $i$  عدد یک :

$$\binom{10}{i} 2^{10-i}, i = 0, 2, 4, 6, 8, 10$$

تعداد کل رشته ها با وزن زوج:

$$\sum_{n=0}^5 \binom{10}{2n} 2^{10-2n}$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۲۳-۱:

الفبا: مجموعه محدود از عناصر ساده و غیر قابل تجزیه  $\{0, 1, 2\}$

رشته: هر دنباله متناهی از عناصر الفبا مانند  $۱۰۲, ۲۲۰۱, ۱۰۱۲۰, \dots$

زبان: مجموعه ای از رشته ها مانند  $\{00, 101, 0012, 12101\}$

تعداد رشته های به طول  $k$  روی الفبای  $n$  عنصری:  $n^k$

اگر  $x = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$  آنگاه وزن رشته  $x$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$wt(x) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

مثلاً  $wt(22) = 2+2=4$  و  $wt(1200) = 1+2+0+0=3$

حال می خواهیم در بین  $۳^{۱۰}$  رشته به طول ۱۰ تعداد رشته ها با **وزن زوج** را محاسبه کنیم

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

شمارش بیش از حد (over counting)

در استدلال ۲ موارد یکسان زیر، متمایز در نظر گرفته شده اند:

3♣	J♠	7♥	K♣	5♣
5♣	J♠	7♥	K♣	3♣
K♣	J♠	7♥	3♣	5♣

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

شمارش بیش از حد (over counting)

مثال ۲۴-۱: انتخاب ۵ کارت از ۵۲ کارت با حداقل یک گشنیز

استدلال (۱) انتخاب ۵ کارت بدون گشنیز:

$$C(39, 5)$$

انتخاب ۵ کارت با حداقل یک گشنیز:

$$C(52, 5) - C(39, 5) = 2,023,203$$

کارت اول از بین گشنیزها و ۴ کارت دیگر را از بین ۵۱ کارت باقیمانده:

$$C(13, 1) * C(51, 4) = 3,248,700$$

چه چیزی غلط است؟

استدلال (۲)

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

قضیه ۱-۱: قضیه دو جمله ای

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای  
شمارش بیش از حد (over counting)

استدلال ۲: محاسبه صحیح به صورت زیر می باشد

$$\sum_{i=1}^5 \binom{13}{i} \binom{39}{5-i} = 2,023,203$$

$i$  = تعداد گشیزهای انتخاب شده و  
 $5-i$  = تعداد کارت های غیر گشیز

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نتیجه ۱-۱ از قضیه دو جمله ای:

الف- ( $x = y = 1$ )

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ب- ( $x = -1, y = 1$ )

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 2^n$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۲۵:

محاسبه ضریب  $x^5 y^2$  در بسط  $(x + y)^7$

$$C(7, 5) = C(7, 2) = 21$$

محاسبه ضریب  $a^5 b^2$  در بسط  $(2a - 3b)^7$

$$C(7, 5) * (2)^5 * (-3)^2 = 6048$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۲۶:

ضریب  $a^2b^3c^2d^5$  را در بسط  $(a+2b-3c+2d+5)^{16}$ :

$$\frac{16!}{2!3!2!5!4!} (1)^2 (2)^3 (-3)^2 (2)^5 (5)^4$$

تمرینات ۳-۱: تمرین ۴، ۱۰، ۱۱، ۲۲، ۱۳، ۲۹ و ۳۴ حل شوند

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۳-۱ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

قضیه ۲-۱: قضیه چند جمله ای

به ازای اعداد صحیح و مثبت  $n$  و  $t$ ، ضریب  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_t^{n_t}$  در بسط

$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n$  برابر است با

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}, n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع

به طور کلی وقتی بخواهیم  $r$  شیء را از  $n$  شیء متمایز با تکرار انتخاب کنیم، تعداد انتخاب ها برابر است با:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع

مثال ۱-۲۷: هفت دانشجو - هر کدام یک چیزبرگر، ساندویچ سوسیس، ساندویچ کالباس، یا ساندویچ ماهی می خرند. به چند طریق این خرید می تواند صورت گرفته باشد؟

first	second	third	fourth
xxx	xxxx		
xx	x	x	xxx
	xxxx	xxx	

$$\frac{10!}{7!3!} = \binom{4+7-1}{7}$$

$\downarrow$  برای  $x$     برای

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع

مثال ۱-۳۱: یک پیغام ۱۲ کاراکتر متفاوت + ۴۵ فضای خالی و بین هر دو کاراکتر متوالی حداقل سه فضای خالی موجود است

$$\binom{11+12-1}{12} (12!)$$

تعداد فضای خالی باقیمانده  $45 - 11 * 3 = 12$

تعداد مکانهای بین ۱۲ کاراکتر

تعداد جایگشتهای ۱۲ کاراکتر مختلف

N. Razavi - DM Course - 2006

42

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع

مثال ۱-۲۹: توزیع ۱۰۰۰ تومان میان ۴ نفر (در واحد ۱۰۰)

الف- بدون محدودیت

$$\binom{4+10-1}{10}$$

ب- هر شخص لا اقل ۱۰۰ تومان

$$\binom{4+6-1}{6}$$

ج- هر شخص لا اقل ۱۰۰ تومان و علی حداقل ۵۰۰ تومان

$$\binom{4+2-1}{2} = \binom{3+2-1}{2} + \binom{3+1-1}{1} + \binom{3+0-1}{0}$$

N. Razavi - DM Course - 2006

41

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع

مثال ۱-۳۲: تعیین تمام جوابهای صحیح معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

به طوریکه تمام جوابها غیر منفی باشند  $x_i \geq 0$

تعبیر: توزیع ۷ عدد سکه میان ۴ کودک

پاسخ:

$$C(4+7-1, 7) = 120$$

N. Razavi - DM Course - 2006

43

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع

**نکته:** تمام موارد زیر هم ارز می باشند:

الف- تعداد جواب های صحیح معادله زیر

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$$

ب- تعداد انتخاب های  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز با تکرار

ج- تعداد روشهایی که می توان  $r$  شیء یکسان را در  $n$  مکان متمایز توزیع نمود

N. Razavi - DM Course - 2006

44

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع

مثال ۳۶-۱: تعداد طرقی که می توان عدد  $n$  را به صورت مجموعی از اعداد صحیح مثبت نوشت که در آن ترتیب عملوندهای جمع مهم باشد (تعداد ترکیبات عدد  $n$ ).

$$4 = 3+1 = 1+3 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$$

برای عدد ۴، هشت ترکیب وجود دارد  
اگر ترتیب مهم نباشد فقط ۵ ترکیب وجود دارد

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع

مثال ۳۴-۱: تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی نامعادله زیر

$$x_1 + x_2 + \dots + x_6 < 10?$$

که برابر با معادله زیر می باشد

$$x_1 + x_2 + \dots + x_6 + x_7 = 10, 0 \leq x_i, 1 \leq i \leq 6, 0 < x_7$$

تعبیر: می خواهیم ۱۰ سکه را میان ۷ نفر تقسیم کنیم به طوریکه نفر هفتم حداقل یک سکه داشته باشد

=

می خواهیم ۹ سکه را میان ۷ نفر تقسیم کنیم

$$C(7+9-1, 9) = 5005$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع

مثال ۳۷-۱: در قطعه برنامه زیر چند بار فرمان writeln اجرا می شود؟

```
for i:=1 to 20 do
  for j:=1 to i do
    for k:=1 to j do
      writeln (i * j + k);
```

$$1 \leq k \leq j \leq i \leq 20$$

تعبیر: انتخاب ۳ عدد از ۲۰ عدد با تکرار

$$C(20+3-1, 3) = C(22, 3) = 1540$$

تمرینات ۴-۱: تمرین ۲ و ۳ و ۴ و ۷ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۲ حل شوند

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار: توزیع - تعداد ترکیبات عدد ۷

$$\begin{array}{l} w_1 + w_2 = 7, w_i > 0 \\ x_1 + x_2 = 5, x_i \geq 0 \end{array} \quad \left( \begin{array}{c} 2+5-1 \\ 5 \end{array} \right) \leftarrow \text{جمع ۲ عدد}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad \left( \begin{array}{c} 3+4-1 \\ 4 \end{array} \right) \leftarrow \text{جمع ۳ عدد}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \quad \left( \begin{array}{c} 4+3-1 \\ 3 \end{array} \right) \leftarrow \text{جمع ۴ عدد}$$

$$\text{پاسخ: } \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} = 2^6$$

## فصل ۱: اصول اساسی شمارش

**Summary** select or order  $r$  objects from  $n$  distinct objects

order is relevant	repetitions are allowed	type of result	formula
YES	NO	permutation	$P(n, r) = n! / (n - r)!$ , $0 \leq r \leq n$
YES	YES	arrangement	$n^r, n, r \geq 0$
NO	NO	combination	$C(n, r) = n! / [r!(n - r)!]$ $0 \leq r \leq n$
NO	YES	combination with repetition	$\binom{n + r - 1}{r}$

## فصل ۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی  
**منطق:** به مجموعه قواعدی که بتوان به کمک آنها اعتبار یک استدلال را تعیین نمود منطق می گوییم.  
**گزاره:** جمله ای خبری که یا درست و یا نادرست باشد- نه هر دو.  
 مثال:

مارگارت میچل کتاب برباد رفته را نوشته است.

$$2 + 3 = 5$$

جملات زیر گزاره نمی باشند:

چه هوای خوبی! (جمله ندایی)

بلند شو تمرین هایت را انجام بده. ( جمله امری)

## فصل دوم مبانی منطق

سید ناصر رضوی

e-mail: [razavi@comp.iust.ac.ir](mailto:razavi@comp.iust.ac.ir)

۱۳۸۵

## فصل ۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی  
**گزاره ساده:** گزاره ایست که قابل تجزیه به گزاره های ساده تر نبوده و مستقلا دارای ارزش درست یا نادرست باشد.  
**گزاره مرکب:** از ترکیب گزاره های ساده بوسیله رابط های منطقی و یا نقیض بدست می آید.  
 رابط های منطقی:

ترکیب عطفی (AND):  $p \wedge q$

ترکیب فصلی (OR):  $p \vee q$

یای انحصاری (exclusive or):  $p \oplus q$

ترکیب شرطی:  $p \rightarrow q$  ( اگر p آنگاه q )

ترکیب دو شرطی:  $p \leftrightarrow q$  ( اگر و فقط اگر q ) یا (p iff q)

## فصل ۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی  
 “عدد  $x$  یک عدد صحیح است” گزاره نمی باشد، زیرا ارزش درستی آن را تا زمانی که به  $x$  مقداری نسبت داده نشود، نمی توان تعیین نمود.

منطق مرتبه اول (First Order Logic) و منطق گزاره ای

## فصل ۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی  
مثال ۲-۱.

$s$ : هومن به پیاده روی می رود.

$t$ : ماه می درخشد.

$u$ : هوا برفیست.

$$(t \wedge \neg u) \rightarrow s$$

هرگاه ماه بدرخشد و هوا برفی نباشد، آنگاه هومن به پیاده روی می رود.

$$t \rightarrow (\neg u \rightarrow s)$$

هرگاه ماه بدرخشد، آنگاه اگر هوا برفی نباشد، هومن به پیاده روی می رود.

## فصل ۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی  
جداول درستی

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

## فصل ۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی  
استدلال معتبر:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

↑  
مفروضات
↑  
نتیجه

هرگاه یکی از مفروضات نادرست باشد، آنگاه مستقل از ارزش  $q$ ، استلزام فوق درست می باشد. در نتیجه هرگاه با مفروضاتی که همگی دارای ارزش درست باشند شروع کنیم و دریا بیم که تحت این شرایط  $q$  نیز دارای ارزش درست می باشد، آنگاه استلزام

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

یک تاتولوژی می باشد و ما یک **استدلال معتبر** داریم.

## فصل ۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی

**گزاره همیشه درست** (راستگو، تاتولوژی): یک گزاره مرکب که به ازاء تمام ترکیبات ارزشی گزاره های ساده تشکیل دهنده آن همواره ارزش آن برابر درست باشد.

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

**گزاره همیشه نادرست** (تناقض): یک گزاره مرکب که به ازاء تمام ترکیبات ارزشی گزاره های ساده تشکیل دهنده آن همواره ارزش آن برابر نادرست باشد.

$$p \wedge (\neg p \wedge q)$$

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$(p \oplus q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

نتیجه: - رابط استلزام را می توان بر حسب نقیض و ترکیب فصلی نوشت.

- ترکیب دو شرطی را نیز می توان بر حسب نقیض، ترکیب فصلی و ترکیب عطفی نوشت.

- بنابراین همواره می توانیم رابط های  $\rightarrow$  و  $\leftrightarrow$  را از گزاره های مرکب حذف کنیم.

بنابراین **AND** یا **OR** و **NOT** باهم یک مجموعه تابعی کامل را می سازند.

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۷:

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$$s_1 \Leftrightarrow s_2$$

تعریف ۲-۲: هم ارزی منطقی

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

۱. حذف نقیض مضاعف

$$(1) \neg \neg p \Leftrightarrow p$$

۲. قوانین دمورگان

$$(2) \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

۳. قوانین جابجایی

$$(3) p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

۴. قوانین شرکت پذیری

$$(4) p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۸: قوانین دمورگان

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$p$  و  $q$  می توانند هر گزاره مرکبی باشند.

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

تعریف ۲-۳. اگر  $S$  گزاره ای باشد که شامل هیچ رابط منطقی غیر از ترکیب عطفی و فصلی نباشد، آنگاه **دوگان**  $S$  که با  $S^d$  نشان داده می شود گزاره ایست که از  $S$  و با جایگزینی AND و OR به جای یکدیگر و نیز  $T$  و  $F$  به جای یکدیگر حاصل می شود.

مثال:  $s : (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge T_0), s^d : (p \vee \neg q) \wedge (r \vee F_0)$

دوگان  $p \rightarrow q$  برابر است با:  $(\neg p \vee q)^d \Leftrightarrow \neg p \wedge q$

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

۵. قوانین توزیع پذیری  $(5) p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

۶. قوانین خود توانی  $(6) p \vee p \Leftrightarrow p, p \wedge p \Leftrightarrow p$

۷. قوانین همانی  $(7) p \vee F_0 \Leftrightarrow p, p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$

۸. قوانین معکوس  $(8) p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0, p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$

۹. قوانین تسلط  $(9) p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0, p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$

۱۰. قوانین جذب  $(10) p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p, p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

قانون دوم جایگزینی

$$P : (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

مثال ۲-۱۱.

$$P_1 : (\neg p \vee q) \rightarrow r$$

چون  $P \Leftrightarrow P_1$  بنابراین  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

مثال ۲-۱۲. گزاره مرکب  $(p \vee q) \rightarrow r$  را نقیض و سپس ساده کنید.

$$\neg[(p \vee q) \rightarrow r] \Leftrightarrow \neg[\neg(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow$$

$$\neg[(\neg p \wedge \neg q) \vee r] \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r \Leftrightarrow$$

$$(p \vee q) \wedge \neg r$$

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

قضیه ۲-۱ (اصل دوگانگی). فرض می کنیم که گزاره های  $s$  و  $t$  شامل رابط های منطقی غیر از  $\wedge$  و  $\vee$  نباشند. در این صورت هرگاه  $s \Leftrightarrow t$  آنگاه  $s^d \Leftrightarrow t^d$ .

قانون اول جایگزینی ( جایگزینی هر رخداد  $p$  با گزاره دیگری مانند  $q$  )

مثال ۲-۱۰.  $P : \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$  یک تاتولوژی است،

حال اگر تمام  $p$  ها را در آن با  $r \wedge s$  جایگزین کنیم، گزاره حاصل بازهم یک تاتولوژی می باشد.

$$P_1 : \neg[(r \wedge s) \vee q] \Leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \wedge \neg q]$$

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق  
مثال ۲-۱۵.

عکس نقیض  
↓

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

عکس  
↗

معکوس

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۱۳. نقیض گزاره زیر را بدست آورید:  
“اگر هاله به کنار دریا برود، آنگاه الهام پول خریده‌ای او را می‌پردازد”  
جواب:

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

چون

بنابراین نقیض جمله بالا به شکل زیر است:

“هاله به کنار دریا می‌رود ولی الهام پول خریده‌ای او را نمی‌پردازد”

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق  
ساده سازی گزاره های مرکب

مثال ۲-۱۶.

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \\ \Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q) && \text{دمورگان} \\ \Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) && \text{نقیض مضاعف} \\ \Leftrightarrow & p \vee (q \wedge \neg q) && \text{توزیع پذیری} \\ \Leftrightarrow & p \vee F_0 \Leftrightarrow p && \text{همانی} \end{aligned}$$

## فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق  
کارآیی دو قطعه برنامه زیر را مقایسه کنید.

```
x:=4;
for i:=1 to 10 do
begin
  x:=x-1;
  y:=x+3*i;
  if ((x>0) and (y>0)) then
    writeln('The value of the sum x+y is', x+y)
end;
```

تعداد مقایسه ها:

- سمت چپ ۲۰ بار

- سمت راست ۱۳+۳=۱۰ بار

```
.
.
.
if x>0 then
  if y>0 then
    ...
```

$$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۱۹.

 $p$ : هومن درس می خواند.  $q$ : هومن تنیس بازی می کند. $r$ : هومن در درس ریاضی گسسته قبول می شود.

مفروضات:

 $p_1$ : اگر هومن درس بخواند، آنگاه در درس ریاضی گسسته قبول می شود. $p_2$ : اگر هومن تنیس بازی نکند، آنگاه درس می خواند. $p_3$ : هومن در درس ریاضی گسسته قبول نمی شود.حال می خواهیم تعیین کنیم آیا استدلال  $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q$  معتبر است یا خیر. $p_1 : p \rightarrow r, p_2 : \neg q \rightarrow p, p_3 : \neg r$  $\therefore (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q \Leftrightarrow$  $[(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r] \rightarrow q$ 

2006

تاتولوژی  
(اسلاید بعد)

22

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

استدلال زیر

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

یک استدلال معتبر است اگر و فقط اگر استلزام زیر

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

یک گزاره همیشه درست (تاتولوژی) باشد.

N. Razavi - DM Course - 2006

21

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۰.

$p_1$			$p_2$		$q$	
$p$	$r$	$s$	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \rightarrow s$	$r \rightarrow s$	$[p \wedge ((p \wedge r) \rightarrow s)] \rightarrow (r \rightarrow s)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

N. Razavi - DM Course - 2006

24

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow r$	$\neg q \rightarrow p$	$\neg r$	$[(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r] \rightarrow q$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1

N. Razavi - DM Course - 2006

23

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

**قوانین استنتاج:** برای تعیین اعتبار و یا عدم اعتبار یک استدلال بدون نیاز به ساختن جدول درستی استفاده می شوند.

**نکته:** تعداد سطرهای یک جدول درستی برای  $n$  متغیر گزاره ای برابر  $2^n$  می باشد. مثلاً اگر  $n = 10$  آنگاه جدول درستی دارای ۱۰۲۴ سطر خواهد بود.

مثال ۲-۲۲. قانون قیاس استثنایی یا تفکیک (Modus Ponens)

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array} \quad [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

N. Razavi - DM Course - 2006

26

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

تعریف ۲-۴. هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره دلخواه باشند به طوریکه  $p \rightarrow q$  یک گزاره همیشه درست (تاتولوژی) باشد، آنگاه می گوییم  $p$  به طور منطقی مستلزم  $q$  می باشد و این وضعیت را به صورت زیر می نویسیم:

$$p \Rightarrow q$$

$p \Rightarrow q$  به معنای آن است که  $p \rightarrow q$  یک تاتولوژی می باشد.

$p \Leftrightarrow q$  به معنای آن است که  $p \leftrightarrow q$  یک تاتولوژی می باشد.

N. Razavi - DM Course - 2006

25

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۵. قانون استنتاج روش انکار (Modus Tollens)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array} \quad [(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$

مثال:

اگر هاله رئیس انجمن بانوان شده باشد، آنگاه الهام عضو انجمن خواهد شد.  
الهام عضو انجمن نشده است.  
بنابراین، هاله رئیس انجمن بانوان نشده است.

N. Razavi - DM Course - 2006

28

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج  
مثال ۲-۲۳. قانون قیاس (Syllogism)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array} \quad [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

مثال ۲-۲۴.

هاله کیک می پزد.  
اگر هاله کیک بپزد، آنگاه پیانو تمرین نمی کند.  
اگر هاله پیانو تمرین نکند، آنگاه پدرش برای او اتومبیل نخواهد خرید.  
بنابراین، پدر هاله برای او اتومبیل نخواهد خرید.

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow \neg q \\ \neg q \rightarrow \neg r \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

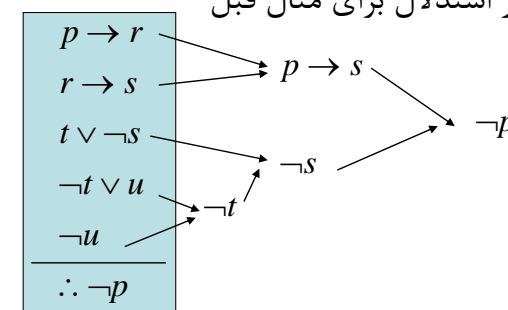
N. Razavi - DM Course - 2006

27

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال: روش دیگر استدلال برای مثال قبل



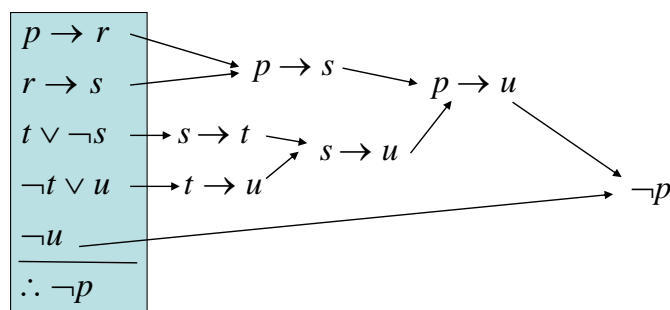
N. Razavi - DM Course - 2006

30

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال:



N. Razavi - DM Course - 2006

29

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

سفسطه

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg p} \therefore \neg q$$

- (۱) اگر  $۲ + ۳ = ۶$ ، آنگاه  $۲ + ۴ = ۶$ .  
 (۲)  $۲ + ۳ \neq ۶$ .  
 (۳) بنابراین،  $۲ + ۴ \neq ۶$ .

N. Razavi - DM Course - 2006

32

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

سفسطه (Fallacy)

$$\frac{p \rightarrow q}{q} \therefore p$$

- (۱) اگر مارگارت تاچر رئیس جمهور امریکا باشد، آنگاه حداقل ۳۵ ساله می باشد.  
 (۲) مارگارت تاچر حداقل ۳۵ ساله می باشد.  
 (۳) بنابراین، مارگارت تاچر رئیس جمهور امریکا می باشد.

N. Razavi - DM Course - 2006

31

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۸. قاعده تناقض (برهان خلف)

$$\frac{\neg p \rightarrow F_0}{\therefore p}$$

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow$$

$$\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow$$

$$p \wedge \neg q$$

اثبات بوسیله تناقض:

برای اثبات  $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ 

$$\neg((p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q) \rightarrow F_0 \Leftrightarrow$$

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow F_0$$

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۶. قاعده عطف

$$\frac{p}{q}$$

$$\therefore p \wedge q$$

مثال ۲-۲۷. قاعده قیاس فصلی (رزولوشن)

(۱) کیف پول هومن در جیب او و یا روی میز است.

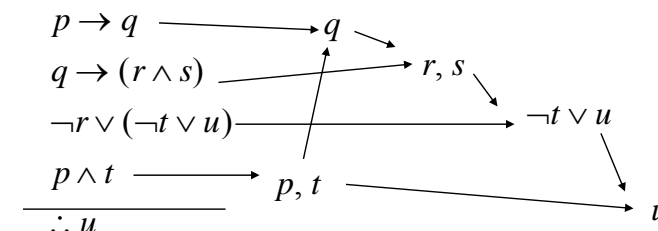
(۲) کیف پول هومن در جیب او نیست.

(۳) ؟

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۳۰.

روش منظم و سیستماتیک برای اثبات وجود ندارد به جز روش جدول درستی (۲<sup>n</sup>)

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

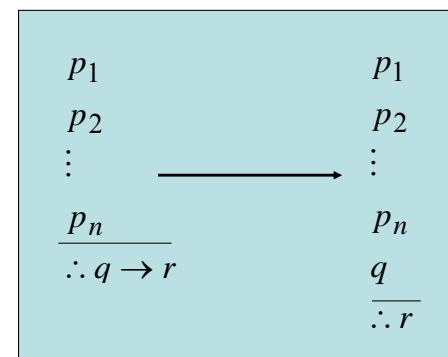
مثال ۲-۲۹. اثبات گزاره های شرطی

$$\frac{p \rightarrow r \quad \neg r \rightarrow \neg p \quad \neg p \rightarrow q \quad q \rightarrow s}{\therefore \neg r \rightarrow s}$$

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

اثبات نتایج شرطی:



$$\begin{aligned}
 & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\
 & \Leftrightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r) \\
 & \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \\
 & \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r \\
 & \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \\
 & \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r
 \end{aligned}$$

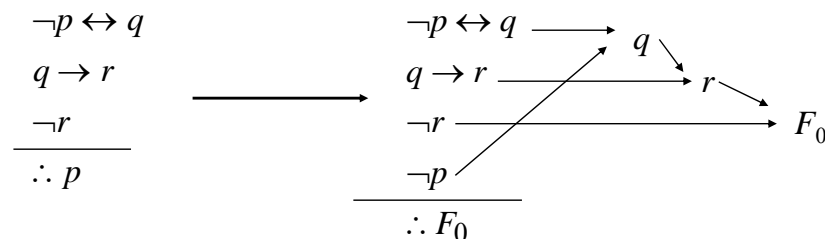
N. Razavi - DM Course - 2006

38

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۳۲-۲. اثبات بوسیله تناقض (برهان خلف)



N. Razavi - DM Course - 2006

37

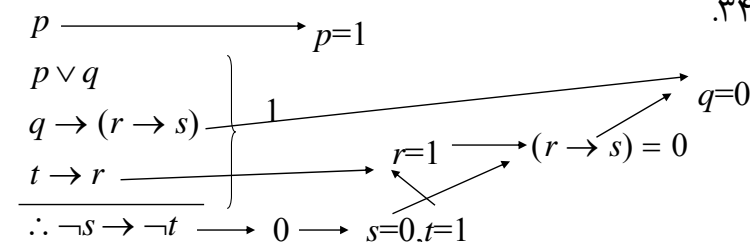
## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

سوال: چگونه اثبات کنیم که یک استدلال نا معتبر است؟

جواب: فقط کافی است که یک مثال نقض بیابیم.

مثال ۳۴-۲.



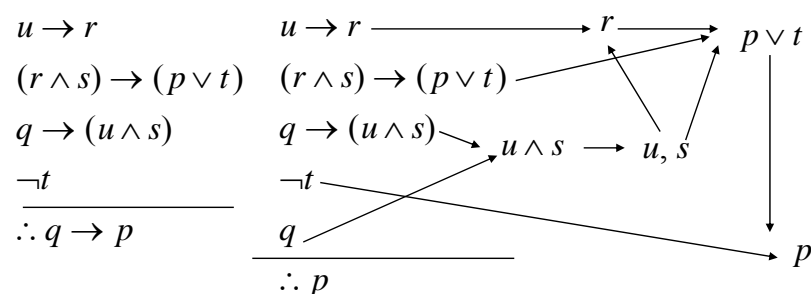
N. Razavi - DM Course - 2006

40

## فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۳۳-۲.



N. Razavi - DM Course - 2006

39

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

نمادگذاری:

 $p(x)$ : عدد  $x+2$  یک عدد صحیح زوج است. $q(x,y)$ : اعداد  $y-2$ ,  $x-y$  و  $x+2y$  اعداد صحیح زوج هستند. $p(5)$ : نادرست،  $p(6)$ : درست،  $q(4, 2)$ : درست،  $q(3, 4)$ : نادرست

بنابراین:

بازاء برخی از مقادیر  $x$ ،  $p(x)$  درست و نقیض آن نادرست است.بازاء برخی از مقادیر  $x$  و  $y$ ،  $q(x, y)$  درست و نقیض آن نادرست است.

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

تعریف ۲-۵. هر جمله خبری یک گزاره باز است اگر:

(۱) شامل یک یا چند متغیر بوده، و

(۲) یک گزاره نباشد، ولی

(۳) وقتی متغیرهای آن با مقادیر مجاز جایگزین شوند، به یک گزاره تبدیل شود.

عالم سخن

مثال: عدد  $x+2$  یک عدد صحیح زوج است. $x=y$   $x>y$   $x<y$  ...

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

مثال ۲-۳۶. عالم سخن: اعداد حقیقی

 $\exists x[p(x) \wedge r(x)]: TRUE$   $x=4$  $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]: TRUE$  $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]: TRUE$  $\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]: FALSE$   $x=1$  $\forall x[r(x) \vee s(x)]: FALSE$   $x=5, 6, \dots$  $\forall x[r(x) \rightarrow p(x)]: FALSE$   $x=-1$  $p(x): x \geq 0$  $q(x): x^2 \geq 0$  $r(x): x^2 - 3x - 4 = 0$  $s(x): x^2 - 3 > 0$ 

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

سور وجودی: برای برخی از مقادیر  $x$ :  $\exists xp(x)$ سور عمومی: برای تمام مقادیر  $x$ :  $\forall xp(x)$  $x$  در  $p(x)$  متغیر آزاد $x$  در  $\exists xp(x)$  متغیر مقید. بنابراین  $\exists xp(x)$  یا درست است و یا نادرست.

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

تعریف ۶-۲. هم ارزی منطقی برای گزاره های باز  $p(x)$  و  $q(x)$ 

$$\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$$

یعنی باید بازاء هر  $x$  در عالم سخن گزاره زیر درست باشد:

$$p(x) \leftrightarrow q(x)$$

 $p(x)$  به طور منطقی مستلزم  $q(x)$  است:  $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ 

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

مثال ۳۷-۲. سور ضمنی

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \iff \forall x(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

“عدد صحیح ۴۱ مساوی مجموع دو مجذور کامل است”

برابر است با:

$$\exists m \exists n[41 = m^2 + n^2]$$

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

بازاء یک عالم سخن مشخص و هر دو گزاره باز  $p(x)$  و  $q(x)$ 

$$\begin{aligned} \exists x[p(x) \wedge q(x)] &\Rightarrow [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)] \\ \exists x[p(x) \vee q(x)] &\Leftrightarrow [\exists x p(x) \vee \exists x q(x)] \\ \forall x[p(x) \wedge q(x)] &\Leftrightarrow [\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)] \\ [\forall x p(x) \vee \forall x q(x)] &\Rightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)] \end{aligned}$$

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

$$r(x): 2x + 1 = 5$$

مثال ۴۲-۲. عالم سخن: تمام اعداد صحیح

$$s(x): x^2 = 9$$

$$\exists x[r(x) \wedge s(x)] \quad \text{نادرست است، ولی}$$

$$\exists x r(x) \wedge \exists x s(x) \quad \text{درست می باشد. بنابراین:}$$

$$\exists x[r(x) \wedge s(x)] \not\Leftrightarrow \exists x r(x) \wedge \exists x s(x)$$

اما:

$$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]$$

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

مثال ۴۴-۲

 $p(x)$ :  $x$  فرد است. $q(x)$ :  $x^2-1$  زوج است.فرمول گزاره ای  $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$  را نقیض کنید.

$$\neg[\forall x(p(x) \rightarrow q(x))] \Leftrightarrow \exists x[\neg(p(x) \rightarrow q(x))]$$

$$\Leftrightarrow \exists x[\neg(\neg p(x) \vee q(x))] \Leftrightarrow \exists x[p(x) \wedge \neg q(x)]$$

“وجود دارد  $x$  به گونه ای که  $x$  فرد است و  $x^2-1$  زوج نیست”  
(نادرست)

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

نحوه نقیض کردن یک جمله سوردار شامل یک متغیر:

$$\neg[\forall x p(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$$

$$\neg[\exists x p(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$$

$$\neg[\forall x \neg p(x)] \Leftrightarrow \exists x p(x)$$

$$\neg[\exists x \neg p(x)] \Leftrightarrow \forall x p(x)$$

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

مثال ۴۸-۲

 $p(x, y)$ :  $x + y = 17$ ;

$\forall x \exists y p(x, y)$  برای هر  $x$  یک عدد صحیح مانند  $y$  وجود دارد به گونه ای که  $x + y = 17$  (درست)

$\exists y \forall x p(x, y)$  یک عدد صحیح مانند  $y$  وجود دارد به گونه ای که بازاء تمام اعداد صحیح مانند  $x$ ،  $x+y=17$

بنابراین:  $\forall x \exists y p(x, y) \neq \exists y \forall x p(x, y)$ 

## فصل ۲. منطق

۴-۲ استفاده از سورها

متغیرهای چندگانه

$$\forall x \forall y p(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x p(x, y)$$

$$\exists x \exists y p(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x p(x, y)$$

## فصل ۲. منطق

تمرینات

۲-۲. تمرین ۲۰

۲-۳. تمرین ۱۰

۲-۴. تمرین ۱۸ و ۲۶

## فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۴۹.

$$\begin{aligned}
 & \neg[\forall x \exists y[(p(x, y) \wedge q(x, y)) \rightarrow r(x, y)]] \\
 \Leftrightarrow & \exists x[\neg \exists y[(p(x, y) \wedge q(x, y)) \rightarrow r(x, y)]] \\
 \Leftrightarrow & \exists x \forall y \neg[(p(x, y) \wedge q(x, y)) \rightarrow r(x, y)] \\
 \Leftrightarrow & \exists x \forall y \neg[\neg[p(x, y) \wedge q(x, y)] \vee r(x, y)] \\
 \Leftrightarrow & \exists x \forall y[(p(x, y) \wedge q(x, y)) \wedge \neg r(x, y)]
 \end{aligned}$$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

یک گردایه خوش تعریف از اشیاء

(مجموعه دانشجویان باهوش! - باهوش باید تعریف شود).

مجموعه متناهی، مجموعه نامتناهی، کاردینالیتی (اندازه) مجموعه، زیر مجموعه

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad 1 \in A, 1 \in B, 1 \in C$$

$$B = \{x | x \text{ is odd}\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

کاردینالیتی A برابر است با ۵ ( $|A|=5$ )

A یک زیرمجموعه سره از B است

C زیر مجموعه B است

$$A \subset B$$

$$C \subseteq B$$

## فصل سوم نظریه مجموعه ها

سید ناصر رضوی

e-mail: [razavi@comp.iust.ac.ir](mailto:razavi@comp.iust.ac.ir)

۱۳۸۵

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \Rightarrow x \in B] \quad \text{زیرمجموعه ها}$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg \forall x [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg [\neg (x \in A) \vee x \in B]$$

$$\Leftrightarrow \exists x [x \in A \wedge x \notin B]$$

تساوی مجموعه ها

$$C = D \Leftrightarrow (C \subseteq D) \wedge (D \subseteq C)$$

$$C \neq D \Leftrightarrow \neg (C \subseteq D \wedge D \subseteq C)$$

$$\Leftrightarrow C \not\subseteq D \vee D \not\subseteq C$$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مجموعه پوچ یا تهی:  $\emptyset, \{\}$

مجموعه جهانی (مرجع، عالم سخن): U

مجموعه توانی A: مجموعه تمام زیر مجموعه های A

$$A = \{1, 2\}, P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$\text{If } |A|=n, \text{ then } |P(A)|=2^n.$$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مثال ۳-۹. تعداد مسیرهای پلکانی میان دو نقطه با مختصات صحیح.

از  $(2, 1)$  به  $(7, 4)$ : ۳ گام به بالا (U) و ۴ گام به راست (R)

$$R, U, R, R, U, R, R, U \longrightarrow 8!/(5!3!)=56$$

حل با استفاده از مجموعه ها:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

یک مجموعه سه عضوی مانند  $\{1, 3, 7\}$  به این معناست که گامهای ۱، ۳ و ۷ روبه بالا هستند. تعداد زیرمجموعه های سه عضوی  $A$  برابر است با:

$$C(8, 3)=56$$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

برای هر مجموعه متناهی مانند  $A$  که  $|A|=n \geq 0$ ، تعداد زیرمجموعه های  $k$  عضوی برابر است با:  $C(n, k)$

شمارش زیرمجموعه های  $A$ :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n, \text{ for } n \geq 0$$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مثال ۳-۱۱. برای اعداد صحیح  $n$  و  $r$  که  $n \geq r \geq 0$  به صورت ترکیباتی ثابت کنید:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

جواب: فرض کنید  $A = \{x, a_1, a_2, \dots, a_n\}$

اکنون تمام زیرمجموعه های  $r$  عضوی از  $A$  را در نظر بگیرید

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

تمام زیر مجموعه های  $r$  عضوی

تمام زیر مجموعه های  $r$  عضوی بدون  $x$

تمام زیر مجموعه های  $r$  عضوی شامل  $x$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مثال ۳-۱۰. تعداد ترکیبات یک عدد صحیح مثبت

$$4 = 3+1 = 1+3 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$$

اکنون از ایده زیر مجموعه ها برای حل این مسأله استفاده می کنیم  
در نظر بگیرید

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

اولین دومین سومین  
علامت جمع علامت جمع علامت جمع

تعداد ترکیبات = تعداد زیر مجموعه های مجموعه  $\Lambda = \{1, 2, 3\}$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

(آ)  $Z =$  مجموعه اعداد صحیح  $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

(ب)  $N =$  مجموعه اعداد صحیح غیر منفی یا اعداد طبیعی  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(پ)  $Z^+ =$  مجموعه اعداد صحیح مثبت  $\{x \in Z \mid x > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

(ت)  $Q =$  مجموعه اعداد گویا  $\{a, b \mid a, b \text{ is integer, } b \neq 0\}$

(ث)  $Q^+ =$  مجموعه اعداد گویای مثبت

(ج)  $Q^* =$  مجموعه اعداد گویای غیر صفر

(چ)  $R =$  مجموعه اعداد حقیقی

(ح)  $R^+ =$  مجموعه اعداد حقیقی مثبت

(خ)  $R^* =$  مجموعه اعداد حقیقی مخالف صفر

(د)  $C =$  مجموعه اعداد مختلط

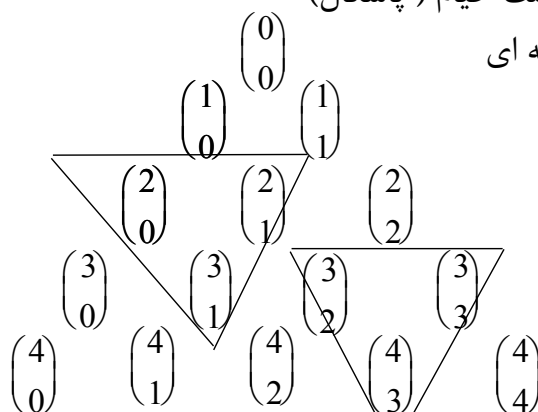
(ذ)  $C^* =$  مجموعه اعداد مختلط مخالف صفر

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مثال ۳-۱۳. مثلث خیام ( پاسکال )

ضرایب دو جمله ای



## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۲-۳. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

تعریف ۳-۵. بازاء هر دو مجموعه مانند  $A, B \subseteq U$

اجتماع

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

اشتراک

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

تفاضل متقارن

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

تعریف ۳-۶. مجموعه های دوبه دو منفصل

$$A \cap B = \emptyset$$

تعریف ۳-۷. متمم (مطلق)

$$\bar{A} = U - A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

تعریف ۳-۸. متمم (نسبی)

$$B - A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

(ر) بازاء هر  $n$  متعلق به اعداد صحیح غیر منفی

$$Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

(ز) بازاء هر دو عدد حقیقی  $a, b$  که  $a < b$

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{بازه بسته}$$

$$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\} \quad \text{بازه باز}$$

$$[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\} \quad \text{بازه نیم باز}$$

$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۲-۳. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

قوانین نظریه مجموعه ها

- قانون متمم مضاعف  
قوانین دمورگان
- (1)  $\overline{\overline{A}} = A$
- (2)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$   
 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- قوانین تعویض پذیری
- (3)  $A \cup B = B \cup A$   
 $A \cap B = B \cap A$
- قوانین شرکت پذیری
- (4)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- قوانین توزیع پذیری
- (5)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۲-۳. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

قضیه ۳-۴. به ازاء مجموعه مرجع  $U$  و مجموعه های  $A$  و  $B$  زیرمجموعه  $U$ ، گزاره های زیر هم ارزند.

- (آ)  $A \subseteq B$
- (ب)  $A \cup B = B$
- (پ)  $A \cap B = A$
- (ت)  $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۲-۳. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

دوگان  $S$  ( $S^d$ )

$\phi$	$\longleftrightarrow$	$U$
$U$	$\longleftrightarrow$	$\phi$
$\cup$	$\longleftrightarrow$	$\cap$
$\cap$	$\longleftrightarrow$	$\cup$

قضیه ۳-۵. اصل دوگانی: فرض کنیم  $S$  قضیه ای در رابطه با تساوی دو عبارت مجموعه ای باشد، در این صورت دوگان  $S$  یعنی  $S^d$  نیز یک قضیه خواهد بود.

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۲-۳. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

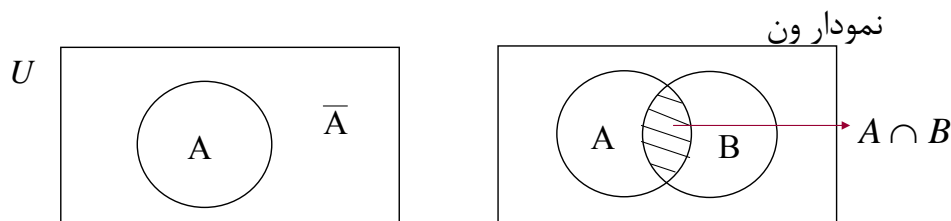
قوانین نظریه مجموعه ها

- قوانین خود توانی
- (6)  $A \cup A = A, A \cap A = A$
- قوانین همانی
- (7)  $A \cup \phi = A, A \cap U = A$
- قوانین معکوس
- (8)  $A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \phi$
- قوانین تسلط
- (9)  $A \cup U = U, A \cap \phi = \phi$
- قوانین جذب
- (10)  $A \cup (A \cap B) = A$   
 $A \cap (A \cup B) = A$

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۲-۳. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها  
مثال ۳-۱۷. دوگان  $A \subseteq B$  را بدست آورید.

از آنجا که  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$  بنابراین دوگان  $A \subseteq B$  برابر است با  
دوگان  $A \cup B = B$  که برابر است با  $A \cap B = B$  یعنی:  $B \subseteq A$



N. Razavi - DM course - 2006

17

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۲-۳. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها  
مثال ۳-۱۹. نقیض  $A-B$  را بدست آورید.

$$A-B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

$$\therefore \overline{A-B} = \overline{A \cap \bar{B}} = \bar{A} \cup B$$

مثال ۳-۲۰. نقیض  $A \Delta B$  را بدست آورید.

$$\therefore A \Delta B = \{x | x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

$$= (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$$

$$\therefore \overline{A \Delta B} = \overline{(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}} = \overline{A \cup B} \cup (A \cap B)$$

$$= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = [(A \cap B) \cup \bar{A}] \cap [(A \cap B) \cup \bar{B}]$$

$$= (B \cup \bar{A}) \cap (A \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cap B)$$

$$= \bar{A} \Delta B = A \Delta \bar{B}$$

N. Razavi - DM course - 2006

18



## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۲-۳. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

تعریف ۳-۱۰. فرض کنیم  $I$  یک مجموعه غیر تهی و  $U$  مجموعه مرجع باشد. به ازاء هر  $i$  متعلق به  $I$  فرض می کنیم  $A_i \in U$ . در این صورت  $I$  را مجموعه اندیس گذار و هر  $i$  را یک اندیس می نامیم.

با این شرایط تعریف می کنیم:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i \text{ for at least one } i \in I\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i \text{ for every } i \in I\}$$

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$$

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$$

قضیه ۳-۶. قوانین دمورگان تعمیم یافته:

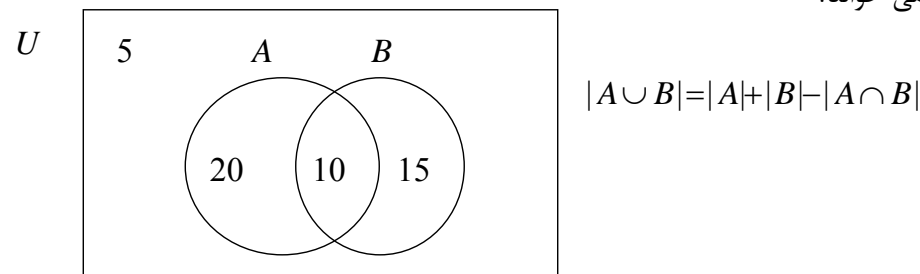
N. Razavi - DM course - 2006

19

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۳. شمارش و نمودارهای ون

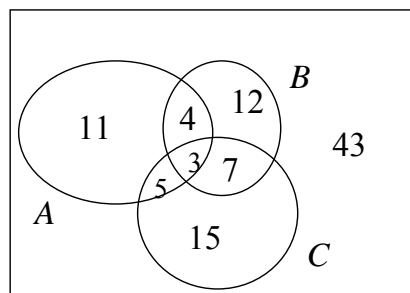
مثال ۳-۲۳. در یک کلاس ۵۰ دانشجو وجود دارد که ۳۰ نفر آنها ++C، ۲۵ نفر آنها پاسکال و ۱۰ نفر هر دو زبان را می خوانند. چند دانشجو یکی از زبانها را می خواند؟



N. Razavi - DM course - 2006

20

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A|=23, |B|=26, |C|=30, \\ |A \cap B|=7, |A \cap C|=8, |B \cap C|=10, \\ |A \cap B \cap C|=3$$

N. Razavi - DM course - 2006

### ۳-۳. شمارش و نمودارهای ون

مثال ۳-۲۴. انواع نقصهای یک گیت AND

$D_1$ : ورودی اول در صفر گیر کرده است.

$D_2$ : ورودی دوم در صفر گیر کرده است.

$D_3$ : خروجی در صفر گیر کرده است.

با داشتن ۱۰۰ نمونه:

$A$ : نقص  $D_1$

$B$ : نقص  $D_2$

$C$ : نقص  $D_3$

با دانستن موارد روبرو، چند

نمونه دارای نقص می باشند؟

**جواب : ۵۷**

21

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

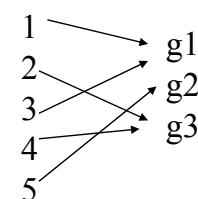
### ۳-۳. شمارش و نمودارهای ون

مثال ۳-۲۵. سه بازی وجود دارد. به چند طریق شخصی می تواند هر روز یک بازی انجام دهد به طوریکه در مدت ۵ روز، هر بازی را حداقل یکبار انجام داده باشد؟

$A$ : بدون انجام بازی ۱

$B$ : بدون انجام بازی ۲

$C$ : بدون انجام بازی ۳



$$|A| = |B| = |C| = 2^5$$

$$|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1^5$$

$$|A \cap B \cap C| = 0$$

$$\therefore |A \cup B \cup C| = 3 \times 2^5 - 3 \times 1^5 + 0 = 93$$

$$Ans = 3^5 - 93 = 150$$

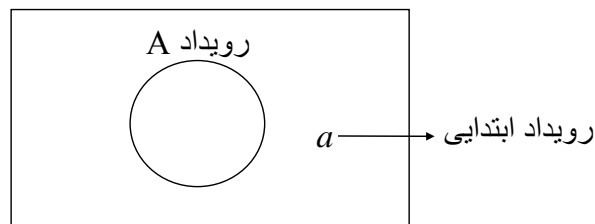
N. Razavi - DM course - 2006

22



## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

### ۴-۳. سخنی درباره احتمال



$U = \text{فضای نمونه}$

$P(A)$ : احتمال آنکه رویداد  $A$  اتفاق بیافتد  $= |A|/|U|$

$$|\{a\}|/|U| = 1/|U| = P(a)$$

N. Razavi - DM course - 2006

23

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

### ۴-۳. سخنی درباره احتمال

مثال ۳-۲۶. یک تاس را یک بار می اندازیم. احتمال به دست آمدن ۵ یا ۶ چقدر است؟ (جواب:  $1/3$ )

مثال ۳-۲۷. اگر سکه ای را چهار بار پرتاب کنیم، احتمال به دست آمدن دو شیر و دو خط چقدر است؟

جواب: اندازه فضای نمونه برابر است با  $2^4 = 16$

امکان آمدن دو شیر و دو خط در هر ترتیبی  $(H, H, T, T)$  برابر است با:

$$4!/2!2! = 6$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$6/16 = 3/8$$

N. Razavi - DM course - 2006

24

## فصل ۳. نظریه مجموعه ها

### تمرینات

تمرینهای ۱-۳: تمرین ۱۱ و ۱۴ و ۲۱

تمرینهای ۲-۳: تمرین ۸، ۱۴ و ۱۷

تمرینهای ۳-۳ و ۴-۳: تمرین ۳، ۵، ۸ و ۹

تمرینهای تکمیلی: تمرین ۴، ۱۸ و ۲۳



## فصل پنجم رابطه ها و توابع

سید ناصر رضوی  
e-mail: [razavi@comp.iust.ac.ir](mailto:razavi@comp.iust.ac.ir)  
۱۳۸۵

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۱-۵. ضرب کارتزین و رابطه ها

تعریف ۱-۵. به ازای مجموعه های  $A, B \subseteq U$ ، حاصل ضرب دکارتی یا حاصل ضرب خارجی  $A$  و  $B$  با  $A*B$  نمایش داده می شود و برابر است با:

– عناصر  $A*B$  زوج های مرتب می باشند.

–  $|A*B| = |A|*|B| = |B*A|$

– اما در حالت کلی  $A*B \neq B*A$  و

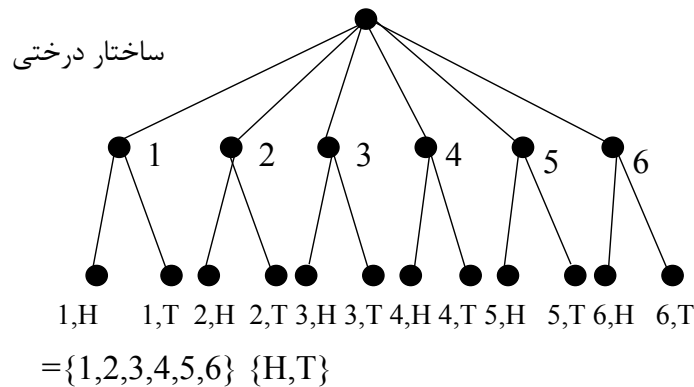
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۱-۵. ضرب کارتزین و رابطه ها

مثال ۳-۵. فضای نمونه حاصل از پرتاب یک تاس و سپس پرتاب یک سکه

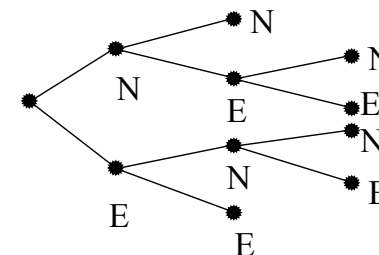


## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۱-۵. ضرب کارتزین و رابطه ها

“درختها ابزار مناسبی برای شمارش می باشند”

مثال ۴-۵. زنان در مسابقات قهرمانی تنیس حداکثر سه دست بازی می کنند. برنده اولین نفری است که دو دست را ببرد. به چند طریق نتیجه یک مسابقه برد می باشد.



جایگشت های  $EEN$  و  $NNE$ :

$$\frac{3!}{2!} \times 2 = 6, \text{ for men: } \frac{5!}{3! \times 2!} \times 2 = 20$$

بنابراین  
۶ حالت

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۱-۵. ضرب کارترین و رابطه ها

تعریف ۵-۲. به ازای مجموعه های  $A, B \subseteq U$ ، هر زیرمجموعه از  $A * B$  یک رابطه از  $A$  به  $B$  نام دارد و هر زیرمجموعه از  $A * A$  یک رابطه یونری (یکانی) روی  $A$  خوانده می شود.

به طور کلی برای مجموعه های متناهی  $A$  و  $B$  که  $|A|=m$  و  $|B|=n$ ، به تعداد  $2^{mn}$  رابطه از  $A$  به  $B$  وجود دارد (تمام زیر مجموعه های  $A * B$  شامل مجموعه تهی و خود  $A * B$ )

مثال ۵-۷. فرض کنیم  $A = \mathbb{Z}^+$ ، رابطه باینری  $R$  را روی  $A$  تعریف می کنیم:

$$R = \{(x, y) \mid x < y\}$$

$(1, 2)$ ،  $(7, 11)$  متعلق به  $R$  هستند اما  $(2, 2)$  و  $(3, 2)$  نیستند.

$1R2$  و  $7R11$  (نمایش میانوندی)

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۱-۵. ضرب کارترین و رابطه ها

قضیه ۵-۱. بازاء هر سه زیرمجموعه  $A, B, C \subseteq U$

$$(a) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(b) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(c) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$(d) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

Proof of (a): For any  $a, b \in U$ ,  $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A \wedge$

$$b \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A, b \in B, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B),$$

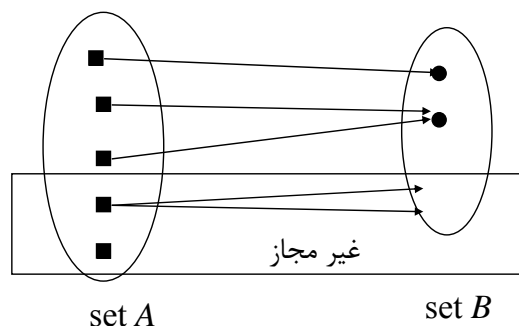
$$(a, b) \in (A \times C) \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۲-۵. توابع : ساده و یک به یک

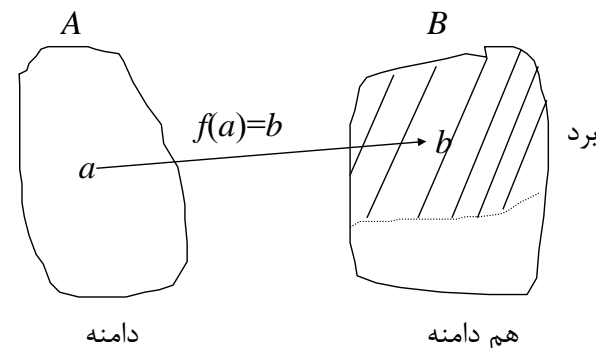
تعریف ۵-۳. بازاء مجموعه های غیر تهی  $A$  و  $B$ ، تابع یا نگاشت  $f$  از  $A$  به  $B$  که با  $f: A \rightarrow B$  نمایش داده می شود، رابطه ای است از  $A$  به  $B$  که در آن هر عنصر از  $A$  درست یک بار به عنوان اولین مؤلفه در یک زوج مرتب از رابطه ظاهر شود.



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۲-۵. توابع : ساده و یک به یک

تعریف ۵-۴. دامنه (Domain)، هم دامنه (Codomain)، برد (Range)



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۲-۵. توابع : ساده و یک به یک

مثال ۵-۱۰.

(آ) تابع کف: بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی  $x$

$$\lfloor 3.8 \rfloor = 3, \lfloor -3.8 \rfloor = -4, \lfloor -3 \rfloor = -3$$

(ب) تابع سقف: کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی  $x$

$$\lceil 3.8 \rceil = 4, \lceil -3.8 \rceil = -3, \lceil -3 \rceil = -3$$

(پ) تابع برش: قسمت صحیح  $x$

$\text{trunc}(x)$  = the integer part of  $x$

$$\text{trunc}(3.8) = 3, \text{trunc}(-3.8) = -3, \text{trunc}(-3) = -3$$



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۲-۵. توابع : ساده و یک به یک

اگر  $|A| = m$  و اندازه  $|B| = n$ ، تعداد توابع ممکن از  $A$  به  $B$  برابر است با  $n^m$ . (چرا؟)

تعریف ۵-۵. تابع  $f: A \rightarrow B$  را یک به یک یا انژکتیو گوئیم، اگر هر عنصر از  $B$  حداکثر یک بار به عنوان نقش یک عنصر از  $A$  ظاهر شده باشد.

اگر  $f: A \rightarrow B$  یک به یک بوده و  $A$  و  $B$  متناهی باشند، داریم  $|A| \leq |B|$ . به ازای مجموعه های دلخواه  $A$  و  $B$ ، هرگاه  $f: A \rightarrow B$  یک به یک باشد، آنگاه به ازاء هر دو عنصر دلخواه  $a_1$  و  $a_2$  متعلق به  $A$ :

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

مثلا تابع  $f(x) = 3x + 7$  یک به یک می باشد، اما تابع  $g(x) = x^4 - x$  یک به یک نیست زیرا  $g(0) = g(1) = 0$ .

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۲-۵. توابع : ساده و یک به یک

اگر  $|A| = m$  و  $|B| = n$  و  $m \leq n$ ، آنگاه تعداد توابع یک به یک از  $A$  به  $B$  برابر است با:

$$P(n, m) = n! / (n - m)!$$

(چرا؟)

$$\{(a_1, x_1), (a_2, x_2), (a_3, x_3), \dots, (a_m, x_m)\}$$

$$n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - m + 1) = P(n, m) = P(|B|, |A|)$$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۲-۵. توابع : ساده و یک به یک

قضیه ۵-۲. فرض کنیم  $f: A \rightarrow B$  و  $A_1, A_2 \subseteq A$

$$(a) f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$(b) f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$(c) f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \quad \text{اگر } f \text{ یک به یک باشد}$$

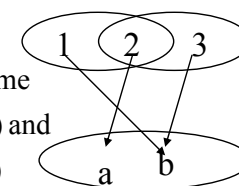
Proof : for part (b). For any  $b \in B$ ,  $b \in f(A_1 \cup A_2) \Rightarrow$  for some

$a \in A_1 \cup A_2$ ,  $b = f(a) \Rightarrow (b = f(a) \text{ and } a \in A_1) \text{ or } (b = f(a) \text{ and } a \in A_2) \Rightarrow (b \in f(A_1)) \text{ or } (b \in f(A_2)) \Rightarrow b \in f(A_1) \cup f(A_2)$

Conversely,  $b \in f(A_1) \cup f(A_2) \Rightarrow b \in f(A_1) \text{ or } b \in f(A_2) \Rightarrow$

(for some  $a_1 \in A_1$ ,  $b = f(a_1)$ ) or (for some  $a_2 \in A_2$ ,  $b = f(a_2)$ )  $\Rightarrow$

for some  $a \in A_1 \cup A_2$ ,  $b = f(a) \Rightarrow b \in f(A_1 \cup A_2)$ .



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

تعریف ۵-۹. تابع  $f: A \rightarrow B$  پوشا یا سورژکتیو می گوئیم اگر  $f(A)=B$  باشد؛ یعنی به ازای هر  $b$  متعلق به  $B$  حداقل یک عنصرمانند  $a$  متعلق به  $A$  وجود داشته باشد که  $f(a)=b$ .

مثال ۵-۱۹. تابع  $f: R \rightarrow R$  با تعریف  $f(x)=x^3$  پوشا می باشد، اما تابع  $f(x)=x^2$  پوشا نیست.

مثال ۵-۲۰. تابع  $f: Z \rightarrow Z$  با تعریف  $f(x)=3x+1$  پوشا نمی باشد.

تابع  $g: Q \rightarrow Q$  با تعریف  $g(x)=3x+1$  پوشا می باشد.

تابع  $h: R \rightarrow R$  با تعریف  $h(x)=3x+1$  پوشا می باشد.

هرگاه  $A$  و  $B$  مجموعه هایی متناهی باشند، آنگاه بازاء هر تابع پوشای  $f: A \rightarrow B$  باید داشته باشیم  $|A| \geq |B|$ . اما تعداد توابع پوشا چیست؟



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثال ۵-۲۳. به ازاء  $A=\{w, x, y, z\}$  و  $B=\{1, 2, 3\}$ ،  $3^4$  تابع از  $A$  به  $B$  وجود دارد. در بین تمام توابع:

(۱) ۱ نگاهت نشده است:  $2^4$  تابع از  $A$  به  $\{2, 3\}$

(۲) ۲ نگاهت نشده است:  $2^4$  تابع از  $A$  به  $\{1, 3\}$

(۳) ۳ نگاهت نشده است:  $2^4$  تابع از  $A$  به  $\{1, 2\}$

اما تمام توابع از  $A$  به  $\{1\}$  یا  $\{2\}$  یا  $\{3\}$  دو بار شمرده شده اند. بنابراین تعداد توابع پوشا از  $A$  به  $B$  برابر است با:

$$3^4 - \binom{3}{2}2^4 + \binom{3}{1}1^4 = 36$$

در حالت کلی اگر  $|A|=m \geq 3$  و  $|B|=3$ ، تعداد توابع پوشا از  $A$  به  $B$  طبق رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\binom{3}{3}3^m - \binom{3}{2}2^m + \binom{3}{1}1^m \quad (\text{این فرمول بازاء } m=1 \text{ یا } m=2 \text{ چه نتیجه ای می دهد؟})$$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثال ۵-۲۲. هرگاه  $A=\{x, y, z\}$  و  $B=\{1, 2\}$ ، آنگاه تمام توابع  $f: A \rightarrow B$  به غیر از  $f_1=\{(x,1), (y, 1), (z, 1)\}$  و  $f_2=\{(x,2), (y, 2), (z, 2)\}$  (توابع ثابت) پوشا می باشند. بنابراین به تعداد  $|B|^{|A|}-2=2^3-2=6$  تابع پوشا از  $A$  به  $B$  وجود دارد.

در حالت کلی تر، اگر  $|A|=m \geq 2$  و  $|B|=2$ ، در آن صورت تعداد کل توابع پوشا از  $A$  به  $B$  از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$2^m - 2$$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

فرمول کلی

For finite sets  $A, B$  with  $|A|=m$  and  $|B|=n$ , there are

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \dots \\ & + (-1)^{n-2}\binom{n}{2}2^m + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}1^m = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m \\ & = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m \end{aligned}$$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثالهای ابتدای فصل (صفحات ۳۴۱ و ۳۴۲)

(۱) هفت قرارداد با چهار شرکت به طوری که هر شرکت در بخشی از پروژه شرکت داشته باشد.

$$\binom{4}{4}4^7 - \binom{4}{3}3^7 + \binom{4}{2}2^7 - \binom{4}{1}1^7 = 8400$$

(۲) چند دنباله چهارتایی (0, 1, 2, 3) و هفت علامتی حداقل یک مورد از هر یک از علائم 0, 1, 2 و 3 را دارند؟

(۳) چند ماتریس صفر-یک 7\*4 دقیقا یک ۱ در هر سطر و حداقل یک ۱ در هر ستون دارند؟

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثالهای ابتدای فصل (صفحات ۳۴۱ و ۳۴۲)

(۴) هفت نفر (غیر مرتبط با هم) وارد یک ساختمان چهار طبقه می شوند و داخل آسانسور می شوند. احتمال اینکه آسانسور در هر طبقه به منظور خروج مسافران بایستد چیست؟

$$8400/4^7 = 8400/16384 > 0.5$$

(۵) به ازاء اعداد صحیح مثبت  $m, n$  که  $m < n$ ، ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m = 0$$

(۶) به ازاء هر عدد صحیح مثبت  $n$  تحقیق کنید که

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^n$$


## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثال ۵-۲۵. هفت کار باید میان ۴ نفر تقسیم شوند به طوریکه هر نفر حداقل یک کار داشته باشند و کار اول را نفر اول انجام دهد.

جواب:

حالت ۱. نفر اول فقط کار اول را می گیرد.

$$\sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{3-k} (3-k)^6 = 540$$

حالت ۲. نفر اول بیش از یک کار را می گیرد.

$$\sum_{k=0}^4 (-1)^k \binom{4}{4-k} (4-k)^6 = 1560$$

حال با استفاده از قانون جمع تعداد کل برابر است با:

$$540 + 1560$$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

تعداد راههای ممکن برای توزیع  $m$  شیء مختلف در  $n$  مکان مختلف به طوریکه هیچ یک از مکانها خالی نماند:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

و اگر مکانها یکسان باشند:

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

$S(m, n)$ : اعداد استرلینگ نوع دوم.

$n!S(m, n)$ : تعداد توابع پوشا

مثال ۵-۲۷. توزیع  $m$  شیء مختلف در  $n$  مکان یکسان به طوریکه مکان ها می توانند خالی باشند.

$$\sum_{i=1}^n S(m, i)$$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

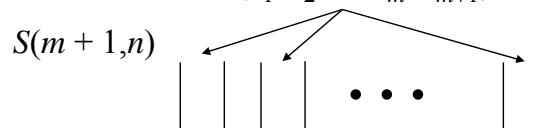
۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

قضیه ۳-۵. فرض کنیم  $m, n$  اعداد صحیح مثبتی با  $1 \leq n \leq m$  باشند. در این صورت:

$$S(m+1, n) = S(m, n-1) + nS(m, n)$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}\}$$

اثبات:



$n$  مکان یکسان

$a_{m+1}$  به تنهایی در یک مکان قرار دارد

$$S(m, n-1)$$

$a_{m+1}$  به تنهایی در یک مکان قرار ندارد: ابتدا  $m$  شیء دیگر را در  $n$  مکان توزیع کنید. سپس  $a_{m+1}$  را می توان در هر یک از مکانها قرار داد

$$nS(m, n)$$



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۳-۵. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثال ۵-۲۸. به چند طریق می توان عدد  $30030$  را به حداقل دو عامل (بزرگتر از یک) تجزیه نمود به طوریکه ترتیب مهم نباشد؟

$$30030 = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13$$

جواب: حداکثر ۶ عامل وجود دارد. بنابراین، جواب برابر است با:

$$S(6, 2) + S(6, 3) + S(6, 4) + S(6, 5) + S(6, 6) = 202$$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۴-۵. توابع خاص

تعریف ۵-۱۰. به ازای مجموعه های غیر تهی  $A, B$ ، هر تابع مانند  $f: A * A \rightarrow B$  یک **عمل دوتایی** بر  $A$  نام دارد. اگر  $B$  زیرمجموعه  $A$  باشد، آنگاه می گوییم این عمل دوتایی (بر  $A$ ) **بسته** است.

تعریف ۵-۱۱. تابع  $g: A \rightarrow A$  یک عمل یکانی بر  $A$  نام دارد.

مثال ۵-۲۹.

(آ) تابع  $f: Z * Z \rightarrow Z$  با تعریف  $f(a, b) = a - b$  یک عمل دوتایی بسته بر  $Z$

است.

(ب) تابع  $g: Z^+ * Z^+ \rightarrow Z^+$  با تعریف  $g(a, b) = a - b$  یک عمل دوتایی بر  $Z^+$

است ولی بسته نیست.

(پ) تابع  $h: R^+ \rightarrow R^+$  با تعریف  $h(a) = 1/a$  یک عمل یکانی بر  $R^+$  است.

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۴-۵. توابع خاص

تعریف ۵-۱۲. فرض کنیم  $f: A * A \rightarrow B$ ؛ یعنی  $f$  یک عمل دوتایی بر  $A$  باشد

(آ) گوییم  $f$  **تعویض پذیر** است اگر بازاء هر  $(a, b)$  متعلق به  $A * A$  داشته باشیم  $f(a, b) = f(b, a)$

(ب) وقتی  $B$  زیر مجموعه  $A$  باشد ( $f$  بسته باشد)، گوییم  $f$  **شرکت پذیر** است اگر بازاء هر سه عنصر  $a, b, c$  متعلق به  $A$ ، داشته باشیم:

$$f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$$

مثال ۵-۳۲. (آ) عمل دوتایی و بسته  $f: Z * Z \rightarrow Z$  را  $f(a, b) = a + b - 3ab$  تعریف می کنیم. بنابراین  $f$  هم تعویض پذیر و هم شرکت پذیر است (چرا؟)

(ب) عمل دوتایی و بسته  $h: Z * Z \rightarrow Z$  را با تعریف  $h(a, b) = a|b|$  در نظر می گیریم. بنابراین  $h(3, -2) = 2|-3| = 6 \neq h(-2, 3) = -6$ . پس  $h$  تعویض پذیر نمی باشد. اما  $h$  شرکت پذیر است.

$$h(a, h(b, c)) = a|h(b, c)| = a|b||c| = a|b||c|$$

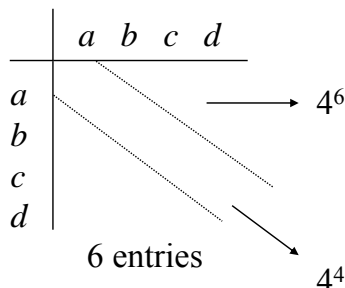
$$h(h(a, b), c) = h(a, b)|c| = a|b||c|$$

(پ) عمل دوتایی و بسته  $g: R^+ * R^+ \rightarrow Z$  را با تعریف  $g(a, b) = \lceil a + b \rceil$  در نظر می گیریم. بنابراین  $g$  تعویض پذیر است. اما شرکت پذیر نمی باشد  $g(g(3.2, 4.7), 6.4) = 15$  و  $g(3.2, g(4.7, 6.4)) = 16$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۴-۵. توابع خاص

مثال ۳۳-۵. اگر  $A = \{a, b, c, d\}$ ، آنگاه  $|A * A| = 16$ . در نتیجه  $4^{16}$  تابع (عمل دوتایی بسته) روی  $A$  وجود دارد. چه تعداد از آنها تعویض پذیر می باشند؟



Therefore,  $4^6 \times 4^4$



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۴-۵. توابع خاص

تعریف ۱۳-۵. فرض کنیم  $f: A * A \rightarrow B$  یک عمل دوتایی بر  $A$  باشد. عنصر  $x \in A$  یک عنصر خنثی (همانی) برای  $f$  است هرگاه بازاء هر  $a \in A$

$$f(a, x) = f(x, a) = a$$

مثال ۳۴-۵. (آ) تابع  $f: \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  با تعریف  $f(a, b) = a + b$  دارای عنصر خنثی 0 می باشد زیرا بازاء هر دو عدد صحیح  $f(a, 0) = f(0, a) = a$

(ب) تابع  $f: \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  با تعریف  $f(a, b) = a - b$  دارای عنصر خنثی نمی باشد.

(پ) فرض کنیم  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و  $g: A * A \rightarrow A$  عمل دوتایی بسته با تعریف  $g(a, b) = \min(a, b)$  باشد. این عمل دوتایی تعویض پذیر و شرکت پذیر است و عنصر 7 یک عنصر خنثی برای این عمل می باشد(؟).

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۴-۵. توابع خاص

قضیه ۴-۵. فرض کنیم  $f: A * A \rightarrow B$  یک عمل دوتایی باشد. هرگاه  $f$  دارای عنصر خنثی باشد، آنگاه عنصر خنثی منحصر به فرد (یکتا) می باشد.

اثبات: اگر  $x_1$  و  $x_2$  هر دو عنصر خنثی باشند، بنابراین  $f(x_1, x_2) = x_1$  و نیز  $f(x_1, x_2) = x_2$  (عنصر خنثی)، بنابراین  $x_1 = x_2$ .

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۴-۵. توابع خاص

محاسبه تعداد عمل های دوتایی بسته روی  $A$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, f: A * A \rightarrow A$$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_n$
$a_1$					
$a_2$					
$a_3$					
$\vdots$					
$\vdots$					
$\vdots$					
$a_n$					

$n^2$  مدخل، برای هر کدام  $n$  انتخاب

$\therefore n^{n^2}$  closed binary operations

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۴-۵. توابع خاص

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, f: A * A \rightarrow A$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_n$
$a_1$					
$a_2$					
$a_3$					
$\vdots$					
$a_n$					

$\frac{n^2 - n}{2}$  entries

$n$  entries

$\therefore n^n \times n^{\frac{n^2 - n}{2}}$  commutative closed binary operations

N. Razavi - DM course - 2006

29

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, f: A * A \rightarrow A$

۴-۵. توابع خاص

اگر  $a_1$  عنصر خنثی باشد:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_n$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_n$
$a_2$					
$a_3$					
$\vdots$					
$a_n$					

$(n-1)^2$  entries

$\therefore \binom{n}{1} n^{(n-1)^2} = n^{(n-1)^2+1}$  closed binary operations with an identity

N. Razavi - DM course - 2006

30



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۴-۵. توابع خاص

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, f: A * A \rightarrow A$

اگر  $a_1$  عنصر خنثی باشد:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_n$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_n$
$a_2$					
$a_3$					
$\vdots$					
$a_n$					

$\frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2}$  entries

$n-1$  entries

$\therefore \binom{n}{1} \left( n^{n-1} \right)^{\frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2}} = n^{\frac{n^2 - n + 2}{2}}$  commutative closed binary operations with an identity

N. Razavi - DM course - 2006

31

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتری

اصل لانه کبوتری. اگر  $m$  کبوتر  $n$  لانه را اشغال کنند و  $m > n$ ، آنگاه حداقل یک لانه توسط دو کبوتر یا بیشتر اشغال خواهد شد.

برای مثال از هر سه نفر، حداقل دو نفر هم جنس می باشند و از هر ۱۳ نفر حداقل دو نفر در یک ماه به دنیا آمده اند.

مثال ۵-۴۱. یک نوار مغناطیسی شامل 500,000 کلمه حداکثر چهار حرفی (حروف کوچک در الفبای لاتین) می باشد. آیا تمام این کلمات می توانند متمایز باشند؟

تعداد کلمات متفاوت ممکن برابر است با:

$$26^4 + 26^3 + 26^2 + 26 = 475,254 < 500,000$$

بنابراین، حداقل یک کلمه تکرار شده است.

N. Razavi - DM course - 2006

32

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتر

مثال ۵-۴۲. فرض کنیم  $S$  زیرمجموعه اعداد صحیح مثبت ( $Z^+$ ) باشد و  $|S|=37$ . در این صورت  $S$  شامل دو عنصر است که باقیمانده تقسیم آنها بر ۳۶ یکسان است.

$$n=36q+r, 0 \leq r < 36$$

۳۶ لانه ( $r$ ) و ۳۷ کبوتر.

مثال ۵-۴۳. ثابت کنید هرگاه از مجموعه  $S=\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ ، ۱۰۱ عدد صحیح انتخاب شود، آنگاه دو عدد صحیح وجود دارد که یکی دیگری را عاد می کند. اثبات: برای هر عنصر  $x$  متعلق به  $S$ ، می توانیم بنویسیم  $x=2^k y$  که  $k \geq 0$  و  $y$  متعلق به  $T=\{1, 3, 5, 7, \dots, 199\}$  می باشد. چون  $|T|=100$  و ۱۰۱ عدد صحیح انتخاب شده است، دو عدد صحیح مختلف به شکل  $a=2^m y$  و  $b=2^n y$  وجود دارند که یا  $a|b$  و یا  $b|a$ .

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

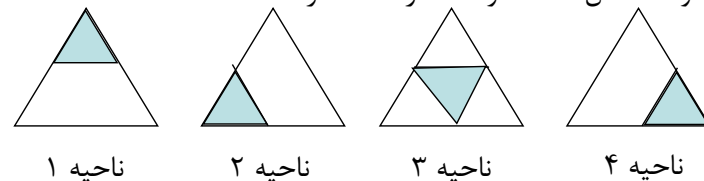
۵-۵. اصل لانه کبوتر

مثال ۵-۴۴. هر زیر مجموعه شش عضوی از مجموعه  $S=\{1, 2, 3, \dots, 9\}$  باید شامل ۲ عنصر با مجموع ۱۰ باشد.

لانه ها:  $\{5\}$ ,  $\{4, 6\}$ ,  $\{3, 7\}$ ,  $\{2, 8\}$ ,  $\{1, 9\}$

کبوترها: شش عضو از  $S$ .

مثال ۵-۴۵. مثلث  $ACE$  متساوی الاضلاع بوده و  $AC=1$ . اگر در درون این مثلث پنج نقطه اختیار شود، حداقل فاصله دو نقطه از  $\frac{1}{2}$  کمتر است.



۵ کبوتر (نقاط)

۴ لانه (ناحیه ها)

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتر

مثال ۵-۴۶. فرض کنیم  $S$  مجموعه ای از شش عدد صحیح مثبت باشد که ماکزیمم آنها ۱۴ است. نشان دهید که مجموع همه عناصر در تمام زیرمجموعه های غیر تهی  $S$  نمی توانند متمایز باشند.

برای هر زیر مجموعه غیر تهی  $A$  از  $S$ ، مجموع عناصر  $A$  که با  $S_A$  نشان داده می شود، از رابطه زیر پیروی می کند:

$$1 \leq S_A \leq 9+10+11+12+13+14=69$$

و  $2^6-1=63$  زیر مجموعه غیر تهی وجود دارد (تعداد لانه ها بیش از کبوترها می باشد).

زیر مجموعه هایی را در نظر می گیریم که کمتر از شش عنصر دارند:

$$10+11+12+13+14=60 = \text{تعداد لانه ها}$$

$$\text{تعداد کبوترها} = 2^6-1-1=62$$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتر

فرض کنیم که  $m$  یک عدد صحیح مثبت و فرد باشد. ثابت کنید عدد صحیح و مثبتی مانند  $n$  وجود دارد به طوری که  $m$  عدد  $2^n-1$  را عاد کند.

اثبات.  $m+1$  عدد صحیح مثبت زیر را در نظر می گیریم:

$$2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, \dots, 2^m-1, 2^{m+1}-1$$

طبق اصل لانه کبوتری و الگوریتم تقسیم، اعداد صحیح و مثبتی مانند  $s, t$  وجود دارند به طوری که  $1 \leq s \leq t \leq m+1$  و  $2^t-1$  در تقسیم بر  $m$  باقیمانده یکسانی دارند. بنابراین:  $(q_1, q_2)$  متعلق به اعداد طبیعی هستند

$$2^s-1=q_1m+r, 2^t-1=q_2m+r,$$

$$(2^t-1)-(2^s-1)=(q_2m+r)-(q_1m+r)=(q_2-q_1)m=2^s(2^{t-s}-1)$$

و چون  $m$  فرد است،  $\gcd(m, 2^s)=1$  لذا  $2^{t-s}-1$  و  $n=t-s$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتر

مثال ۵-۴۸. چهار هفته (۲۸ روز) برای بازی حداکثر ۴۰ دست تنیس وقت داریم و در هر روز باید حداقل یک دست بازی انجام شود. ثابت کنید این بازیها هر طور انجام شوند، چند روز متوالی وجود دارد که در کل آنها دقیقا ۱۵ دست بازی انجام شده است.

بازاء  $1 \leq i \leq 28$  فرض می کنیم  $x_i$  تعداد کل دست هایی باشد که از روز شروع بازیها تا پایان روز  $i$  ام انجام شده باشد. بنابراین

$$1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{28} \leq 40, \quad x_1 + 15 < \dots < x_{28} + 15 \leq 55$$

از ۵۶ عدد صحیح چون ماکزیمم آنها برابر ۵۵ است، بنابراین دوتای آنها باید یکسان باشند (اصل لانه کبوتری). بنابراین اندیس هایی مانند  $1 \leq j < i \leq 28$  وجود دارند که  $x_i = x_j + 15$ . بنابراین از روز  $j+1$  تا پایان روز  $i$  دقیقا ۱۵ دست بازی انجام شده است.

N. Razavi - DM course - 2006

37

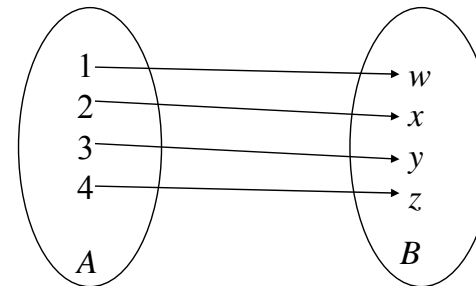
## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

معکوس جمع:  $u$  و  $-u$

معکوس ضرب:  $u$  و  $1/u$

تعریف ۵-۱۵. هرگاه  $f: A \rightarrow B$ ، آنگاه گوییم که  $f$  بای ژکتیو یا تناظر یک به یک است اگر  $f$  یک به یک و پوشا باشد.



مثال ۵-۵۰.

باید  $|A| = |B|$

N. Razavi - DM course - 2006

38



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

تعریف ۵-۱۶. تابع  $1_A: A \rightarrow A$  با تعریف  $1_A(a) = a$  بازاء هر عنصر  $a$  متعلق به  $A$ ، تابع همانی برای  $A$  نام دارد.

تعریف ۵-۱۷. اگر  $f, g: A \rightarrow B$ ، گوییم  $f$  و  $g$  مساویند و می نویسیم  $f = g$  اگر بازاء تمام اعضاء  $A$  داشته باشیم  $f(a) = g(a)$ .

مثال ۵-۵۱. فرض کنیم  $f: Z \rightarrow Z, g: Z \rightarrow Q$  که در آن برای هر عدد صحیح متعلق به  $Z$ ،  $f(x) = x = g(x)$  اما  $f \neq g$ . زیرا  $f$  یک تابع تناظر یک به یک می باشد، در حالیکه  $g$  فقط یک به یک است و پوشا نمی باشد.

مثال ۵-۵۲. توابع  $f, g: R \rightarrow Z$  را با تعاریف زیر در نظر می گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \in Z \\ \lceil x \rceil + 1, & \text{if } x \in R - Z \end{cases} \quad g(x) = \lceil x \rceil, \text{ for all } x \in R, \text{ then } f = g.$$

N. Razavi - DM course - 2006

39

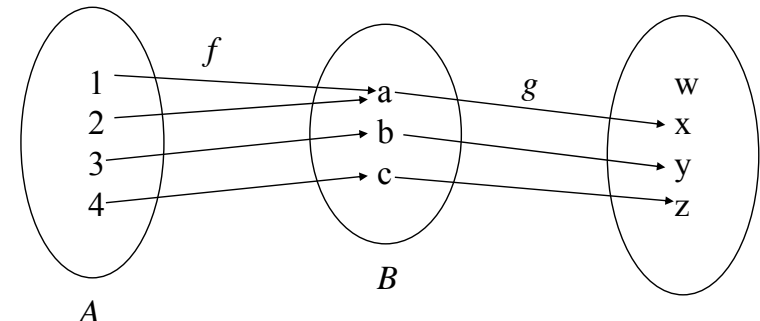
## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

تعریف ۵-۱۸. اگر  $f: A \rightarrow B$  و  $g: B \rightarrow C$ ، تابع مرکب را با علامت  $g \circ f: A \rightarrow C$  نشان داده و بازاء هر عنصر  $a$  مانند  $A$ ، با فرمول  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$  تعریف می کنیم.

مثال ۵-۵۳.

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = x, \quad g(f(2)) = x, \quad g(f(3)) = y, \quad g(f(4)) = z$$



N. Razavi - DM course - 2006

40

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

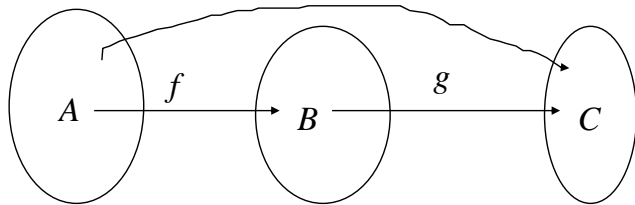
۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

مثال ۵-۴. فرض کنیم  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با تعاریف  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = x+5$  موجود باشند. در این صورت  $\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 5$  و  $\text{fog}(x) = f(g(x)) = f(x+5) = (x+5)^2$  و بنابراین ترکیب توابع دارای خاصیت تعویض پذیری نمی باشد.

قضیه ۵-۵. فرض کنیم  $f: A \rightarrow B$  و  $g: B \rightarrow C$

(آ) هرگاه  $f$  و  $g$  یک به یک باشند، آنگاه  $\text{gof}$  یک به یک است.

(ب) هرگاه  $f$  و  $g$  پوشا باشند، آنگاه  $\text{gof}$  پوشا می باشد.



N. Razavi - DM course - 2006

41



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

مثال ۵-۵. فرض کنیم  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  که در آنها:

$$f(x) = x^2, g(x) = x + 5, h(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

در این صورت :

$$((h \circ g) \circ f)(x) = hg(x^2) = h(x^2 + 5) = \sqrt{(x^2 + 5)^2 + 5} = (h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)))$$

در نتیجه:

$$(\text{hog}) \circ f = h \circ (\text{gof})$$

N. Razavi - DM course - 2006

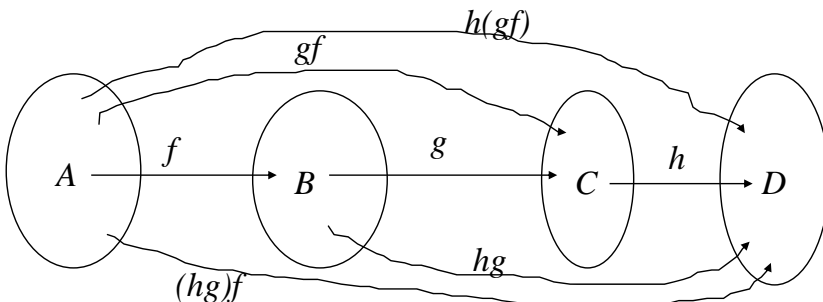
42

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

قضیه ۵-۶. هرگاه  $f: A \rightarrow B$  و  $g: B \rightarrow C$  و  $h: C \rightarrow D$  آنگاه

$$(\text{hog}) \circ f = h \circ (\text{gof})$$



N. Razavi - DM course - 2006

43

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

تعریف ۵-۱۹. اگر  $f: A \rightarrow A$ ، تعریف می کنیم  $f^1 = f$  و بازاء هر عدد صحیح مثبت  $n$

$$f^{n+1} = f \circ f^n$$

(تعریف بازگشتی یا recursive)

مثال ۵-۴. فرض کنیم  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $f: A \rightarrow A$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 3)\}$$

$$f^2 = f \circ f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 1)\},$$

$$f^3 = f \circ f^2 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\} = f^n, n \geq 3$$

$f^5$  و  $f^6$  را محاسبه کنید.

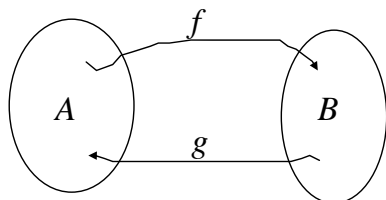
N. Razavi - DM course - 2006

44

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۶-۵. ترکیب توابع و توابع معکوس

تعریف ۵-۲۱. اگر  $f: A \rightarrow B$ ، آنگاه گوئیم  $f$  معکوس پذیر است اگر تابعی مانند  $g: B \rightarrow A$  چنان باشد که  $\text{fog} = 1_A$  و  $\text{gof} = 1_B$ .



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۶-۵. ترکیب توابع و توابع معکوس

مثال ۵-۸. فرض کنیم  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت  $f(x) = 2x + 5$  و  $g(x) = (1/2)(x - 5)$  باشند. در این صورت

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = (1/2)(2x + 5 - 5) = x$$

و

$$\text{fog}(x) = f(g(x)) = f((1/2)(x - 5)) = 2[(1/2)(x - 5)] + 5 = x$$

لذا  $\text{fog} = 1_{\mathbb{R}}$  و  $\text{gof} = 1_{\mathbb{R}}$  و در نتیجه  $f$  و  $g$  توابعی معکوس پذیر می باشند.

قضیه ۵-۷. هرگاه تابع  $f: A \rightarrow B$  معکوس پذیر بوده و تابع  $g: B \rightarrow A$  در  $\text{fog} = 1_A$  و  $\text{gof} = 1_B$  صدق کند، آنگاه این تابع  $g$  منحصر به فرد می باشد.

اثبات: اگر  $h: B \rightarrow A$  نیز معکوس  $f$  باشد، بنابراین  $\text{foh} = 1_B$  و  $\text{hof} = 1_A$ . در نتیجه  $h = \text{ho}1_B = \text{ho}(\text{fog}) = (\text{hof})\text{og} = 1_A \text{og} = g$ .

(چون معکوس  $f$  منحصر به فرد است، ما از نماد  $f^{-1}$  برای نمایش معکوس  $f$  استفاده می کنیم).



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۶-۵. ترکیب توابع و توابع معکوس

قضیه ۵-۸. تابع  $f: A \rightarrow B$  معکوس پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک و پوشا باشد.

قضیه ۵-۹. هرگاه  $f: A \rightarrow B$ ،  $g: B \rightarrow C$  توابع معکوس پذیری باشند، آنگاه  $\text{gof}$  نیز معکوس پذیر است و  $(\text{gof})^{-1} = f^{-1}\text{og}^{-1}$ .

چگونه معکوس یک تابع را محاسبه کنیم؟

مثال ۵-۶۰.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $f(x) = mx + b$ ،  $m \neq 0$  اعداد حقیقی و

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid y = mx + b\}^c = \{(y, x) \mid y = mx + b\} = \{(x, y) \mid x = my + b\}$$

$$= \{(x, y) \mid y = \frac{1}{m}(x - b)\} \therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{m}(x - b)$$

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۶-۵. ترکیب توابع و توابع معکوس

مثال ۵-۶۱. فرض کنیم  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  و  $f(x) = e^x$  یک به یک و پوشا است (نمودار)

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid y = e^x\}^c = \{(y, x) \mid y = e^x\} = \{(x, y) \mid x = e^y\}$$

$$= \{(x, y) \mid y = \ln x\} \therefore f^{-1}(x) = \ln x.$$

قضیه ۵-۱۱. فرض کنیم  $f: A \rightarrow B$  که در آن  $A$  و  $B$  متناهی اند و  $|A| = |B|$ . در این صورت احکام زیر هم ارزند:

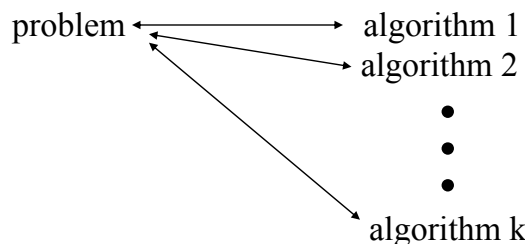
(آ)  $f$  یک به یک است.

(ب)  $f$  پوشاست.

(ج)  $f$  معکوس پذیر است.

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۷-۵. پیچیدگی محاسباتی



کدام بهتر است ؟  
نیاز به معیار داریم.

معیار: پیچیدگی زمانی یا پیچیدگی حافظه

یک تابع مانند  $f(n)$  که  $n$  اندازه ورودی می باشد.

یک الگوریتم را در سه حالت تحلیل می کنیم:

- بهترین حالت (معمولا استفاده نمی شود)

- حالت متوسط (پیچیده می باشد)

- بدترین حالت

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۷-۵. پیچیدگی محاسباتی

تعریف ۵-۲۳. فرض کنیم  $f, g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . گوئیم  $g$  بر  $f$  مسلط است (یا  $f$  تحت تسلط  $g$ ) اگر یک ثابت حقیقی و مثبت مانند  $m$  و یک ثابت صحیح مثبت مانند  $k$  وجود داشته باشند به طوریکه بازاء هر  $n \geq k$ :

$$|f(n)| \leq m|g(n)|$$

(این را به صورت  $f=O(g)$  نمایش می دهیم)

Big-Oh Form	Name
$O(1)$	constant
$O(\log_2 n)$	Logarithmic
$O(n)$	Linear
$O(n \log_2 n)$	$n \log_2 n$
$O(n^2)$	Quadratic
$O(n^3)$	Cubic
$O(n^m), m=0,1,2,3,\dots$	Polynomial
$O(c^n), c>1$	Exponential
$O(n!)$	Factorial

harder



## فصل ۵. رابطه ها و توابع

۷-۵. پیچیدگی محاسباتی

problem size $n$	Order of Complexity					
	$\log_2 n$	$n$	$n \log_2 n$	$n^2$	$2^n$	$n!$
2	1	2	2	4	4	2
16	4	16	64	256	$6.5 \times 10^4$	$2.1 \times 10^{13}$
64	6	64	384	4096	$1.84 \times 10^{19}$	$> 10^{89}$

$$1.8 \times 10^{19} \text{ microseconds} \cong 2.14 \times 10^8 \text{ days} \cong 5845 \text{ centuries}$$

### Summaries ( $m$ objects, $n$ containers)

Objects Are Distinct	Containers Are Distinct	Some Containers May Be Empty	Number of Distributions
Yes	Yes	Yes	$n^m$
Yes	Yes	No	$n! S(m, n)$
Yes	No	Yes	$S(m, 1) + S(m, 2) + \dots + S(m, n)$
Yes	No	No	$S(m, n)$
No	Yes	Yes	$\binom{n+m-1}{m}$
No	Yes	No	$\binom{n+(m-n)-1}{m-n} = \binom{m-1}{m-n} = \binom{m-1}{n-1}$

Put one object in each container first.

## فصل ۵. رابطه ها و توابع

- تمرینات

۲۷-

۱۸ و ۶ -

۱۴ -

۲۰ و ۱۸ -



## فصل هفتم

### رابطه ها: برخورد دوم

سید ناصر رضوی  
e-mail: [razavi@comp.iust.ac.ir](mailto:razavi@comp.iust.ac.ir)  
۱۳۸۵

## رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها  
تعریف ۱-۷. اگر  $A$  و  $B$  مجموعه باشند، یک **رابطه** از  $A$  به  $B$  زیرمجموعه ای است از  $A*B$ . زیرمجموعه های  $A*A$  را روابط بر  $A$  می نامیم.

مثال ۱-۷.  $\bar{A}$  رابطه  $R$  بر مجموعه  $Z$  را با  $aRb$  یا  $R(a, b)$  اگر  $a \leq b$  تعریف می کنیم (این رابطه را بر  $Q$  یا  $R$  نیز می توان تعریف نمود- ولی بر  $C$  نه).

(ب) فرض کنیم  $n$  متعلق به مجموعه اعداد صحیح مثبت ( $Z^+$ ) باشد. به ازاء اعداد صحیح  $x$  و  $y$ ، رابطه  $R$  به پیمانه  $n$  با  $xRy$  اگر  $x-y$  مضربی از  $n$  باشد تعریف می شود. مثلاً بازاء  $n=7$  داریم:

$9R2, -3R11, 4R0, 3R7$



## رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۲-۷. رابطه  $R$  بر مجموعه  $A$  **انعکاسی** است اگر بازاء هر عضو از  $A$  مانند  $x$ ،  $(x, x)$  در  $R$  باشد.

مثال ۴-۷. برای  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  رابطه  $R$  بر  $A$  انعکاسی است اگر و فقط اگر:

$$R \supseteq \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}.$$

بنابراین  $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$  بر  $A$  انعکاسی نیست ولی  $R_2$  بر  $A$  انعکاسی می باشد.

$$R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y\}$$

## رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

مثال ۵-۷. اگر  $A$  یک مجموعه متناهی با  $|A|=n$  باشد،  $|A*A|=n^2$  و در نتیجه  $2^{n^2}$  رابطه بر  $A$  وجود دارد. چند تا از این روابط انعکاسی می باشند؟

اگر  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، برای آنکه رابطه  $R$  بر  $A$  انعکاسی باشد باید تمام  $(a_i, a_i)$  را که در آن  $1 \leq i \leq n$  در  $R$  قراردهیم. بقیه  $n^2 - n$  زوج مرتب می توانند در  $R$  باشند یا نباشند، در نتیجه تعداد روابط منعکس بر  $A$  با  $n$  عنصر برابر است با:

$$2^{n^2 - n}$$

## رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۳-۷. رابطه  $R$  بر مجموعه  $A$  را **مقارن** نامیم اگر بازاء هر  $x$  و  $y$  متعلق به  $A$ :

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R, \text{ for all } x, y \in A$$

مثال ۶-۷. بازاء  $A = \{1, 2, 3\}$  داریم:

(آ)  $R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$  مقارن است ولی انعکاسی نیست.

(ب)  $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$  انعکاسی است ولی مقارن نیست.

(پ)  $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$  و

$R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$  هر دو بر  $A$  هم انعکاسی

و هم مقارن می باشند.

(ت)  $R_5 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$  نه انعکاسی و نه مقارن است.



## رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۴-۷. به ازاء مجموعه  $A$ ، رابطه  $R$  بر  $A$  را **متعدی** می نامیم اگر به ازاء هر سه

عضو از  $A$  مانند  $x, y, z$  داشته باشیم:

$$(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R, \text{ for all } x, y, z \in A$$

مثال ۸-۷. رابطه  $R$  بر  $Z^+$  که به صورت  $aRb$  اگر  $a|b$ ، انعکاسی و متعدی می باشد اما مقارن نیست. (۲ با ۶ رابطه دارد ولی ۶ با ۲ خیر)

مثال ۹-۷. رابطه  $R$  را بر مجموعه  $Z$  به صورت  $aRb$  اگر  $ab \geq 0$ ، تعریف می کنیم. بنابراین،  $R$  انعکاسی و مقارن است ولی متعدی نمی باشد. ( $3R0$  و  $0R-7$  اما  $3$  با  $-7$  رابطه ندارد.)

نکته: فرمول کلی برای تعداد کل روابط متعدی بر یک مجموعه متناهی وجود ندارد.

## رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

برای شمارش روابط مقارن بر  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ،  $A * A$  را به صورت می نویسیم که در آن  $A_1 \cup A_2$

$$A_1 = \{(a_i, a_i) | 1 \leq i \leq n\}, A_2 = \{(a_i, a_j) | 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

$$|A_2| = |A * A| - |A_1| = n^2 - n = n(n-1)$$

مجموعه  $A_2$  شامل  $(1/2)(n^2 - n)$  زیر مجموعه  $S_{ij}$  به شکل  $\{(a_i, a_j), (a_j, a_i)\}$  است که در آن  $1 \leq i < j \leq n$ .

$$2^n \cdot 2^{(1/2)(n^2 - n)} = 2^{(1/2)(n^2 + n)} : A$$

$$2^{(1/2)(n^2 - n)} : A$$

## رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۵-۷. فرض کنیم  $R$  یک رابطه بر  $A$  باشد.  $R$  **پادمقارن** است اگر

بازاء هر دو عضو از  $A$  مانند  $a, b$ :

$$(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b, \text{ for all } a, b \in A$$

مثال ۱۱-۷. رابطه زیر مجموعه بودن:  $ARB$ ، اگر  $A$  زیر مجموعه  $B$  باشد، انعکاسی، پاد مقارن و متعدی می باشد ولی مقارن نیست.

مثال ۱۲-۷. اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$  آنگاه  $R$  نه مقارن است و نه پاد مقارن، ولی  $R_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$  هم مقارن می باشد و هم پاد مقارن. (تعداد این نوع روابط چیست؟)

## رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

برای شمارش روابط پادمتقارن بر  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ،  $A * A$  را به صورت می نویسیم که در آن  $A_1 \cup A_2$

$$A_1 = \{(a_i, a_i) | 1 \leq i \leq n\}, A_2 = \{(a_i, a_j) | 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

$$|A_2| = |A * A| - |A_1| = n^2 - n = n(n-1)$$

مجموعه  $A_2$  شامل  $(1/2)(n^2 - n)$  زیر مجموعه  $S_{ij}$  به شکل  $\{(a_i, a_j), (a_j, a_i)\}$  است که در آن  $1 \leq i < j \leq n$ . سه انتخاب برای این نوع از زیر مجموعه ها داریم: انتخاب یکی از دوتا و یا هیچ کدام؛ بنابراین:

$$2^{(1/2)(n^2 - n)} : \text{بنابراین، تعداد روابط پاد متقارن بر } A$$

$$3^{(1/2)(n^2 - n)} : \text{و هم چنین تعداد روابط انعکاسی و پادمتقارن بر } A$$



## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۸. اگر  $A, B$  و  $C$  مجموعه بوده و  $R_1$  رابطه ای از  $A$  به  $B$  و  $R_2$  رابطه ای از  $B$  به  $C$  باشد، آنگاه رابطه ترکیب  $R_1 \circ R_2$  رابطه ایست از  $A$  به  $C$  که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, z) | (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2\}$$

(توجه: ترکیب دو رابطه در جهت عکس ترکیب توابع نوشته می شود)  
مثال ۷-۱۷. فرض کنیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{w, x, y, z\}, C = \{5, 6, 7\}$$

رابطه  $R_1$  از  $A$  به  $B$  و رابطه  $R_2$  از  $B$  به  $C$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$R_1 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (3, z)\}, R_2 = \{(w, 5), (x, 6)\}, R_3 = \{(w, 5), (w, 6)\}$$

در این صورت:

$$R_1 \circ R_2 = \{(1, 6), (2, 6)\}, R_1 \circ R_3 = \emptyset$$

## رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۶. گوئیم رابطه  $R$  بر مجموعه  $A$  یک رابطه ترتیب جزئی است اگر  $R$  انعکاسی، پادمتقارن و متعدی باشد. (اگر برای هر  $a, b$  متعلق به  $A$ ،  $aRb$  و یا  $bRa$  در این صورت  $R$  را یک رابطه ترتیب تام گوئیم). مانند روابط  $\leq, \geq, \subseteq, \supseteq, \dots$   
مثال ۷-۱۵. رابطه عاد کردن بر  $Z^+$  رابطه ترتیب جزئی می باشد.

تعریف ۷-۷. رابطه هم ارزی  $R$  بر  $A$  رابطه ای است انعکاسی، متقارن و متعدی.

مثال: رابطه  $aRb$  اگر  $a \bmod n = b \bmod n$  (هم نهشتی به پیمانه  $n$ )

نکته: رابطه تساوی هم یک رابطه ترتیب جزئی و هم یک رابطه هم ارزی می باشد.

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

قضیه ۷-۱. فرض کنیم  $A, B, C$  و  $D$  مجموعه بوده و  $R_1$  رابطه ای از  $A$  به  $B$ ،  $R_2$  رابطه ای از  $B$  به  $C$  و  $R_3$  رابطه ای از  $C$  به  $D$  باشد. در این صورت:

$$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ R_2 \circ R_3$$

تعریف ۷-۹. بازاء مجموعه  $A$  و رابطه  $R$  بر  $A$ ، توانهای  $R$  را به طور بازگشتی تعریف می کنیم:

$$R^1 = R \quad (R^0 = I_A)$$

$$R^{n+1} = R \circ R^n \quad (\text{بازاء } n \text{ متعلق به } Z^+)$$

مثال ۷-۱۹. اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ ، آنگاه

$$R^2 = \{(1, 4), (1, 2), (3, 4)\}, R^3 = \{(1, 4)\}, R^n = \emptyset \text{ for } n \geq 4$$

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۱۰. **ماتریس صفر - یک** (با استفاده از عملیات بولین  $1 + 1 = 1$ )

مثال ۲۰-۷. ماتریس E یک ماتریس  $4 \times 3$  (صفر-یک) می باشد.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_{31}=1 \text{ و } e_{23}=0 \text{ و } e_{11}=1$$



## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

فرض کنیم A مجموعه ای با  $|A|=n$  و R رابطه ای بر A باشد. اگر  $M(R)$  ماتریس رابطه R باشد، در این صورت:

(آ)  $M(R)=0$  (ماتریس با تمام درایه های صفر)، اگر و فقط اگر  $R=\emptyset$ ؛

(ب)  $M(R)=1$  (ماتریس با تمام درایه های یک)، اگر و فقط اگر  $R=A \times A$ ؛

(پ) به ازای هر n متعلق به  $Z^+$ :  $M(R^n)=[M(R)]^n$ .

تعریف ۷-۱۱. **تعریف حق تقدم** ( $E \leq F$ ): می گوئیم E پیش از F است هرگاه تمام درایه های E کوچکتر یا مساوی درایه های متناظر شان در F باشند.

مثال ۲۳-۷.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۲۱-۷. فرض کنیم:

$$A=\{1, 2, 3, 4\}, B=\{w, x, y, z\}, C=\{5, 6, 7\}$$

رابطه  $R_1$  از A به B و رابطه  $R_2$  از B به C را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$R_1=\{(1, x), (2, x), (3, y), (3, z)\}, R_2=\{(w, 5), (x, 6)\},$$

در این صورت:

$$M(R_1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} w \\ x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, M(R_2) = \begin{matrix} & \begin{matrix} w & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M(R_1) \cdot M(R_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(R_1 \circ R_2)$$

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۱۲. ماتریس واحد: برای هر n متعلق به  $Z^+$  و  $I_n=(\delta_{ij})_{n \times n}$ ،  $I_n$  ماتریس  $n \times n$  (صفر-یک) است که:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

تعریف ۷-۱۳. **ترانپوز**: فرض کنیم  $A=(a_{ij})_{m \times n}$  یک ماتریس  $n \times m$  باشد. ترانپوز A که به صورت  $A^T$  نوشته می شود، ماتریس  $(a^*_{ij})_{n \times m}$  است که در آن بازاء هر  $1 \leq i \leq n$  و  $1 \leq j \leq m$  داشته باشیم:  $a^*_{ij}=a_{ji}$ .

مثال ۲۴-۷.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

قضیه ۲-۷. فرض کنیم  $A$  مجموعه ای با  $|A|=n$  و  $R$  رابطه ای بر  $A$  باشد. اگر

$M(R)$  ماتریس رابطه  $R$  باشد، در این صورت

(آ)  $R$  انعکاسی است اگر و فقط اگر  $I_n \leq M$

(ب)  $R$  متقارن است اگر و فقط اگر  $M = M^{tr}$

(پ)  $R$  متعدی است اگر و فقط اگر  $M.M = M^2 \leq M$

(ت)  $R$  پاد متقارن است اگر و فقط اگر  $M \cap M^{tr} \leq I_n$  (اشتراک با  $\min$  تعریف

می شود  $0 \cap 0 = 0 \cap 1 = 1 \cap 0 = 0, 1 \cap 1 = 1$ )

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

اثبات (پ) از قضیه ۲-۷. فرض کنیم  $M^2 \leq M$ . اگر  $(x,y), (y,z) \in R$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \dots 1_{xy} \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots 1_{yz} \dots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots 1_{xz} \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \leq M$$

بنابراین  $(x,z) \in R$ . برعکس اگر  $R$  متعدی بوده و  $M$  ماتریس رابطه ای باشد،  $s_{xz}$  را در سطر  $(x)$  و ستون  $(z)$  از  $M^2$  با  $s_{xz}=1$  در نظر می گیریم. بازاء  $s_{xz}$  مساوی ۱ در  $M^2$  باید حداقل یک  $y \in A$  باشد که در  $M$ ،  $m_{xy}=m_{yz}=1$ . این فقط وقتی رخ می دهد که  $xRy$  و  $yRz$ . پس از متعدی بودن  $R$  نتیجه می شود که  $xRz$ . بنابراین  $M^2 \leq M$



## رابطه ها: برخورد دوم

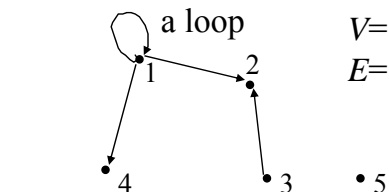
۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۱۴-۷. گرافهای جهت دار  $G=(V, E)$

مثال ۲۵-۷.

$$V=\{1,2,3,4,5\}$$

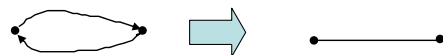
$$E=\{(1,1), (1,2), (1,4), (3,2)\}$$



۱ مجاور به رأس ۲ است. (رأس تنها (isolated))

۲ مجاور از رأس ۱ است.

گراف بدون جهت: لبه ها جهت ندارند.

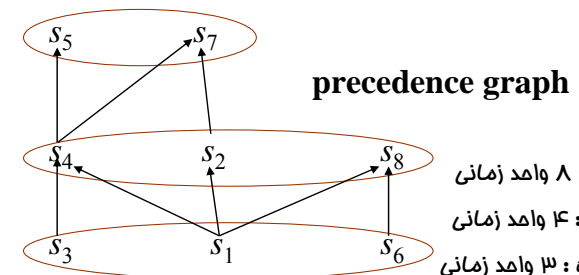


## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۲۶-۷. با توجه به برنامه زیر یک گراف جهت دار  $G=(V,E)$  ایجاد کنید که در آن  $V=\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$  و  $E$  در  $(s_i, s_j)$  می باشد اگر  $s_i$  باید قبل از  $s_j$  انجام شود.

$(s_1) b := 2;$   
 $(s_2) c := b+2;$   
 $(s_3) a := 1;$   
 $(s_4) d := a*b+5;$   
 $(s_5) e := d-1;$   
 $(s_6) f := 7;$   
 $(s_7) e := c+d;$   
 $(s_8) g := b*f;$



۱ پردازنده: ۸ واحد زمانی

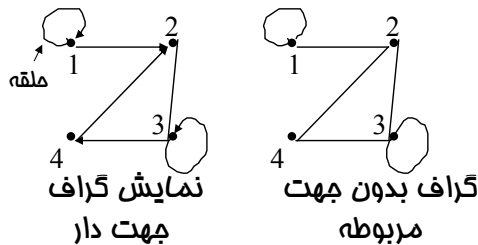
۲ پردازنده: ۴ واحد زمانی

۳ پردازنده: ۳ واحد زمانی

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار  
مثال ۲۷-۷.

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2)\}$$



گراف همبند/متصل: بین هر دو رأس یک مسیر وجود دارد.  
مسیر: رأس تکراری مجاز نمی باشد.  
دور (چرخه): یک مسیر بسته (رأس شروع و پایان یکسان هستند).

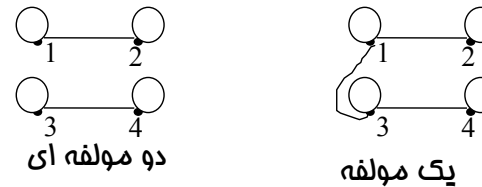
تعریف ۱۵-۷. گراف همبند قوی: بین هر دو رأس یک مسیر جهت دار وجود دارد.  
گراف بالا همبند قوی نمی باشد (مسیر جهت داری از ۳ به ۱ وجود ندارد).

N. Razavi - DM course - 2006

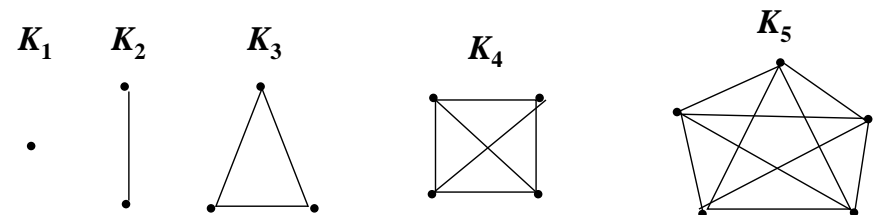
21

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار  
مثال ۲۸-۷. مولفه ها



مثال ۲۹-۷. گراف کامل (تام): بین هر دو رأس یک یال وجود دارد.

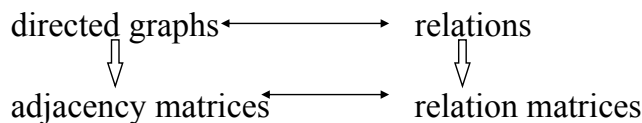


N. Razavi - DM course - 2006

22

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار



مثال ۳۰-۷. اگر  $R$  یک رابطه روی مجموعه متناهی  $A$  باشد،  $R$  انعکاسی است اگر و فقط اگر گراف جهت دار آن در هر رأس شامل حلقه باشد.

مثال ۳۱-۷. اگر  $R$  یک رابطه روی مجموعه متناهی  $A$  باشد،  $R$  متقارن است اگر و فقط اگر گراف جهت دار آن فقط شامل حلقه ها و یال های بدون جهت باشد.

مثال ۳۱-۷. اگر  $R$  یک رابطه روی مجموعه متناهی  $A$  باشد،  $R$  متعدی است اگر و فقط اگر در گراف جهت دار آن مسیری از  $x$  به  $y$  باشد، یال  $(x, y)$  نیز موجود باشد.

مثال ۳۱-۷. اگر  $R$  یک رابطه روی مجموعه متناهی  $A$  باشد،  $R$  پاد متقارن است اگر و فقط اگر در گراف جهت دار غیر از حلقه ها یال بدون جهتی وجود نداشته باشد.

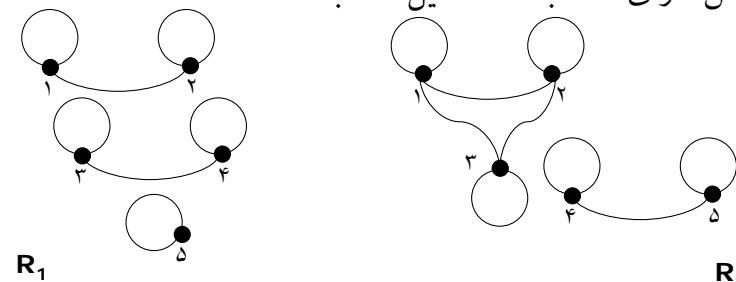
N. Razavi - DM course - 2006

23

## رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۳۳-۷. یک رابطه بر یک مجموعه متناهی  $A$  هم ارزی می باشد اگر و فقط اگر گراف بدون جهت مربوطه اش یک گراف کامل باشد که در هر رأس شامل حلقه باشد، یا از اجتماع از هم جدایی از گراف های کامل که در هر رأس دارای حلقه باشند تشکیل شده باشد.



N. Razavi - DM course - 2006

24

## رابطه ها: برخورد دوم

natural counting: N

$x+5=2$  : Z

$2x+3=4$  : Q

$x^2-2=0$  : R

$x^2+1=0$  : C

توان بیشتر در حل معادلات هند مسئله

۳-۷. ترتیب های جرئی: نمودارهای هاسه

ضمن عبور از R به C چیزی را از دست می دهیم :  
توانایی "مرتب سازی" عناصر در C.

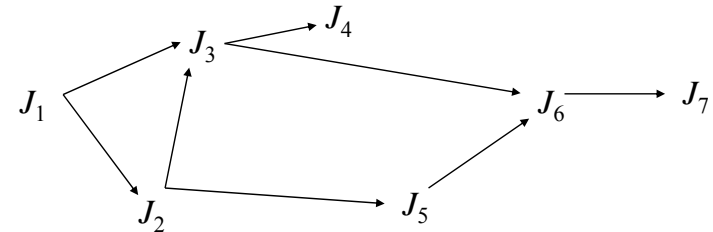
فرض کنیم R یک رابطه بر A باشد. زوج (A, R) را یک مجموعه جزئی مرتب (poset) می نامیم اگر رابطه R بر A یک رابطه ترتیب جزئی (تعریف ۶-۷) باشد.

مثال ۷-۳۴. فرض کنیم A مجموعه دروس ارائه شده در یک دانشکده باشد. رابطه R را بر A بوسیله  $xRy$  تعریف می کنیم اگر x و y درس یکسانی باشند و یا x پیش نیاز y باشد. در این صورت R مجموعه A را به یک مجموعه مرتب جزئی تبدیل می کند.

## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جرئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-۳۶. شبکه PERT (Performance Evaluation and Review Technique)



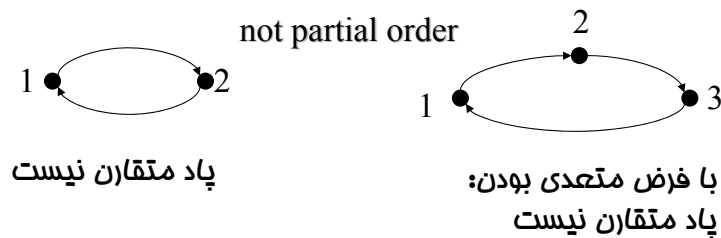
CPM:

زودترین زمان شروع و دیرترین زمان شروع هر کار محاسبه می شود  
کارهایی که زودترین زمان شروع و دیرترین زمان شروعشان برابر است بحرانی هستند.  
تمام کارهای بحرانی مسیر بحرانی را تشکیل می دهند.



## رابطه ها: برخورد دوم

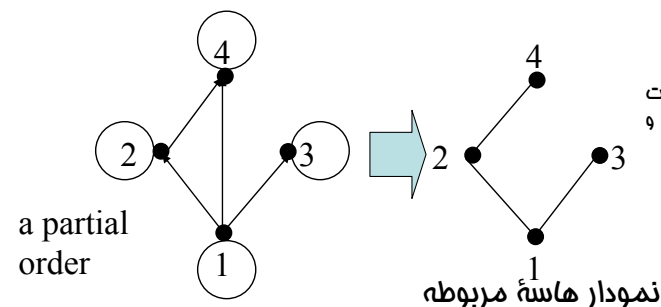
۳-۷. ترتیب های جرئی: نمودارهای هاسه



## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جرئی: نمودارهای هاسه

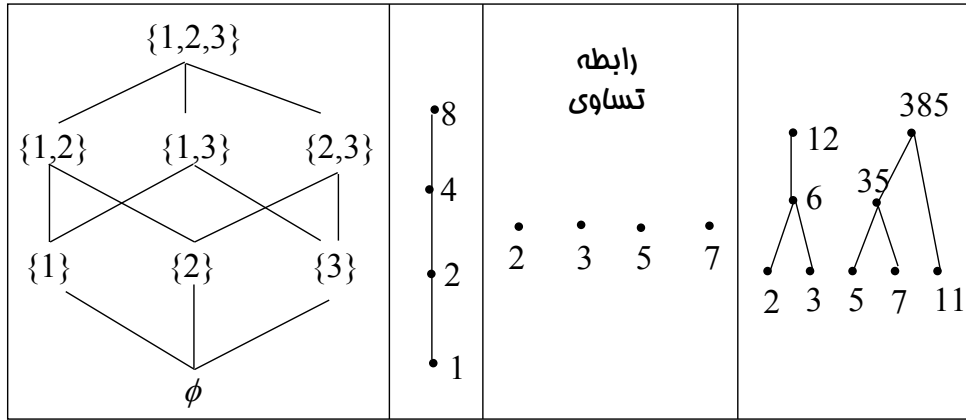
مثال ۷-۳۷.



از پایین به بالا خوانده می شود. اتصالات مربوط به خواص انعکاسی (مقله ها) و متعدی بودن نمایش داده نمی شوند.

## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه  
مثال ۷-۳۸.



رابطه زیر مجموعه بودن

رابطه عاد کردن

رابطه عاد کردن

N. Razavi - DM course - 2006

29

## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

تعریف ۷-۱۶. اگر  $(A, R)$  یک مجموعه مرتب جزئی باشد، گوئیم  $A$  ترتیب تام است اگر بازاء هر  $x, y \in A$  داشته باشیم  $xRy$  یا  $yRx$ . در این صورت  $R$  یک رابطه ترتیب تام می باشد.

برای مثال  $\leq$  و  $\geq$  برای  $N, Z, Q$  و  $R$  ترتیب تام هستند ولی برای  $C$  ترتیب جزئی هستند.

مثال. در اسلاید قبل فقط رابطه عاد کردن برای  $A = \{1, 2, 4, 8\}$  ترتیب تام است.

سوال: آیا می توان عناصر یک مجموعه مرتب جزئی را به طریقی لیست نمود.

مرتب سازی برای یک مجموعه ترتیب تام

N. Razavi - DM course - 2006

30

TXT.ir

## رابطه ها: برخورد دوم

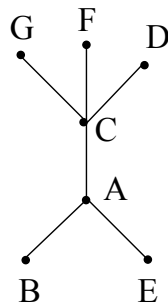
۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مرتب سازی توپولوژیکی یک مجموعه مرتب جزئی

چگونه فعالیتها را یک به یک اجرا کنیم به طوریکه

ترتیب جزئی نقض نشود؟

برای مثال: BEACGFD, ÉBACFGD



نمودار هاسه  
برای تعدادی  
فعالیت

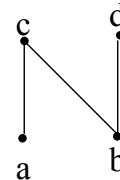
N. Razavi - DM course - 2006

31

## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

دنباله مرتب سازی توپولوژیکی (تعمیم خطی)



$a^b c^d$ : 2 jumps

$a^b d^c$ : 2 jumps

$b^a c^d$ : 2 jumps

$b^a d^c$ : 3 jumps

$bd^a c$ : 1 jumps

یافتن یک تعمیم فنی  
با مداخل پرشهای ممکن  
NP-Complete

N. Razavi - DM course - 2006

32

## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

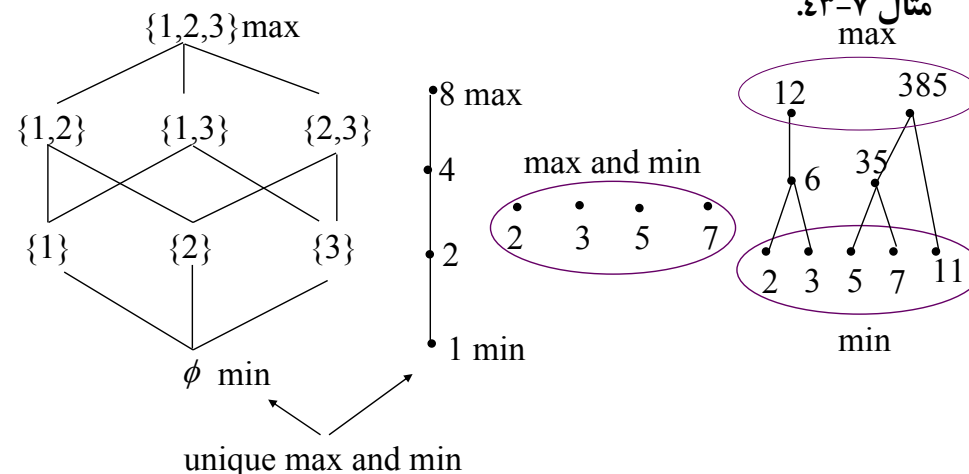
**تعریف ۱۷-۷.** اگر  $(A, R)$  یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه عنصر  $x \in A$  را یک **عنصر ماکزیمال**  $A$  نامیم اگر بازاء هر  $a \in A$ ،  $a \neq x \Rightarrow xRa$  (به غیر از خودش با هیچ عنصری در رابطه نباشد). عنصر  $y \in A$  یک **عنصر مینیمال**  $A$  است اگر بازاء هر  $b \in A$  و  $b \neq y$ ،  $bRy$  (هیچ عنصری غیر از خودش با آن رابطه نداشته باشد).

**مثال ۲۲-۷.**  $(Z, \leq)$  یک مجموعه مرتب جزئی بدون عنصر ماکزیمال و مینیمال است. و  $(N, \leq)$  یک مجموعه مرتب جزئی با عنصر مینیمال صفر و بدون عنصر ماکزیمال است.

## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

**مثال ۳-۷.**  
max



## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

**قضیه ۳-۷.** هرگاه  $(A, R)$  یک مجموعه مرتب جزئی بوده و  $A$  متناهی باشد، آنگاه  $A$  هم عنصر ماکزیمال و هم عنصر مینیمال دارد. (اثبات؟)

در الگوریتم مرتب سازی توپولوژیکی هر بار یک عنصر ماکزیمال و یا هر بار یک عنصر مینیمال می یابیم.

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

**تعریف ۱۸-۷.** هرگاه  $(A, R)$  یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه عنصر  $x \in A$  را **کوچکترین** عنصر می نامیم اگر بازاء هر  $a \in A$ ،  $xRa$ . عنصر  $y \in A$  را **بزرگترین** عنصر می گوئیم اگر بازاء هر  $a \in A$ ،  $aRy$ .

**مثال ۴۴-۷.** فرض کنیم  $U = \{1, 2, 3\}$  و  $R$  رابطه زیرمجموعه باشد.

(آ) بازاء  $A = P(U)$ ، مجموعه مرتب جزئی  $(A, R)$  مجموعه  $\emptyset$  را به عنوان کوچکترین عنصر و مجموعه  $U$  را به عنوان بزرگترین عنصر دارد.

(ب) فرض کنیم  $B$  مجموعه تمام زیرمجموعه های غیر تهی  $U$  باشد. مجموعه مرتب جزئی  $(B, \subseteq)$  دارای بزرگترین عنصر  $U$  می باشد. در اینجا کوچکترین عنصر نداریم ولی سه عنصر مینیمال خواهیم داشت.

(پ) فرض کنیم  $C$  مجموعه تمام زیرمجموعه های سره  $U$  باشد. در این صورت مجموعه مرتب جزئی  $(C, \subseteq)$  دارای مجموعه تهی به عنوان کوچکترین عنصر می باشد و بزرگترین عنصر وجود ندارد، اما سه عنصر ماکزیمال خواهیم داشت.

## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

**قضیه ۷-۴.** هرگاه مجموعه جزئی مرتب  $(A, R)$  دارای بزرگترین (کوچکترین) عنصر باشد، این عنصر منحصر به فرد است.

اثبات. فرض کنیم  $x, y \in A$  و هر دو بزرگترین عنصر باشند. در این صورت  $(x, y)$  و  $(y, x)$  هر دو در  $R$  هستند و چون  $R$  پادمتقارن است  $x = y$ . اثبات در مورد کوچکترین عنصر به همین شکل می باشد.

**تعریف ۷-۱۹.** فرض کنیم  $(A, R)$  یک مجموعه جزئی مرتب باشد به طوری که  $B \subseteq A$ . عنصر  $x \in A$  را **کران پایینی**  $B$  می گوئیم اگر بازاء هر  $b \in B$ ،  $xRb$ ، به همین نحو عنصر  $y \in A$  را **کران بالایی**  $B$  گوئیم اگر بازاء هر  $b \in B$ ،  $bRy$ .

عنصر  $x' \in A$  را **بزرگترین کران پایینی**  $B$  (glb) گوئیم اگر کران پایینی  $B$  بوده و بازاء هر کران پایینی دیگر  $B$  مانند  $x''$  داشته باشیم  $x'R x''$ .

به همین نحو، عنصر  $y' \in A$  را **کوچکترین کران بالایی**  $B$  (lub) گوئیم اگر کران بالایی  $B$  بوده و بازاء هر کران بالایی دیگر  $B$  مانند  $y''$  داشته باشیم  $y'R y''$ .



## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

**قضیه ۷-۵.** هرگاه  $(A, R)$  یک مجموعه جزئی مرتب بوده و  $B \subseteq A$ ، آنگاه  $B$  حداکثر یک glb (lub) دارد.

**تعریف ۷-۲۰.** مجموعه جزئی مرتب  $(A, R)$  را یک **شبکه** (lattice) نامیم اگر بازاء هر  $x, y \in A$ ، عناصر  $\text{lub}\{x, y\}$  و  $\text{glb}\{x, y\}$  هر دو در  $A$  موجود باشند.

**مثال ۷-۴۸.** بازاء  $A = \mathbb{N}$  و  $xRy$ ،  $x, y \in \mathbb{N}$  را با  $x \leq y$  تعریف می کنیم. در این صورت  $\text{lub}\{x, y\} = \max\{x, y\}$  و  $\text{glb}\{x, y\} = \min\{x, y\}$  و بنابراین  $(\mathbb{N}, \leq)$  یک شبکه می باشد.

**مثال ۷-۴۹.** بازاء مجموعه جزئی مرتب مثال ۷-۴۴ (آ)، هرگاه  $S, T \subseteq U$  و  $\text{lub}\{S, T\} = S \cup T$  و  $\text{glb}\{S, T\} = S \cap T$ ، آنگاه  $(P(U), \subseteq)$  یک شبکه است.

## رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

**مثال ۷-۴۶.** فرض کنیم  $U = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $A = P(U)$  و  $R$  رابطه زیر مجموعه بر  $A$  باشد. هرگاه  $B = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  باشد، آنگاه  $\{1, 2, 3, 4\}$ ،  $\{1, 2, 3\}$ ،  $\{1, 2\}$  و  $\{1, 2, 3, 4\}$  همه کرانهای بالایی  $B$  می باشند ولی  $\{1, 2\}$  کوچکترین کران بالایی است. در حالی که بزرگترین کران پایینی  $B$  مساوی  $\emptyset$  است که در  $B$  نیست.

**مثال ۷-۴۷.** فرض کنیم  $R$  رابطه "کوچکتر یا مساوی" در مجموعه جزئی مرتب  $(A, R)$  باشد. (آ) هرگاه  $A = \mathbb{R}$  (real numbers) و  $B = [0, 1]$ ، آنگاه  $B$  دارای glb مساوی صفر و lub برابر یک است. توجه کنید که  $0, 1 \in B$ ، بازاء  $C = (0, 1]$ ،  $C$  دارای glb برابر صفر و lub برابر ۱ می باشد، و  $1 \in C$  اما صفر متعلق به  $C$  نمی باشد.

(ب) اگر  $A = \mathbb{R}$  و  $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$ ، در این صورت  $B$  دارای lub مساوی  $\sqrt{2}$  و glb برابر  $\sqrt{2}$  - است. و هیچ یک از این اعداد حقیقی در  $B$  نیستند.

(پ) حال فرض می کنیم که  $A = Q$  و  $B$  همانند قسمت (ب) باشد. در اینجا  $B$  نه glb دارد و نه lub.

۴-۷. روابط هم ارزی و افزازها

**تعریف ۷-۲۱.** مجموعه  $A$  و مجموعه اندیس گذار  $I$  داده شده اند. همچنین بازاء هر  $A_i \subseteq A$ ،  $i \in I$ ،  $A_i \neq \emptyset$ ، در این صورت  $\{A_i\}_{i \in I}$  یک **افراز**  $A$  است اگر  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  و  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ،  $i \neq j$ .

(ب) بازاء هر  $I_j \in I$  که  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ،  $i \neq j$ .

هر زیر مجموعه  $A_i$  را یک **بلوک** یا **بلوک** افزاز می نامیم.

**مثال ۷-۵۱.** اگر  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ، آنگاه هر مورد زیر یک افزاز  $A$  می باشد:

(آ)  $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ،  $A_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

(ب)  $A_1 = \{1, 2, 3\}$ ،  $A_2 = \{4, 6, 7, 9\}$ ،  $A_3 = \{5, 8, 10\}$

(پ)  $A_i = \{i, i+5\}$ ،  $1 \leq i \leq 5$

## رابطه ها: برخورد دوم

۴-۷. روابط هم ارزی و افراز ها

**تعریف ۲۲-۷.** فرض کنیم  $R$  یک رابطه هم ارزی بر مجموعه  $A$  باشد. بازاء هر  $x \in A$ ، **رده هم ارزی** (کلاس هم ارزی)  $x$  با  $[x]$  نشان داده شده و بوسیله  $[x] = \{y \in A \mid yRx\}$  تعریف می شود.

**مثال ۵۳-۷.** رابطه  $R$  را بر  $Z$  با  $xRy$  اگر  $4 \mid (x-y)$  تعریف می کنیم. برای این رابطه هم ارزی داریم:

$$[0] = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\} = \{4k \mid k \in Z\}$$

$$[1] = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\} = \{4k+1 \mid k \in Z\}$$

$$[2] = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\} = \{4k+2 \mid k \in Z\}$$

$$[3] = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\} = \{4k+3 \mid k \in Z\},$$

$\{[0], [1], [2], [3]\}$  یک افراز  $Z$  می باشد.



## رابطه ها: برخورد دوم

۴-۷. روابط هم ارزی و افراز ها

**مثال ۵۸-۷.** اگر رابطه هم ارزی  $R$  بر  $A = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$  افراز  $A = \{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5, 7\}$  و  $U\{6\}$  را ایجاد کند،  $R$  چیست؟

$$R = (\{1, 2\} * \{1, 2\}) \cup (\{3\} * \{3\}) \cup (\{4, 5, 7\} * \{4, 5, 7\}) \cup (\{6\} * \{6\}),$$

$$|R| = 2^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 = 15.$$

**قضیه ۷-۷.** هر گاه  $A$  یک مجموعه باشد، آنگاه

(آ) هر رابطه هم ارزی مانند  $R$  بر  $A$  یک افراز بر  $A$  را ایجاد می کند، و

(ب) هر افراز  $A$  یک رابطه هم ارزی مانند  $R$  بر  $A$  را به دست می دهد.

**قضیه ۸-۷.** بازاء هر مجموعه  $A$  یک تناظر یک به یک بین مجموعه روابط هم ارزی بر  $A$  و مجموعه افرازهای  $A$  وجود دارد.

## رابطه ها: برخورد دوم

۴-۷. روابط هم ارزی و افراز ها

**مثال ۵۴-۷.** فرض کنیم برای هر  $aRb$ ،  $a, b \in Z$  اگر  $a^2 = b^2$ . بنابراین  $R$  یک رابطه هم ارزی می باشد (چرا؟). راجع به افراز نظیر  $Z$  چه می توان گفت؟

به طور کلی بازاء هر  $n \in Z^+$ ،  $[n] = [-n] = \{n, -n\}$  و بنابراین:

$$Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} [n].$$

**قضیه ۶-۷.** هر گاه  $R$  یک رابطه هم ارزی بر مجموعه  $A$  بوده و  $x, y \in A$ ، آنگاه

$$(آ) \quad x \in [x]$$

(ب)  $xRy$  اگر و فقط اگر  $[x] = [y]$ ؛ و

(پ)  $[x] \cap [y] = \emptyset$  یا  $[x] = [y]$ .

## رابطه ها: برخورد دوم

۴-۷. روابط هم ارزی و افراز ها

**مثال ۵۹-۷.** (آ) اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، چند رابطه بر  $A$  هم ارزی اند.

تناظر یک به یک میان روابط هم ارزی و افرازها

$$\therefore \sum_{i=1}^6 S(6, i) = 203$$

چند رابطه هم ارزی در  $1, 2 \in [4]$  صدق می کنند.

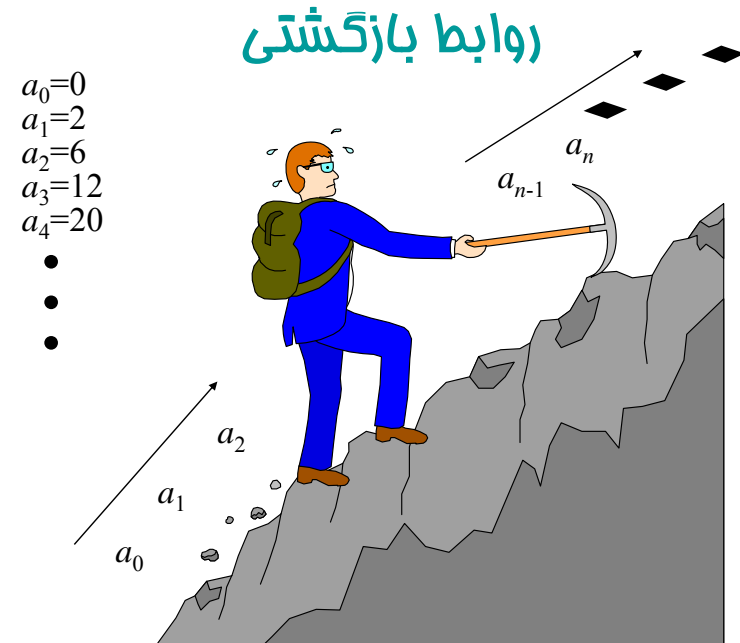
او ۲ و ۴ در یک افراز هستند و

$$\therefore \sum_{i=1}^4 S(4, i) = 15.$$

## فصل دهم

### روابط بازگشتی

سید ناصر رضوی  
Email: [razavi@comp.iust.ac.ir](mailto:razavi@comp.iust.ac.ir)  
۱۳۸۵



N. Razavi - DM course - 2006

2



## روابط بازگشتی

- ۱-۱۰ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول  
تصادد هندسی

اگر  $a_0, a_1, a_2$  و ... یک تصاعد هندسی باشد، آنگاه:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = r$$

به عنوان مثال  $a_{n+1} = 3a_n$  و  $a_n \geq 0$  یک رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول می باشد.

تصادد ریاضی  $a_{n+1} = a_n + 3$  غیر همگن می باشد.

## روابط بازگشتی

- ۱-۱۰ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول  
دنباله های بسیاری وجود دارند که در  $a_{n+1} = 3a_n$  صدق می کنند. مثلاً ۵، ۱۵، ۴۵، ۱۳۵ و ... یا ۷، ۲۱، ۶۳، ۱۸۹ و ...  
برای تعیین یک دنباله مشخص باید یکی از جملات دنباله را بدانیم. (شرط مرزی، شرط اولیه)

$$a_{n+1} = 3a_n, n \geq 0, a_0 = 5$$

بیانگر دنباله ۵، ۱۵، ۴۵، ... می باشد.

راه حل عمومی رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = da_n$  و  $a_0 = A$  منحصر بفرد و به صورت زیر می باشد:

$$a_n = Ad^n, n \geq 0$$

## روابط بازگشتی

- ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول  
مثال ۱۰ - ۲. یک بانک ۶ درصد سود سالانه به صورت ماهیانه پرداخت می کند. اگر شخصی در روز اول ماه می ۱۰۰۰ دلار پس انداز کند، اندوخته این شخص پس از یک سال چه مقدار خواهد بود؟  
اگر  $p_n$  میزان اندوخته در پایان ماه  $n$  ام باشد، آنگاه:  
 $p_{n+1} = p_n + (6\%/12)p_n = 1.005p_n$  و  $p_0 = 1000$   
بنابراین  $p_{12} = \$1000(1.005)^{12} = \$1061.68$

یک رابطه بازگشتی غیر خطی

- مثال ۱۰ - ۳. محاسبه مقدار  $a_{12}$  به شرطی که  $a_0 = 2$  و  $a_{n+1}^2 = a_n^2$

## روابط بازگشتی

- ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول  
رابطه بازگشتی خطی مرتبه اول غیر همگن  
مثال ۱۰ - ۴. پیچیدگی الگوریتم مرتب سازی حبابی

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= n-1 \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= n-2 \\ a_{n-2} - a_{n-3} &= n-3 \\ &\vdots \\ + \frac{a_2 - a_1}{a_n} &= 1 \end{aligned}$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = (n^2 - n)/2$$



## روابط بازگشتی

- ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول

یافتن الگوی بازگشتی

مثال ۱۰ - ۵

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 & a_1 - a_0 &= 2 \\ a_1 &= 2 & a_2 - a_1 &= 4 \\ a_2 &= 6 & a_3 - a_2 &= 6 \\ a_3 &= 12 & a_4 - a_3 &= 8 \\ a_4 &= 20 & & \\ &\vdots & & \\ &\vdots & & \\ &\vdots & & \\ +) \quad a_n - a_{n-1} &= 2n \\ \hline a_n &= n^2 + n \end{aligned}$$

## روابط بازگشتی

- ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول

ضرایب غیر ثابت

مثال ۱۰ - ۶

$$\begin{aligned} a_n &= n \cdot a_{n-1}, n \geq 1, \\ a_0 &= 1. \end{aligned}$$

## روابط بازگشتی

- ۱۰ - ۲. رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت شکل کلی:

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0$$

با قرار دادن  $a_n = cr^n$  در رابطه فوق داریم (C و r هر دو مخالف صفر):

$$C_n cr^n + C_{n-1} cr^{n-1} + C_{n-2} cr^{n-2} = 0$$

$$C_n r^2 + C_{n-1} r + C_{n-2} = 0$$

معادله فوق را معادله مشخصه رابطه بازگشتی می گوئیم.

سه حالت برای ریشه های معادله مشخصه:

$$(r_1, r_2): a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

(۱) اعداد حقیقی متمایز

$$(r_1, r_2): a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

(۲) اعداد مختلط مزدوج

$$(r_1, r_1): a_n = (c_1 + c_2 n) r_1^n$$

(۳) ریشه مضاعف

## روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۸.

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} = 6a_{n-2}, n \geq 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \Rightarrow a_n = c_1 2^n + c_2 (-3)^n$$

$$\begin{cases} a_0 = c_1 2^0 + c_2 (-3)^0 = 1 \\ a_1 = c_1 2^1 + c_2 (-3)^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - 3c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_n = 2^n$$



## روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۹.

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0 \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

$$r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow F_n = c_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

## روابط بازگشتی

مثال ۱۰ - ۱۰. به ازای  $n \geq 0$  داریم  $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$  اگر  $a_n$  بیانگر تعداد زیرمجموعه های  $S$  باشد به طوری که شامل دو عدد متوالی نباشند، آنگاه  $a_n$  را محاسبه نمایید.

اگر  $A \subseteq S$  و  $a_n$  شمرده شده باشد، در این صورت دو امکان وجود دارد:

(الف)  $n \notin A$ : در این صورت  $(n-1) \notin A$  و  $A - \{n\}$  باید در  $a_{n-2}$  شمرده شده باشد. (به بیان دیگر، به ازای تمام مجموعه های شمرده شده در  $a_{n-2}$  می توانیم  $n$  را به آنها اضافه کنیم و مجموعه حاصل را در  $a_n$  بشمریم)

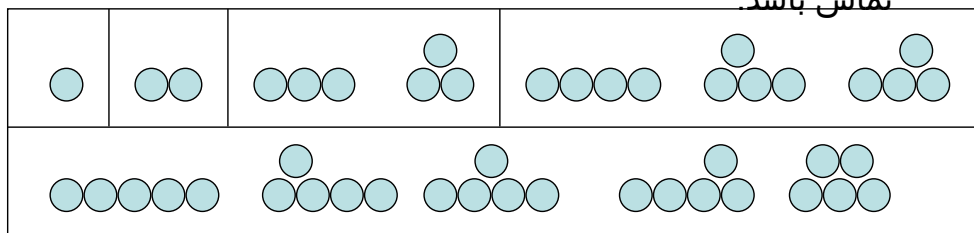
(ب)  $n \in A$ : در این صورت  $a_{n-1}$  نیز شمرده شده است. بنابراین داریم:

که همان سری فیبوناچی می باشد. با توجه به این که  $a_0 = 1$  و  $a_1 = 2$  بنابراین:

## روابط بازگشتی

مراقب باشید که از روی تعداد کمی نمونه خاص (و یا حتی تعداد زیاد) نتیجه گیری نکنید

مثال ۱۰-۱۴. تعدادی سکه را در ردیف هایی قرار دهید به طوری که هر سکه در ردیف بالایی ردیف اول، با دوسکه در سطر زیرین خود در تماس باشد.



$a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, a_6=8, \dots$  Is  $a_n = F_n$ ? **NO**

## روابط بازگشتی

تعمیم به مرتبه های بالاتر

مثال ۱۰-۱۵

$$2a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n, n \geq 0, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$$



## روابط بازگشتی

حالت (ب) ریشه های مختلط

قضیه دموآور

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, n \geq 0.$$

If  $z = x + iy \in \mathbb{C}, z \neq 0$ , then

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\therefore z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

## روابط بازگشتی

حالت (ب) ریشه های مختلط

Ex. 10.17  $a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}), n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 2$ .

The C.E. is  $r^2 - 2r + 2 = 0$  with roots  $1 \pm i$ .

$$\therefore a_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n = c_1 \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n +$$

$$c_2 \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = c_1 (\sqrt{2})^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) +$$

$$c_2 (\sqrt{2})^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) =$$

$$(\sqrt{2})^n \left[ (c_1 + c_2) \cos \frac{n\pi}{4} + i(c_1 - c_2) \sin \frac{n\pi}{4} \right]. \text{ With } a_0 = 1, a_1 = 2,$$

we have  $c_1 + c_2 = 1$  and  $c_1 - c_2 = -i$ . Therefore,

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

## روابط بازگشتی

حالت (ج) ریشه های حقیقی مکرر

مثال ۱۰-۱۹.

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \text{ where } n \geq 0 \text{ and } a_0 = 1, a_1 = 3$$

به طور کلی جواب مرتبط با یک ریشه  $r$  از چندی  $m$  به شکل زیر می باشد:

$$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$$

## روابط بازگشتی

۱۰-۳ روابط بازگشتی غیر همگن

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = f(n)$$

فرض می کنیم که  $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$  که در آن  $a_n^{(h)}$  جواب کلی مرتبط با جواب همگن و  $a_n^{(p)}$  جواب غیر همگن می باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} &C_n (a_n^{(h)} + a_n^{(p)}) + C_{n-1} (a_{n-1}^{(h)} + a_{n-1}^{(p)}) + \\ &C_{n-2} (a_{n-2}^{(h)} + a_{n-2}^{(p)}) = (C_n a_n^{(h)} + C_{n-1} a_{n-1}^{(h)} + C_{n-2} a_{n-2}^{(h)}) + \\ &(C_n a_n^{(p)} + C_{n-1} a_{n-1}^{(p)} + C_{n-2} a_{n-2}^{(p)}) = 0 + f(n) = f(n), \end{aligned}$$



## روابط بازگشتی

$$a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n), \text{ where } n \geq 1 \text{ and } a_0 = 2$$

مثال ۱۰-۲۲.

$$a_n^{(h)} = c(3^n)$$

$$a_n^{(p)} = A(7^n)$$

$$A(7^n) - 3A(7^{n-1}) = 5(7^n), A = \frac{35}{4}$$

$$a_n^{(p)} = \frac{5(7^{n+1})}{4}$$

$$a_n = c(3^n) + \frac{5(7^{n+1})}{4}$$

بنابراین:

$$a_0 = 2, c = -\frac{27}{4}$$

## روابط بازگشتی

• مثال ۱۰-۲۳.

$$a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n), n \geq 1, a_0 = 2$$

$$a_n^{(h)} = c(3^n)$$

$$a_n^{(p)} = Bn3^n$$

$$Bn3^n - 3B(n-1)3^{n-1} = 5(3^n)$$

$$Bn - B(n-1) = 5$$

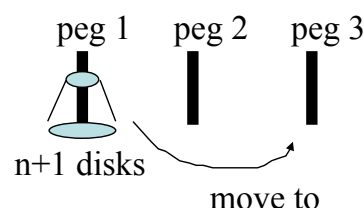
$$B = 5$$

$$a_n = (c + 5n)3^n$$

$$a_0 = 2, c = 2$$

## روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۲۴. برج های هانوی

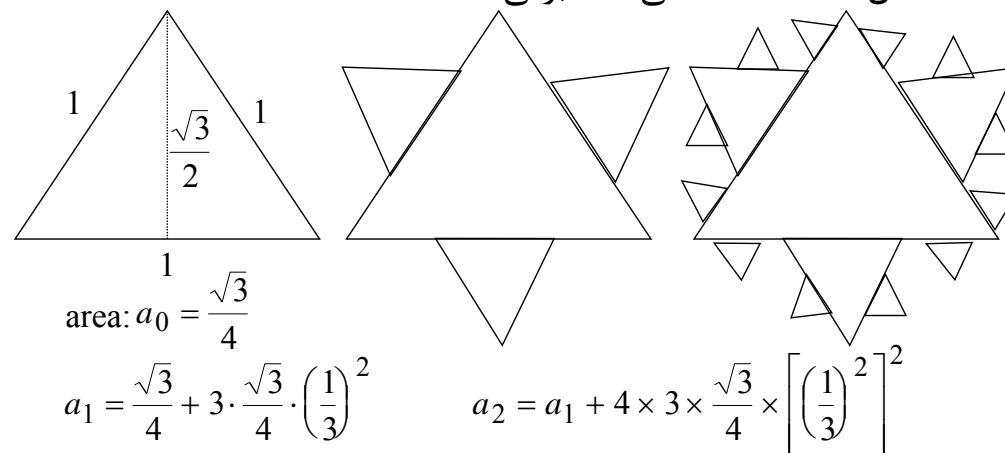


N. Razavi - DM course - 2006

21

## روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۲۷. منحنی دانه برفی



N. Razavi - DM course - 2006

22



## روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۲۷. منحنی دانه برفی

$$a_{n+1} = a_n + \left[ 4^n (3) \right] \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \left( \frac{1}{3^{n+1}} \right)^2 = a_n + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left( \frac{4}{9} \right)^n$$

$$a_n^{(h)} = A(1)^n = A, a_n^{(p)} = B \left( \frac{4}{9} \right)^n$$

$$a_n = \frac{1}{5\sqrt{3}} \left[ 6 - \left( \frac{4}{9} \right)^{n-1} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4}{9} \right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}$$

N. Razavi - DM course - 2006

23

## روابط بازگشتی

 $f(n)$  $c, \text{ a constant}$  $n$  $n^2$  $n^t, t \in \mathbb{Z}^+$  $r^n, r \in \mathbb{R}$  $\sin cn$  $\cos cn$  $n^t r^n$  $r^n \sin cn$  $r^n \cos cn$  $a_n^{(p)}$  $A, \text{ a constant}$  $A_1 n + A_0$  $A_2 n^2 + A_1 n + A_0$  $A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \dots + A_1 n + A_0$  $A r^n$  $A \sin cn + B \cos cn$  $A \sin cn + B \cos cn$  $r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \dots + A_1 n + A_0)$  $r^n (A \sin cn + B \cos cn)$  $r^n (A \sin cn + B \cos cn)$ 

خلاصه

اگر  $f(n)$  شامل  $r^n$  باشد و  $r$  یک ریشه معادله مشخصه با چندی  $k$  باشد، حاصل در  $n^k$  ضرب می شود

N. Razavi - DM course - 2006

24

## روابط بازگشتی

فرض کنید که در یک میهمانی  $n$  نفر حضور دارند و هر نفر دقیقاً یک بار با هریک از افراد دیگر (به جز خودش) دست می دهد. اگر  $a_n$  بیانگر تعداد کل دست دادن ها باشد، بنابراین:

$$a_{n+1} = a_n + n, a_2 = 1$$

$$a_n^{(h)} = c(1)^n = c$$

$$a_n^{(p)} = n(A_1 n + A_0)$$

$$\text{The result is } a_n = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

پس:



## روابط بازگشتی

مثال ۱۰-۳۱

$$a_{n+2} - 10a_{n+1} + 21a_n = f(n), n \geq 0$$

$$a_n^{(h)} = c_1 3^n + c_2 7^n$$

$$f(n)$$

$$5$$

$$3n^2 - 2$$

$$7(11)^n$$

$$31r^n, r \neq 3, 7$$

$$6(3)^n$$

$$2(3)^n - 8(9)^n$$

$$4(3)^n + 3(7)^n$$

$$a_n^{(p)}$$

$$A_0$$

$$A_3 n^2 + A_2 n + A_1$$

$$A_4 11^n$$

$$A_5 r^n$$

$$A_6 n 3^n$$

$$A_7 n 3^n + A_8 9^n$$

$$A_9 n 3^n + A_{10} n 7^n$$

# نظریه گراف

## فصل یازدهم نظریه گراف

سید ناصر رضوی  
e-mail: [razavi@comp.iust.ac.ir](mailto:razavi@comp.iust.ac.ir)  
۱۳۸۵

- کاربردها در علوم کامپیوتری
  - طراحی مدارهای منطقی
  - هوش مصنوعی
  - زبانهای صوری
  - گرافیک کامپیوتری
  - ...

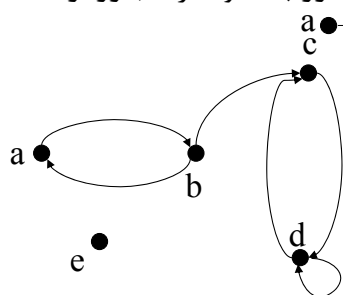


## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱-۱۱. تعاریف و مثالها

**تعریف ۱-۱۱.** فرض کنیم  $V$  یک مجموعه متناهی و غیرتهی بوده و  $E \subseteq V \times V$  زوج  $(V, E)$  را یک **گراف جهت دار** (بر  $V$ ) می نامیم که در آن  $V$  مجموعه رئوس یا **گره ها** بوده و  $E$  مجموعه لبه ها (یال ها) می باشد. برای نمایش چنین گرافی می نویسیم  $G = (V, E)$ .

اگر زوج مرتب  $(a, b)$  متعلق به  $E$  باشد، آنگاه  $a$  را **مجاور به**  $b$  و  $b$  را **مجاور از**  $a$  می نامیم و به شکل این نمایش می دهیم:



مثال: گراف جهت دار

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

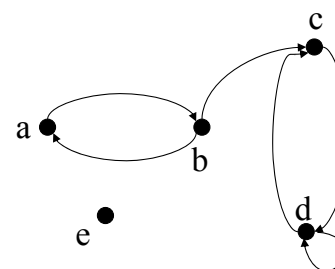
$$E = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$$

$$G = (V, E)$$

## فصل ۱۱. نظریه گراف

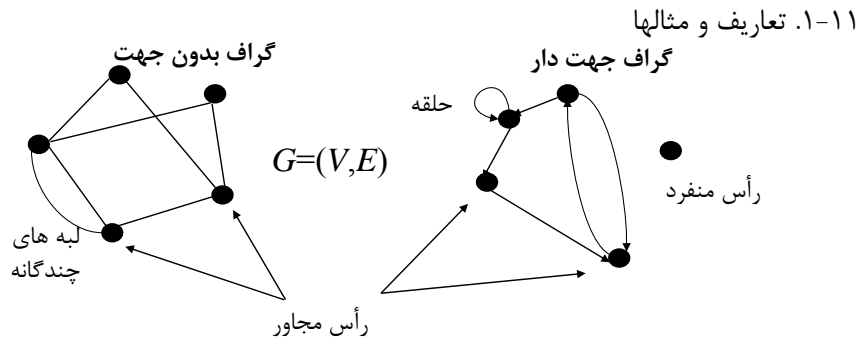
۱-۱۱. تعاریف و مثالها

**حلقه (loop):** هر یالی که از یک رأس به همان رأس ترسیم شود مانند یال  $(d, d)$ .  
**رأس منفرد:** رأسی که از آن یالی نگذرد مانند  $e$ .



**گراف بدون جهت:** اگر  $V$  یک مجموعه متناهی و غیرتهی و  $E$  مجموعه ای باشد که هر عضو آن یک زیرمجموعه دو عضوی از  $V$  باشد، در این صورت زوج  $(V, E)$  را یک **گراف بدون جهت** می نامیم.

## فصل ۱۱. نظریه گراف



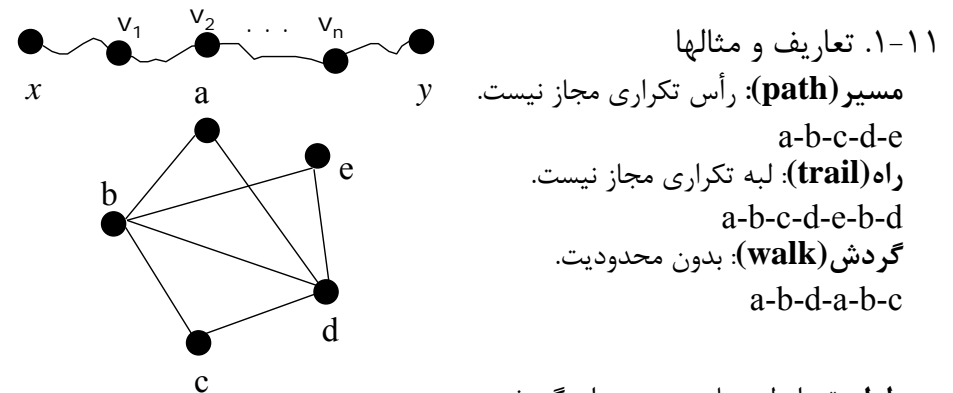
**گراف ساده:** یک گراف بدون جهت و بدون حلقه و بدون لبه های چندگانه  
**درجه یک رأس:** تعداد لبه های متصل به آن رأس (درجه ورودی و خروجی)  
 در گراف ساده:  

$$\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2 |E|$$

N. Razavi - DM course - 2006

5

## فصل ۱۱. نظریه گراف



**طول:** تعداد لبه ها در مسیر، راه، گردش  
**مدار (circuit):** راه بسته  $(x=y)$  - مانند  $a-b-c-d-b-e-d-a$   
**دور (cycle):** مسیر بسته  $(x=y)$  - مانند  $a-b-c-d-a$

N. Razavi - DM course - 2006

6

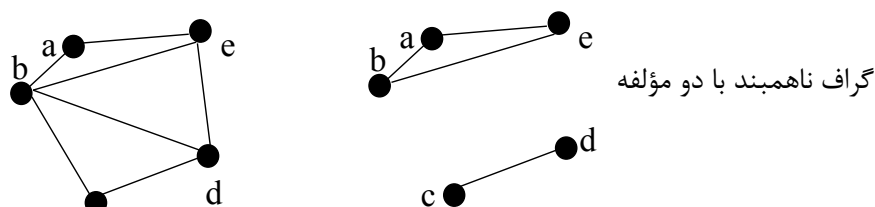
TXT.ir

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱-۱۱. تعاریف و مثالها

**قضیه ۱-۱۱.** فرض کنیم  $G=(V, E)$  یک گراف بدون جهت بوده و  $a, b \in V$  و  $a \neq b$ . هر گاه یک راه از  $a$  به  $b$  موجود باشد، آنگاه یک مسیر از  $a$  به  $b$  وجود خواهد داشت.

با حذف دورها در رأسهای تکراری  
**تعریف ۱-۴.** فرض کنیم  $G=(V, E)$  یک گراف بدون جهت باشد.  $G$  را همبند گوییم اگر بین هر دو رأس متمایز  $G$  یک مسیر وجود داشته باشد.



N. Razavi - DM course - 2006

7

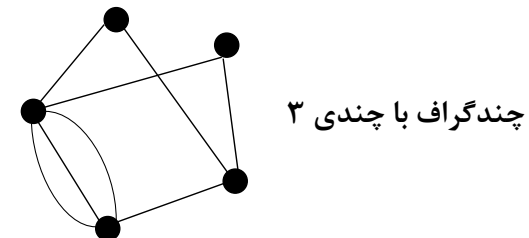
## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱-۱۱. تعاریف و مثالها

**تعریف ۱-۵.** در گراف  $G$  تعداد مؤلفه های  $G$  با  $k(G)$  نشان داده می شود.  

$$1 \leq k(G) \leq |V|$$

تعریف ۱-۶. چند گراف (گراف چندگانه)



N. Razavi - DM course - 2006

8

## فصل ۱۱. نظریه گراف

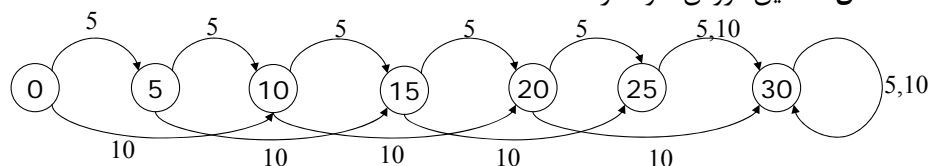
### • گراف وزن دار

“شامل اطلاعات بیشتری علاوه بر رئوس و یالها می باشد.”

**مثال:** در نقشه جاده های یک کشور که به صورت گراف نشان داده است ممکن است به هر یال عددی بیانگر فاصله بین دو شهر منسوب کنیم. یا به هر رأس عددی که بیانگر جمعیت آن شهر می باشد منسوب کنیم.

**مثال:** ممکن است درگرافی که بیانگر نتایج یک دوره مسابقات تنیس است تاریخ و یا امتیاز مسابقه را به هر یال نسبت دهیم.

**مثال:** ماشین فروش خودکار



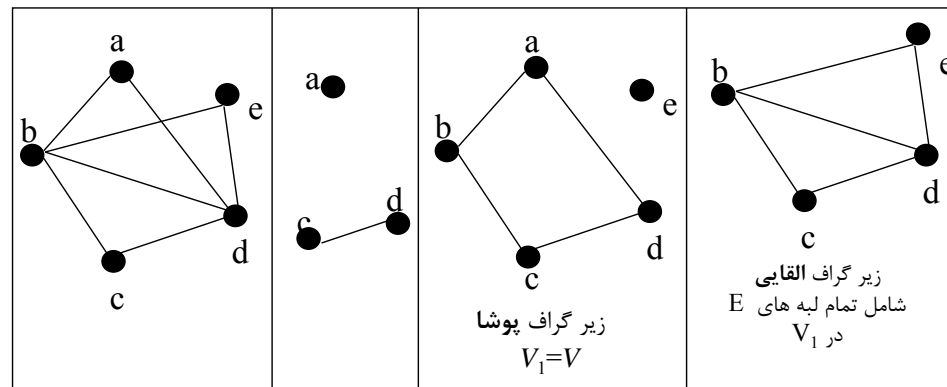
N. Razavi - DM course - 2006

9

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۲-۱۱. زیرگرافها، متمم ها و یکرختی گرافها

**تعریف ۱۱-۷.** هرگاه  $G=(V, E)$  یک گراف باشد، آنگاه گراف  $G_1=(V_1, E_1)$  یک زیرگراف  $G$  نام دارد اگر  $V_1 \subseteq V$  و  $E_1 \subseteq E$  که در آن هر لبه در  $E_1$  تنها با رئوس در  $V_1$  تلاقی داشته باشد.

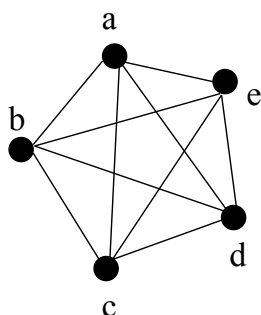


N. Razavi - DM course - 2006

10

TXT.ir

## فصل ۱۱. نظریه گراف

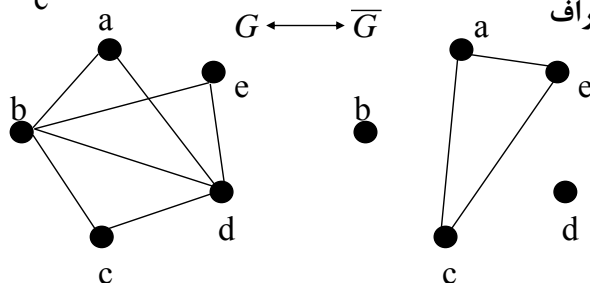


۲-۱۱. زیرگرافها، متمم ها و یکرختی گرافها

**تعریف ۱۱-۱۱. گراف کامل:** یک گراف بدون جهت و بدون حلقه که در آن بین هر دو رأس متمایز یک لبه وجود دارد. ( $K_n$ )

**تعریف ۱۱-۱۲. متمم گراف**

$G \longleftrightarrow \bar{G}$



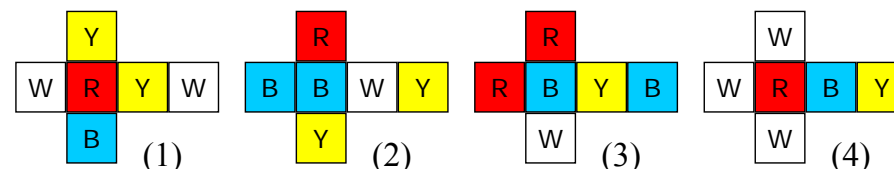
N. Razavi - DM course - 2006

11

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۲-۱۱. زیرگرافها، متمم ها و یکرختی گرافها

**مثال ۷-۱۱. جنون آبی:** چهار مکعب داریم که هر یک از شش وجه آنها با یکی از رنگهای قرمز (R)، سفید (W)، آبی (B) یا زرد (Y)، رنگ شده است. هدف بازی قرار دادن مکعبها در یک ستون چهارتایی است به طوریکه هر چهار رنگ در هر یک از چهار طرف ستون قرار گیرد.



تعداد امکانهای مختلف =  $(3)(24)(24)(24) = 41,472$

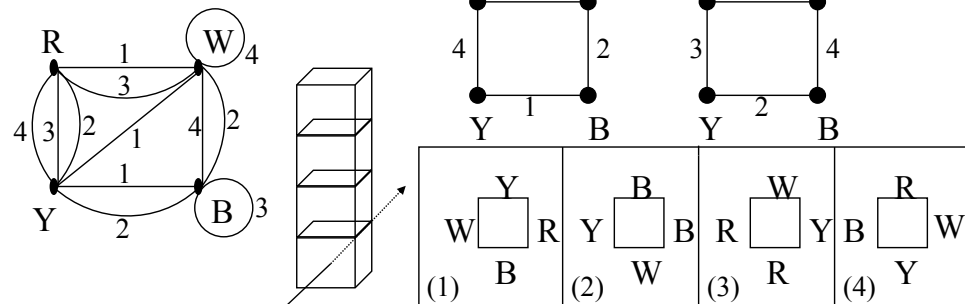
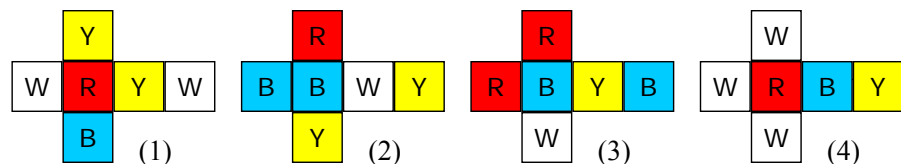
مکعب پایینی

۶ وجه با چهار دوران

N. Razavi - DM course - 2006

12

## فصل ۱۱. نظریه گراف

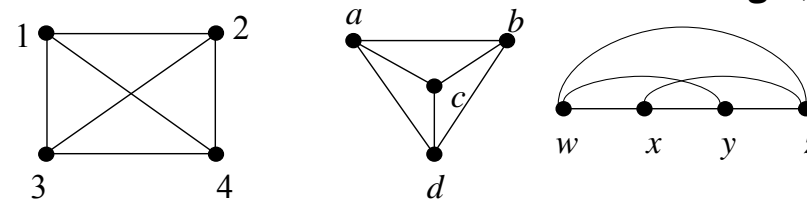


N. Razavi - DM course - 2006

13

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۲-۱۱. زیرگرافها، متمم ها و یکرختی گرافها  
یکرختی



تعریف ۳-۱۱. فرض کنیم  $G_1$  و  $G_2$  دوگراف بدون جهت باشند. تابع  $f: V_1 \rightarrow V_2$  را یک یکرختی گرافها گوئیم اگر (۱)  $f$  یک به یک و پوشا باشد. (ب) بازاء هر  $a, b \in V_1$ ،  $\{a, b\} \in E_1$  اگر و فقط اگر  $\{f(a), f(b)\} \in E_2$  در صورت وجود  $f$  دوگراف  $G_1$  و  $G_2$  را یکرخت گویند.

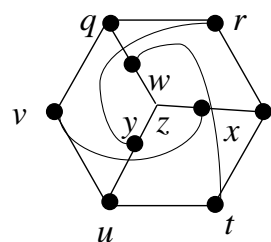
نکته: یکرختی مجاورت ها را حفظ می کند.

N. Razavi - DM course - 2006

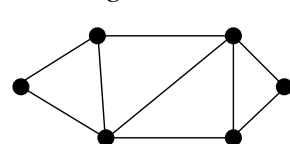
14

TXT.ir

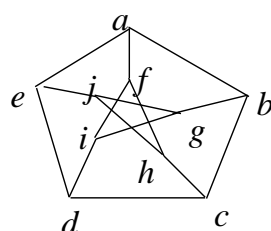
## فصل ۱۱. نظریه گراف



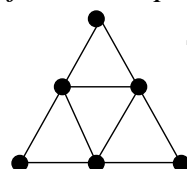
$a-q \ c-u \ e-r \ g-x \ i-z \ b-v \ d-y \ f-w \ h-t \ j-s$ , isomorphic



degree 2 vertices = 2



مثال ۹-۱۱.



degree 2  
vertices=3

آیا می توانید الگوریتمی برای تشخیص یک رختی بیان کنید؟

N. Razavi - DM course - 2006

15

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۳-۱۱. درجه رأسی: راه ها و مدارهای اولیه

رأس با درجه یک: رأس آویزان

قضیه ۲-۱۱. هرگاه  $G=(V, E)$  یک گراف ساده یا یک چندگراف بدون جهت باشد، آنگاه

$$\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2|E|$$

نتیجه ۱-۱۱. در یک گراف ساده یا چندگراف بدون جهت، تعداد رؤس از درجه فرد باید زوج باشد.

مثال ۱۱-۱۱. گراف منظم. یک گراف بی جهت (یا چندگراف) که در آن درجه تمام رؤس یکسان باشد.

آیا ممکن است یک گراف منظم ۴ با ۱۰ لبه داشته باشیم؟

$$4|V|=2|E|=20 \Rightarrow |V|=5$$

با ۱۵ لبه چطور؟

$$4|V|=2|E|=30 \rightarrow \text{غیر ممکن}$$

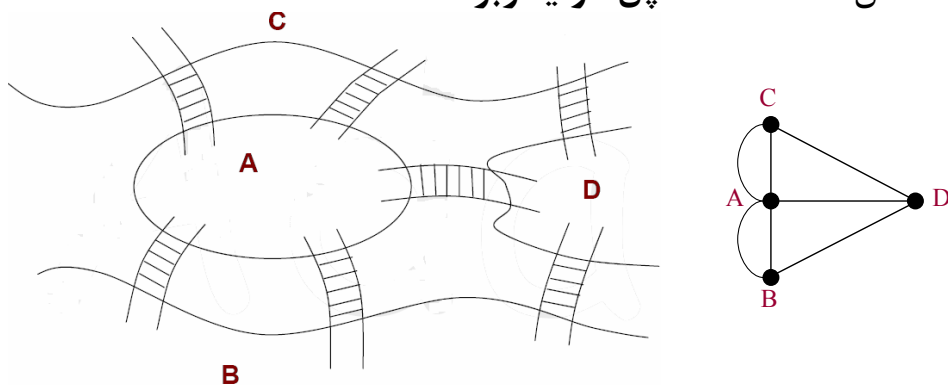
N. Razavi - DM course - 2006

16

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۳-۱۱. درجه رأسی: راه ها و مدارهای اولیه

مثال ۱۱-۲. هفت پل کونیگزبرگ



می خواهیم راهی پیدا کنیم که شهر را دور زده و از هر پل درست یک بار عبور کنیم و سپس به نقطه شروع بازگردیم.

N. Razavi - DM course - 2006

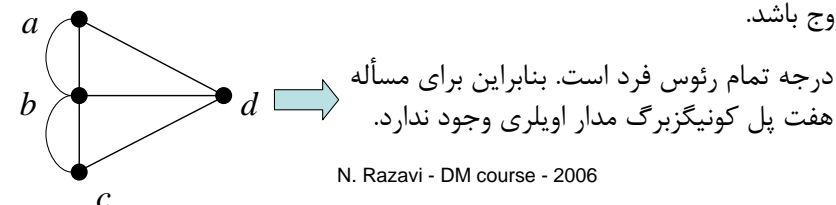
17

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۳-۱۱. درجه رأسی: راه ها و مدارهای اولیه

تعریف ۱۱-۱۵. فرض کنیم  $G=(V,E)$  یک گراف یا چند گراف بدون جهت و بدون رأس منفرد باشد. گوییم  $G$  دارای **مدار اولیه** است اگر مداری در  $G$  باشد که از هر **لبه گراف درست یک بار عبور کند**. اگر یک راه باز از  $a$  به  $b$  در  $G$  موجود باشد که از هر لبه مدار درست یک بار گذر کند، آنرا یک **راه اولیه** گوییم.

قضیه ۱۱-۳. اگر  $G$  یک گراف یا چند گراف بدون جهت و بدون رأس منفرد باشد، آنگاه  $G$  دارای مدار اولیه است اگر و فقط اگر  $G$  همبند بوده و درجه هر رأس در  $G$  زوج باشد.



درجه تمام رئوس فرد است. بنابراین برای مسئله هفت پل کونیگزبرگ مدار اولیه وجود ندارد.

N. Razavi - DM course - 2006

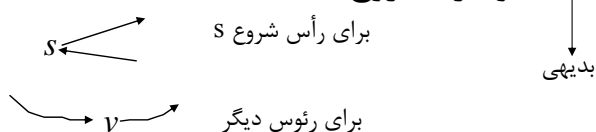
18

TXT.ir

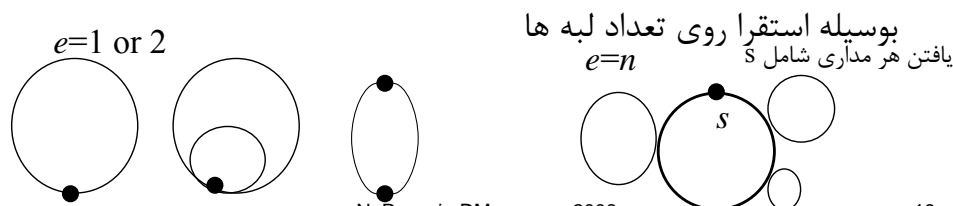
## فصل ۱۱. نظریه گراف

۳-۱۱. درجه رأسی: راه ها و مدارهای اولیه

مدار اولیه ← همبند و درجه زوج



همبند و درجه رئوس زوج ← مدار اولیه



N. Razavi - DM course - 2006

19

## فصل ۱۱. نظریه گراف

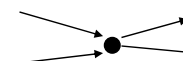
۳-۱۱. درجه رأسی: راه ها و مدارهای اولیه

آیا می توانید الگوریتمی برای ساختن مدار اولیه بیان کنید؟

نتیجه ۱۱-۲. هرگاه  $G$  یک گراف یا چندگراف بدون جهت و بدون رأس منفرد باشد، آنگاه  $G$  دارای راه اولیه است اگر و فقط اگر  $G$  همبند بوده و درست دو رأس از درجه فرد داشته باشد.

$a$  و  $b$ : درجه فرد یک لبه اضافه می کنیم

قضیه ۱۱-۴. هرگاه  $G$  یک گراف یا چندگراف جهت دار و بدون رأس منفرد باشد، آنگاه  $G$  دارای مدار اولیه جهت دار است اگر و فقط اگر  $G$  همبند بوده و برای هر  $v \in V$ ،  $\text{in-degree}(v) = \text{out-degree}(v)$ .



one in, one out

N. Razavi - DM course - 2006

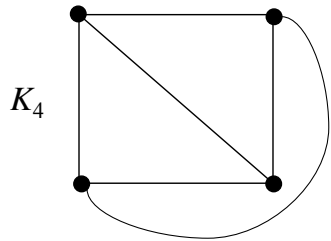
20

## فصل ۱۱. نظریه گراف

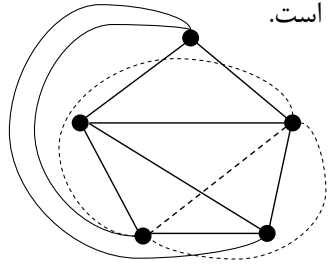
۴-۱۱. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۱۷. گراف (یا چند گراف)  $G$  را **مسطح** نامیم اگر  $G$  را بتوان در یک صفحه طوری رسم نمود که لبه های آن فقط در رئوس  $G$  متقاطع باشند. یک چنین ترسیمی از  $G$ ، **تعبیه**  $G$  در صفحه نام دارد.

مثال ۱۱-۱۵ و ۱۱-۱۶. گرافهای  $K_1$ ،  $K_2$ ،  $K_3$  و  $K_4$  مسطح می باشند،  $K_n$  بازاء  $K > 4$  نامسطح است.



$K_4$



$K_5$

N. Razavi - DM course - 2006

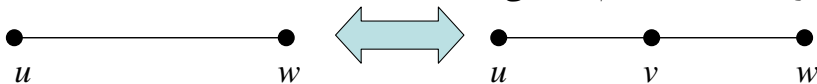
21



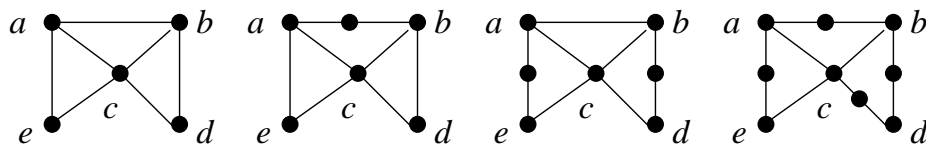
## فصل ۱۱. نظریه گراف

۴-۱۱. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۱۹. تقسیم مقدماتی



گرافهای  $G_1$  و  $G_2$  را همریخت نامیم اگر یکریخت بوده یا بتوان هر دو را از گراف بدون جهت و بدون حلقه  $H$  با دنباله ای از تقسیمات مقدماتی بدست آورد.



دوگراف همریخت همزمان مسطح و یا نامسطح می باشند.

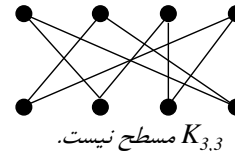
N. Razavi - DM course - 2006

23

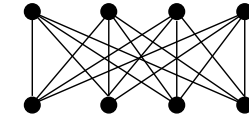
## فصل ۱۱. نظریه گراف

۴-۱۱. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۱۸. گراف دوبخشی و گراف دوبخشی کامل  $(K_{m,n})$



$K_{3,3}$  مسطح نیست.



$K_{4,4}$

بنابراین هر گراف شامل  $K_5$  یا  $K_{3,3}$  مسطح نمی باشد

N. Razavi - DM course - 2006

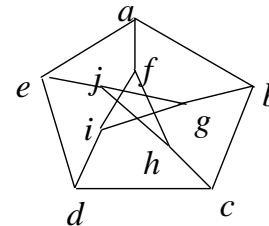
22

## فصل ۱۱. نظریه گراف

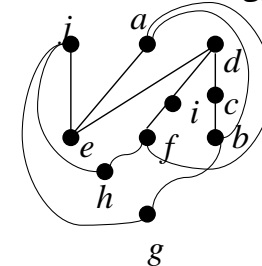
۴-۱۱. گرافهای مسطح

قضیه ۱۱-۵. (قضیه کوارتسکی) یک گراف نامسطح است اگر و فقط شامل زیرگرافی همریخت با  $K_5$  یا  $K_{3,3}$  باشد.

مثال ۱۱-۱۹. گراف پترسون



گراف پترسون مسطح نمی باشد.



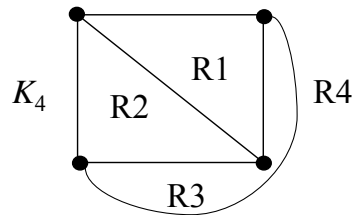
یک زیر گراف همریخت با  $K_{3,3}$

N. Razavi - DM course - 2006

24

## فصل ۱۱. نظریه گراف

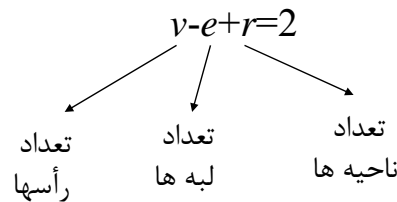
### ۴-۱۱. گرافهای مسطح



یک گراف مسطح صفحه را به نواحی متعددی تقسیم می کند که یکی از این نواحی بینهایت می باشد.

$$v = 4, e = 6, r = 4, v - e + r = 2$$

قضیه ۱۱-۶. در یک گراف (یا چند گراف) مسطح همبند:



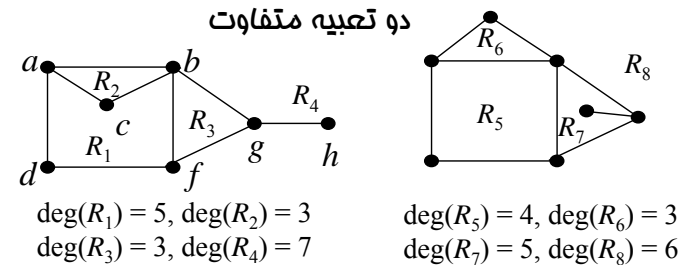
N. Razavi - DM course - 2006

25

## فصل ۱۱. نظریه گراف

### ۴-۱۱. گرافهای مسطح

درجه یک ناحیه ( $\deg(R)$ ): تعداد لبه هایی که در یک (کوتاهترین) گردش بسته حول (اضلاع در) مرز  $R$  پیموده می شود.



$$\sum_{i=1}^4 \deg(R_i) = 18 = \sum_{i=5}^8 \deg(R_i) = 2 \times 9 = 2 |E|$$

N. Razavi - DM course - 2006

26



## فصل ۱۱. نظریه گراف

### ۴-۱۱. گرافهای مسطح

نتیجه ۱۱-۳. فرض کنیم  $G$  یک گراف مسطح همبند و بدون حلقه با  $|V|=v$  و  $|E|=e > 2$  و  $r$  ناحیه باشد. در این صورت  $e \leq 3v-6$  و  $3r \leq 2e$ .

اثبات: چون  $G$  بدون حلقه بوده و چند گراف نیست، مرز هر ناحیه حداقل دارای ۳ لبه می باشد؛ لذا هر ناحیه از درجه بزرگتر یا مساوی ۳ می باشد. و چون مجموع درجات  $r$  ناحیه  $2e$  می باشد بنابراین  $3r \leq 2e$ . از قضیه اوایلر (قضیه ۱۱-۶) داریم:

$$2 = v - e + r \leq v - e + (2/3)e = v - (1/3)e \Rightarrow 6 \leq 3v - e \Rightarrow e \leq 3v - 6$$

این تنها یک شرط لازم است نه کافی!

N. Razavi - DM course - 2006

27

## فصل ۱۱. نظریه گراف

### ۴-۱۱. گرافهای مسطح

مثال ۱۱-۲۰. برای  $k_5$  داریم  $v = 5, e = 10$  و بنابراین  $3v - 6 = 9 < 10$  پس  $K_5$  مسطح نیست.

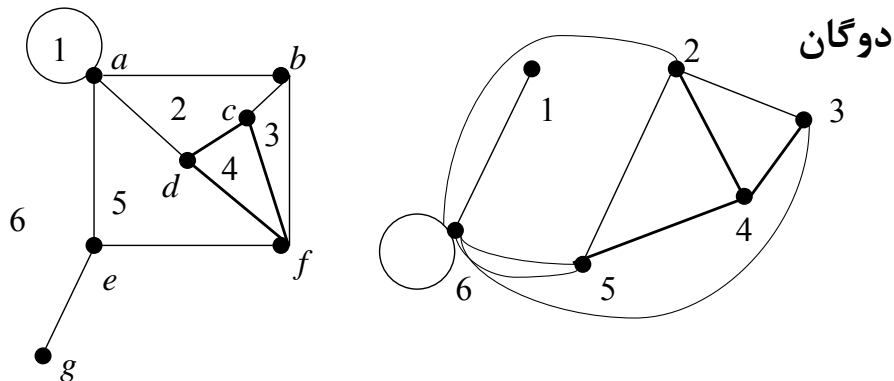
مثال ۱۱-۲۱. برای  $k_{3,3}$ ، هر ناحیه حداقل دارای ۴ لبه می باشد، و لذا  $4r \leq 2e$ . اگر  $k_{3,3}$  مسطح باشد،  $r = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ ، و این یک تناقض است و بنابراین  $k_{3,3}$  مسطح نیست.

N. Razavi - DM course - 2006

28

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۴-۱۱. گرافهای مسطح



یک لبه در  $G$  متناظر با یک لبه در  $G^d$  می باشد و بالعکس.

N. Razavi - DM course - 2006

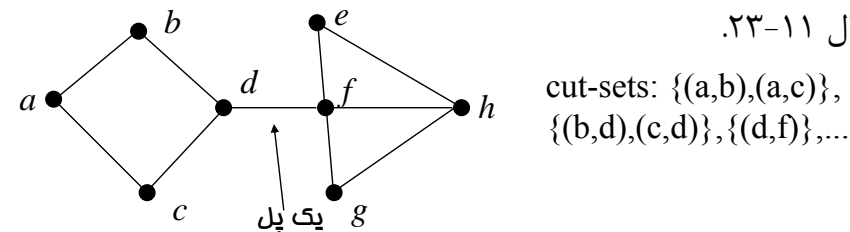
29

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۴-۱۱. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۲۰. مجموعه برشی: زیرمجموعه ای از لبه ها که حذف آنها باعث افزایش تعداد مولفه های گراف  $(k(G))$  شود.

مثال ۱۱-۲۳.



cut-sets:  $\{(a,b), (a,c)\}$ ,  $\{(b,d), (c,d)\}$ ,  $\{(d,f)\}$ , ...

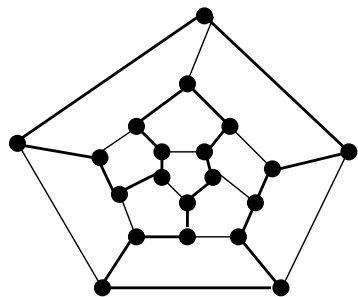
در گرافهای مسطح، دورها در یک گراف متناظر با مجموعه های برشی در گراف دوگان آن می باشد و بالعکس.

N. Razavi - DM course - 2006

30

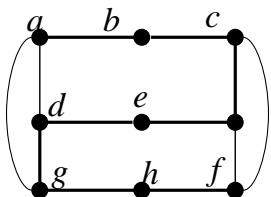


## فصل ۱۱. نظریه گراف



۵-۱۱. دورها و مسیرهای هامیلتونی  
یک مسیر یا دور که شامل تمام رأسها باشد

برخلاف مدار اویلری، شرط لازم و کافی  
شناخته شده ای برای اینکه یک گراف  
همیلتونی باشد وجود ندارد.

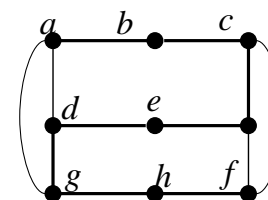


مثال ۱۱-۲۷. مسیر همیلتونی وجود دارد اما  
دور همیلتونی وجود ندارد.

N. Razavi - DM course - 2006

31

## فصل ۱۱. نظریه گراف



۵-۱۱. دورها و مسیرهای هامیلتونی

چند نکته برای بدست آوردن یک دور همیلتونی در  
یک گراف دلخواه  $G=(V, E)$ :

۱. اگر  $G$  دور همیلتونی دارد، در این صورت برای هر رأس  $v \in V$ ،  $\deg(v) \geq 2$ .
۲. اگر برای  $a \in V$ ،  $\deg(a) = 2$ ، در این صورت هر دو یال متلاقی با رأس  $a$  حتما باید در دور همیلتونی قرار بگیرند.
۳. اگر برای  $a \in V$ ،  $\deg(a) > 2$ ، در این صورت در زمان تشکیل دور همیلتونی به محض عبور از  $a$  می توانیم سایر یالهای استفاده نشده  $a$  را حذف کنیم.

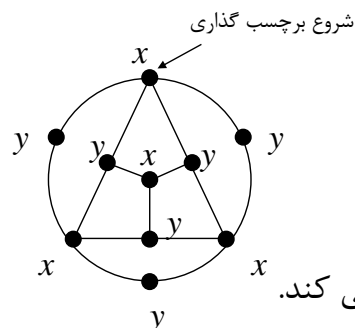
N. Razavi - DM course - 2006

32

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۵-۱۱. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

مثال ۱۱-۲۸.



۴ تا  $x$  و ۶ تا  $y$ ، چون در مسیر (دور) هامیلتونی  $x$  و  $y$  ها باید یک در میان باشند بنابراین این گراف هامیلتونی نمی باشد.

این روش تنها برای گرافهای دوبخشی کار می کند.

مسئله یافتن مسیر هامیلتونی هنوز هم حتی برای گراف دوبخشی NP-Complete می باشد

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۵-۱۱. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

قضیه ۱۱-۷. فرض کنیم  $k_n^*$  یک گراف جهت دار کامل باشد. یعنی بازاء هر دور رأس متمایز  $x$  و  $y$ ، درست یکی از لبه های  $(x, y)$  یا  $(y, x)$  در  $K_n^*$  باشد. چنین گرافی ( به نام گراف تورنمنت) همواره شامل یک مسیر هامیلتونی ( جهت دار) می باشد.

اثبات: فرض کنیم  $m \geq 2$  و  $p_m$  مسیری شامل  $m-1$  لبه به شکل زیر باشد:

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{m-1}, v_m)$$

اگر  $m=n$  کار تمام است. در غیر این صورت فرض می کنیم  $v$  رأسی باشد که در  $p_m$  ظاهر نشده باشد:

$$\text{حالت ۱. } v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$$

$$\text{حالت ۲. } v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v \rightarrow v_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_m$$

$$\text{حالت ۳. } v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v$$



## فصل ۱۱. نظریه گراف

۵-۱۱. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

قضیه ۱۱-۸. فرض کنیم  $G$  یک گراف بدون حلقه با  $|V|=n \geq 2$  باشد. هرگاه بازاء هر  $x, y \in V$  که  $x \neq y$  داشته باشیم  $\deg(x) + \deg(y) \geq n-1$ ، آنگاه  $G$  دارای مسیر هامیلتونی است.

۵-۱۱. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

نتیجه ۱۱-۴. فرض کنیم  $G$  یک گراف بدون حلقه با  $n \geq 2$  رأس باشد. هرگاه بازاء هر  $v \in V$ ،  $\deg(v) \geq (n-1)/2$ ، آنگاه  $G$  دارای یک مسیر هامیلتونی است.

قضیه ۱۱-۹. فرض کنیم  $G$  یک گراف بدون جهت و بدون حلقه با  $|V|=n \geq 3$  رأس باشد. هرگاه بازاء هر  $x, y \in V$  غیر مجاور  $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ ، آنگاه  $G$  شامل یک دور هامیلتونی می باشد.

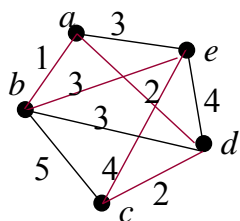
نتیجه ۱۱-۵. هرگاه  $G$  یک گراف بدون جهت و بدون حلقه با  $|V|=n \geq 3$  باشد و بازاء هر  $v \in V$ ،  $\deg(v) \geq (n/2)$ ، آنگاه  $G$  دارای یک دور هامیلتونی است.

نتیجه ۱۱-۶. هرگاه  $G$  یک گراف بدون جهت و بدون حلقه با  $|V|=n \geq 3$  باشد و نیز  $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2$ ، آنگاه  $G$  دارای یک دور هامیلتونی می باشد.

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

یک مسأله مرتبط: فروشنده دوره گرد (TSP)

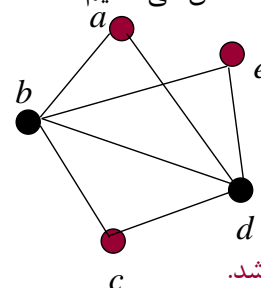


هدف: یافتن دور همیلتونی با کمترین هزینه کل  
مثلا a-b-e-c-d-a با هزینه کل  $1+3+4+2+2=12$

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

تعریف ۱۱-۲۲. اگر  $G=(V, E)$  یک گراف بدون جهت باشد، رنگ آمیزی سره  $G$  وقتی رخ می دهد که اگر  $\{a,b\}$  یک لبه در  $G$  باشد،  $a$  و  $b$  رنگهای متفاوتی داشته باشند. (رئوس مجاور رنگهای متفاوتی دارند). کمترین تعداد رنگهای لازم برای رنگ آمیزی مناسب  $G$  را عدد رنگی  $G$  نامیده و به صورت  $\chi(G)$  نشان می دهیم.



$\chi(K_n)=n$   
3 colors are needed.  $\chi(\text{bipartite graph})=2$

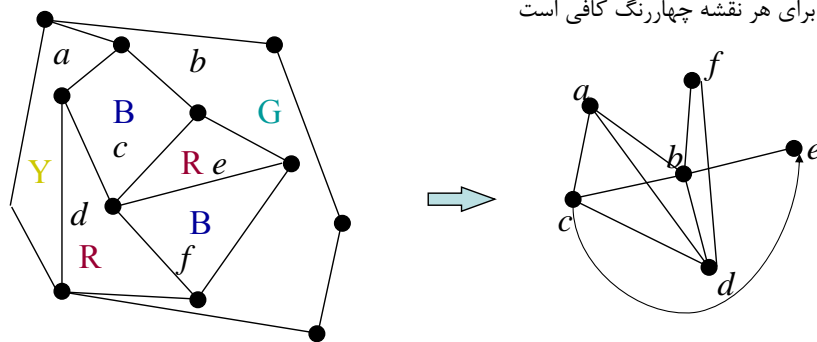
این مسأله در حالت کلی NP-Complete می باشد.



## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

یک مسأله مرتبط: رنگ آمیزی نقشه به طوریکه نواحی با مرز مشترک رنگ متفاوت داشته باشند.  
برای هر نقشه چهاررنگ کافی است



## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

چند جمله ای رنگی  $P(\lambda, G)$  = تعداد روشهای رنگ کردن  $G$  بوسیله  $\lambda$  رنگ.

مثال ۱۱-۳۴. (آ) هرگاه  $G$  برابر  $n$  رأس منفرد باشد  $P(G, \lambda) = \lambda^n$

(ب)  $G=K_n$ ، آنگاه برای  $G$  حداقل  $n$  رنگ لازم است:

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1) = \lambda^{(n)}$$

(پ) بازاء یک مسیر با  $n$  رأس

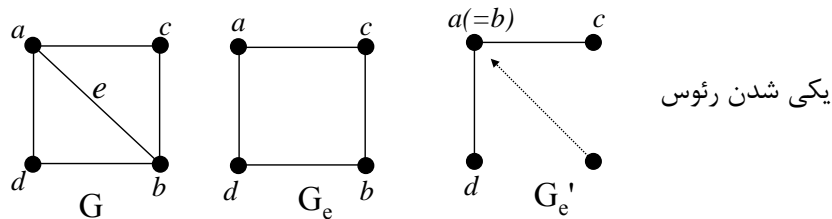
$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$$

(ت) هرگاه  $G$  دارای مولفه های  $G_1, G_2, \dots, G_K$  باشد، طبق قانون ضرب:

$$P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda) P(G_2, \lambda) \dots P(G_K, \lambda)$$

## فصل ۱۱. نظریه گراف

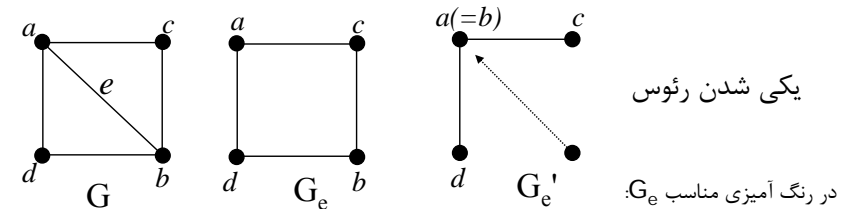
۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی  
مثال ۱۱-۳۵.



## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی  
قضیه ۱۱-۱۰. قضیه تجزیه برای چند جمله ایهای رنگی:  
هرگاه  $G=(V, E)$  یک گراف همبند بوده و  $e \in E$ ، آنگاه

$$P(G_e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G'_e, \lambda)$$



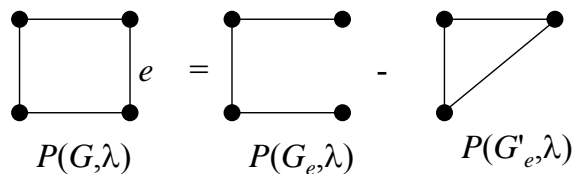
در رنگ آمیزی مناسب  $G_e$ :

حالت ۱.  $a$  و  $b$  هم رنگ باشند: رنگ آمیزی مناسب  $G'_e$

حالت ۲.  $a$  و  $b$  هم رنگ نباشند: رنگ آمیزی مناسب  $G$

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی  
مثال ۱۱-۳۶.

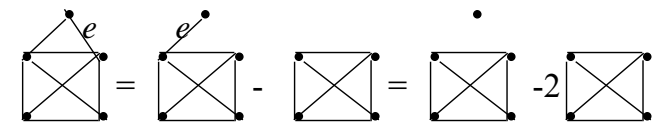


$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda$$

Since  $P(G, 1) = 0$  while  $P(G, 2) = 2 > 0$ , we know that  $\chi(G) = 2$ .

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی  
مثال ۱۱-۳۷.



$$P(G, \lambda) = \lambda\lambda^{(4)} - 2\lambda^{(4)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3) \quad \chi(G) = 4$$

## فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

**قضیه ۱۱،۱۱.** به ازای هر گراف  $G$  جمله ثابت در  $P(G, \lambda)$  برابر صفر است. برهان. اگر  $P(G, 0) = \alpha \neq 0$  یعنی گراف را می توان با صفر رنگ به  $\alpha$  طریق رنگ آمیزی نمود.

**قضیه ۱۱،۱۲-** فرض کنیم  $G=(V, E)$  و  $|E|>0$ . در این صورت مجموع ضرایب در  $P(G, \lambda)$  مساوی صفر است.

برهان. چون گراف حداقل شامل یک لبه است بنابراین عدد رنگی آن حداقل برابر دو می باشد یعنی گراف را نمی توان با یک رنگ رنگ آمیزی نمود. یعنی:

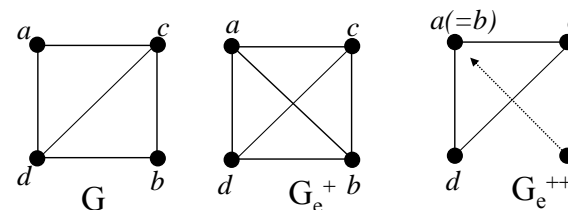
$$P(G, 1) = 0$$



## فصل ۱۱. نظریه گراف

قضیه ۱۱،۱۳-

یکی شدن رئوس



$$P(G, \lambda) = P(G_e^+, \lambda) + P(G_e^{++}, \lambda)$$

$$P(G, \lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

## فصل ۱۲. درخت ها

کاربردها :

- ساختمان های داده ای
- ساختار فایل ها
- هوش مصنوعی
- نظریه رمز گذاری
- مسائل بهینه سازی
- ...

فصل دوازدهم  
درخت ها

سید ناصر رضوی  
e-mail: [razavi@comp.iust.ac.ir](mailto:razavi@comp.iust.ac.ir)  
۱۳۸۵

N. Razavi - DM course - 2006

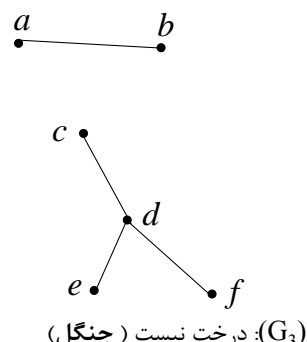
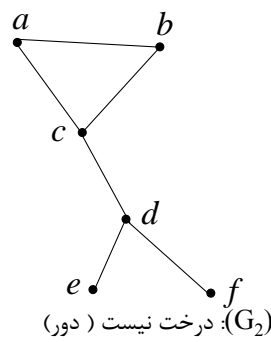
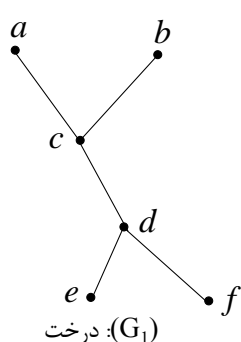
2



## فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۱. تعاریف، خواص و مثالها

تعریف ۱۲-۱. فرض می کنیم  $G=(V, E)$  یک گراف بدون جهت و بدون حلقه باشد. گراف  $G$  را درخت می نامیم اگر  $G$  همبند بوده و شامل دور نباشد.



N. Razavi - DM course - 2006

3

## فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۱. تعاریف، خواص و مثالها

**درخت پوشا:** برای یک گراف همبند یک زیرگراف پوشاست که درخت نیز باشد.

مثال:  $G_1$  برای  $G_2$  در اسلاید قبل یک درخت پوشا می باشد.

**قضیه ۱۲-۱.** هر گاه  $a$  و  $b$  رئوس متمایزی در  $T=(V, E)$  باشند، آنگاه مسیر منحصر به فردی هست که این رئوس را به هم وصل کند.

**قضیه ۱۲-۲.** هر گاه  $G=(V, E)$  یک گراف بدون جهت باشد، آنگاه  $G$  همبند است اگر و فقط اگر  $G$  دارای درخت پوشا باشد.

N. Razavi - DM course - 2006

4

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱-۱۲. تعاریف، خواص و مثالها

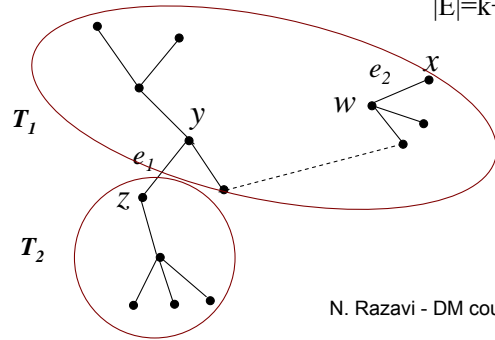
قضیه ۱۲-۳. در هر درخت  $T=(V, E)$  داریم  $|V|=|E|+1$ .

برهان. با استفاده از استقرا روی تعداد رئوس درخت

الف- پایه استقرا: اگر  $|V|=1$  بنابراین  $|E|=0$ .

ب- فرض استقرا: فرض می کنیم قضیه برای هر درخت حداکثر شامل  $k \geq 0$  رأس درست باشد. حال درخت زیر را در نظر می گیریم که در آن  $|E|=k+1$

اگر  $e_1$  حذف شود:



$$T_1=(V_1, E_1), T_2=(V_2, E_2),$$

$$|V|=|V_1|+|V_2|, |E|=|E_1|+|E_2|+1 \Rightarrow$$

$$|V_1|=|E_1|+1, |V_2|=|E_2|+1 \Rightarrow$$

$$|V|=|V_1|+|V_2|=(|E_1|+1)+(|E_2|+1)=$$

$$(|E_1|+|E_2|+1)+1=|E|+1$$

N. Razavi - DM course - 2006

5



## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱-۱۲. تعاریف، خواص و مثالها

قضیه ۱۲-۴. در هر درخت  $T=(V, E)$ ، هرگاه  $|V| \geq 2$ ، آنگاه حداقل دو رأس آویزان داریم.  
برهان. استقرا بر روی  $|V|$

N. Razavi - DM course - 2006

6

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱-۱۲. تعاریف، خواص و مثالها

قضیه ۱۲-۵. احکام زیر برای گراف بدون جهت و بدون حلقه  $G=(V, E)$  هم ارزند.

(آ)  $G$  یک درخت است.

(ب)  $G$  همبند است ولی حذف یک یال از  $G$  آنرا به دو زیرگراف که درخت هستند ناهمبند می سازد.

(پ)  $G$  شامل دور نیست و  $|V|=|E|+1$ .

(ت)  $G$  همبند است و  $|V|=|E|+1$ .

(ث)  $G$  شامل دور نیست، و هرگاه  $a, b \in V$  که  $\{a, b\} \notin E$ ، آنگاه گراف حاصل از افزودن یال  $\{a, b\}$  به  $G$  درست یک دور دارد.

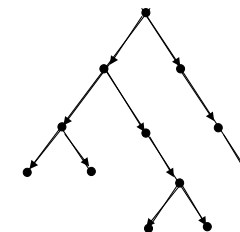
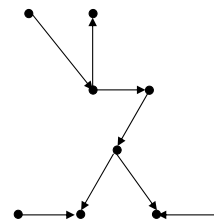
N. Razavi - DM course - 2006

7

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۲-۱۲. درخت های ریشه دار

تعریف ۱۲-۲. هرگاه  $G$  یک گراف جهت دار باشد، آنگاه  $G$  را یک درخت جهت دار می نامیم اگر گراف بدون جهت مربوط به  $G$  یک درخت باشد. وقتی  $G$  یک درخت جهت دار است،  $G$  را یک درخت ریشه دار نامیم اگر یک رأس منحصر به فرد  $r$  به نام ریشه در  $G$  با درجه ورودی  $\text{in\_degree}(r)=0$  بوده و بزاء سایر رئوس  $v$  داشته باشیم  $\text{in\_degree}(v)=1$ .



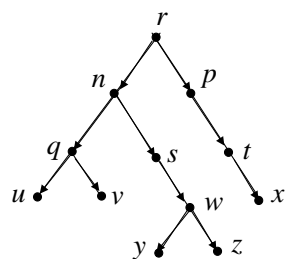
درخت  
ریشه دار

N. Razavi - DM course - 2006

8

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار



$$r \rightarrow n \rightarrow s$$

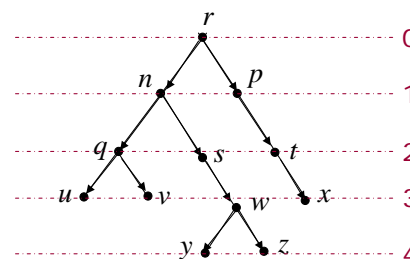
$$n \rightarrow s \rightarrow w \rightarrow z$$

مسیر: هر دنباله ای از گره ها در درخت  
مانند  $n_1, n_2, \dots, n_k$  که در آن هر گره، پدر گره  
بعد از خود در دنباله باشد.  
مثال:

طول مسیر: تعداد گره های موجود در مسیر منتهای یک.

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار



سطح گره: طول مسیر از ریشه تا آن گره .

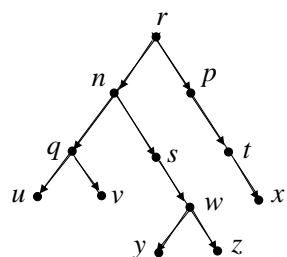
$s$  در سطح ۲،  $x$  در سطح ۳،  $y$  در سطح ۴

S



## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

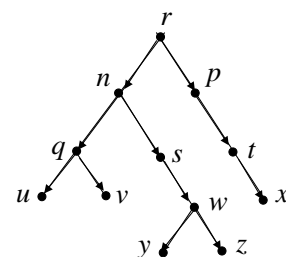


پدر و فرزند:

اگر از  $a$  به  $b$  مسیری به طول ۱ وجود داشته باشد آنگاه  $a$   
را پدر  $b$  و  $b$  را فرزند  $a$  گوئیم  
-  $s$  فرزند  $n$  پدر  $s$  می باشد.

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

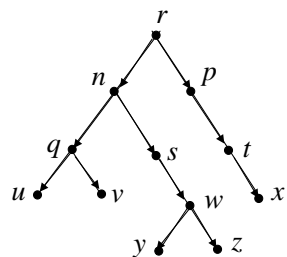


جد و نسل:

اگر از  $a$  به  $b$  مسیری وجود داشته باشد آنگاه  $a$  را جد  $b$   
و  $b$  را نسل  $a$  گوئیم  
-  $x$ ،  $w$ ،  $y$  و  $z$  اجداد  $s$  و  $n$  هستند.

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

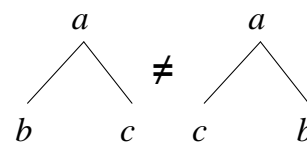


دو گره با والد مشترک را **همزاد** گوییم مانند  $s$  و  $q$ .  
**برگ**: گره ای که هیچ فرزندی نداشته باشد. مانند:  $u, v, y, z, x$   
**گره داخلی**: گره غیر برگ. مانند  $n, s, t$   
 گره  $n$  به همراه تمام اخلافش **زیردرخت**  $r$  محسوب می شود.

## فصل ۱۲. درخت ها

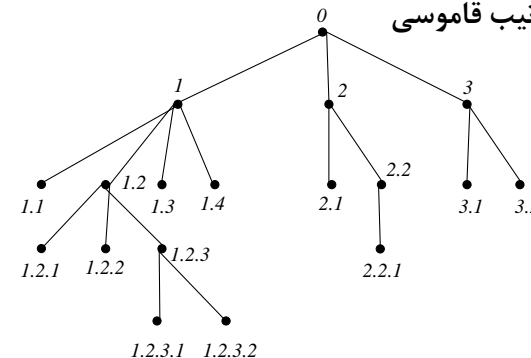
### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

درخت ریشه دار مرتب:



درخت ریشه داری که در آن ترتیب فرزندان اهمیت دارد.

مثال ۱۲-۴. ترتیب قاموسی

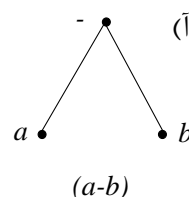
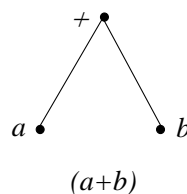


## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

**درخت دودویی**: درختی که در آن هر گره حداکثر دو فرزند داشته باشد.  
**درخت دودویی کامل**: یک درخت دودویی که در آن هر گره صفر یا دو فرزند داشته باشد.

**نکته**: درخت دودویی مرتب است.



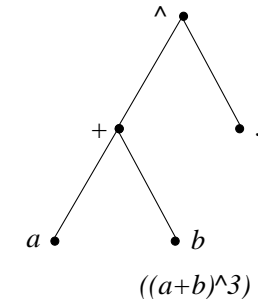
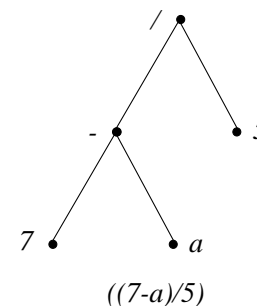
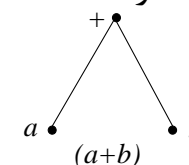
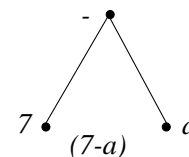
مثال ۱۲-۵. (آ)  
 درخت عبارت:

## فصل ۱۲. درخت ها

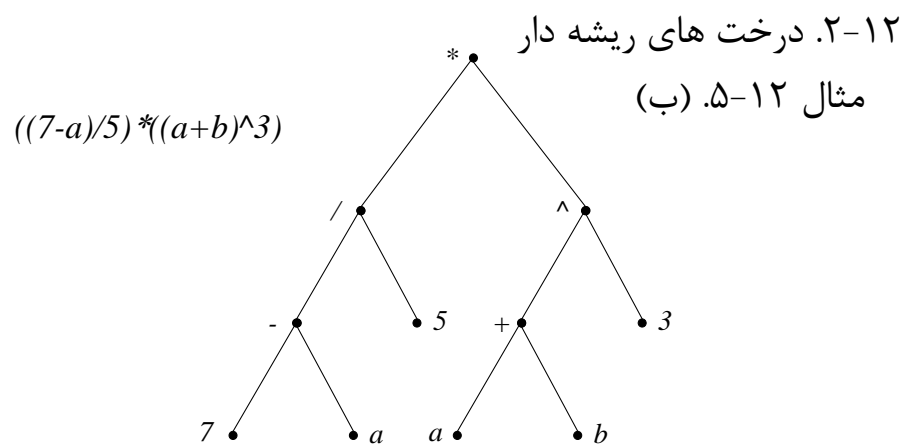
### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۵. (ب)

$((7-a)/5) * ((a+b)^3)$



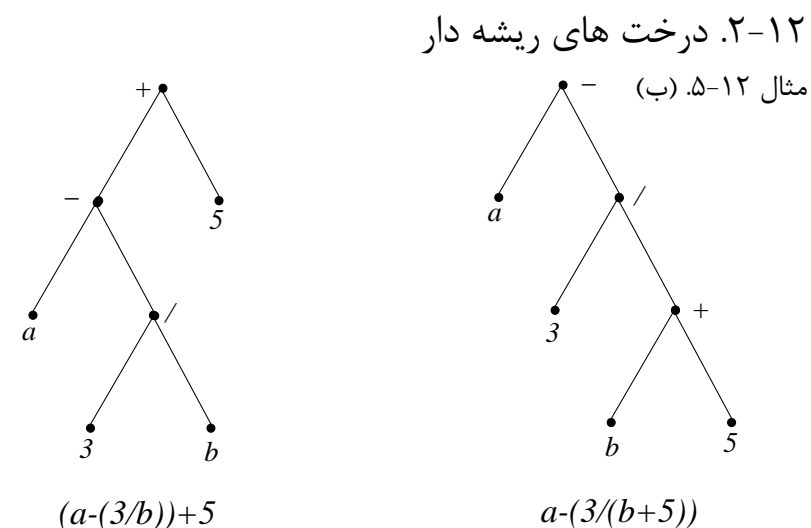
## فصل ۱۲. درخت ها



N. Razavi - DM course - 2006

17

## فصل ۱۲. درخت ها



N. Razavi - DM course - 2006

18



## فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار  
مثال ۱۲-۵. (پ):نمادگذاری لهستانی (پیشوندی)



عبارت میانوندی *aob* در نمایش پیشوندی به صورت *oab* در می آید.  
مزیت عبارت پیشوندی : نیاز به پرانتز ندارد و محاسبه از راست به چپ صورت می گیرد.

N. Razavi - DM course - 2006

19

## فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مراحل محاسبه عبارت میانوندی

$$+ t / * u v + w - x ^ y z$$

بازاء مقادیر زیر:

$$t = 4, u = 2, v = 3, w = 1, x = 9, y = 2, z = 3$$

$$\begin{aligned} & + 4 / * 2 3 + 1 - 9 ^ 2 3 \quad (۱) \\ & + 4 / * 2 3 + 1 - 9 8 \quad (۲) \\ & + 4 / * 2 3 + 1 1 \quad (۳) \\ & + 4 / * 2 3 2 \quad (۴) \\ & + 4 / 6 2 \quad (۵) \\ & + 4 3 \quad (۶) \end{aligned}$$

N. Razavi - DM course - 2006

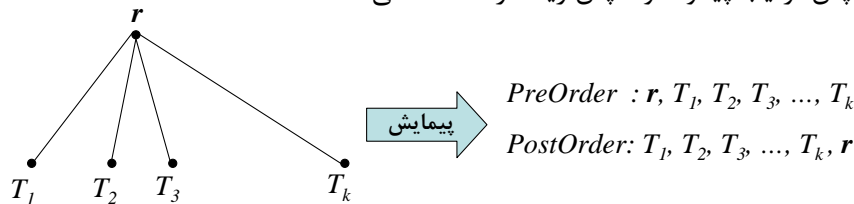
20

## فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

تعریف ۱۲-۳. فرض کنیم  $T=(V, E)$  یک درخت ریشه دار با ریشه  $r$  باشد. اگر  $T$  به جز ریشه گره دیگری نداشته باشد، آنگاه خود ریشه پیمایشهای پیش ترتیب و پس ترتیب  $T$  را تشکیل می دهد. اگر  $|V|>1$ ، فرض می کنیم  $T_1, T_2, \dots, T_k$  زیر درختهای  $T$  از چپ به راست باشند:

(آ) پیمایش پیش ترتیب  $T$ : ابتدا  $r$  را ملاقات می کند و سپس زیردرختهای  $T_1$  و بعد  $T_2$  و ... و در نهایت  $T_k$  را به صورت پیش ترتیب پیمایش می کند.  
(ب) پیمایش پس ترتیب  $T$ : گره های زیر درختهای  $T_1, T_2, \dots, T_k$  را به صورت پس ترتیب پیموده و سپس ریشه را ملاقات می کند.



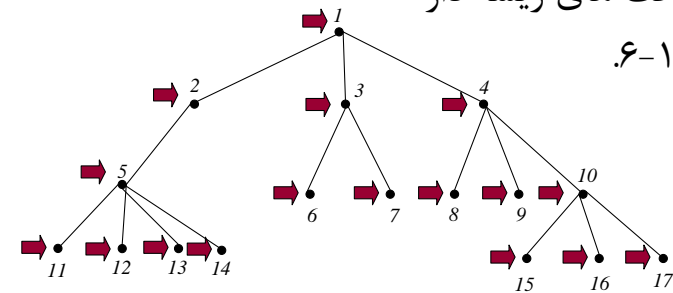
N. Razavi - DM course - 2006

21

## فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۶.



PreOrder: 1, 2, 5, 11, 12, 13, 14, 3, 6, 7, 4, 8, 9, 10, 15, 16, 17

N. Razavi - DM course - 2006

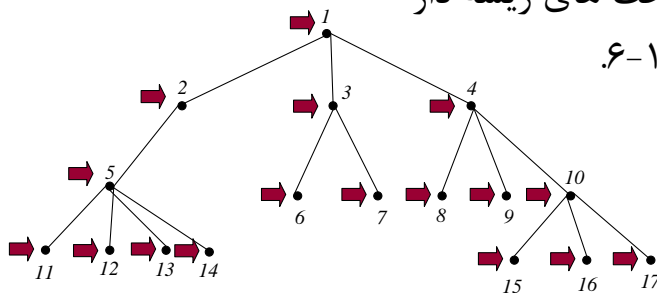
22



## فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۶.



PostOrder: 11, 12, 13, 14, 5, 2, 6, 7, 3, 8, 9, 15, 16, 17, 10, 4, 1

N. Razavi - DM course - 2006

23

## فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

تعریف ۱۲-۴. فرض کنیم  $G=(V, E)$  یک درخت دودویی با گره  $r$  به عنوان ریشه باشد.

(آ) هرگاه  $|V|=1$ ، آنگاه خود  $r$  پیمایش میان ترتیب را تشکیل می دهد.

(ب) وقتی  $|V|>1$ ، آنگاه  $T_L$  و  $T_R$  را زیر درختان چپ و راست  $T$  می گیریم. پیمایش میان ترتیب  $T$  ابتدا گره های  $T_L$  را به صورت میان ترتیب پیمایش می کند، سپس ریشه را ملاقات نموده و بعد گره های  $T_R$  را به صورت میان ترتیب پیمایش می کند.

نکته : در درخت دودویی زیردرخت چپ یا راست ممکن است تهی باشند.

نکته : در درخت دودویی ترتیب فرزندان گره ها اهمیت دارد.

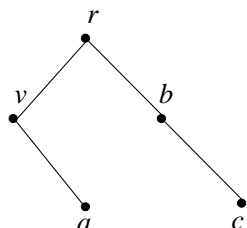
N. Razavi - DM course - 2006

24

## فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

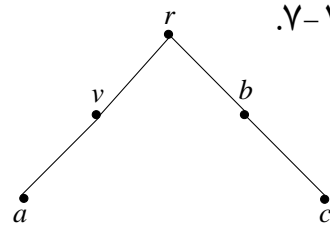
مثال ۷-۱۲.



InOrder : v, a, r, b, c

PreOrder : r, v, a, b, c

PostOrder : a, v, c, b, r



InOrder : a, v, r, b, c

PreOrder : r, v, a, b, c

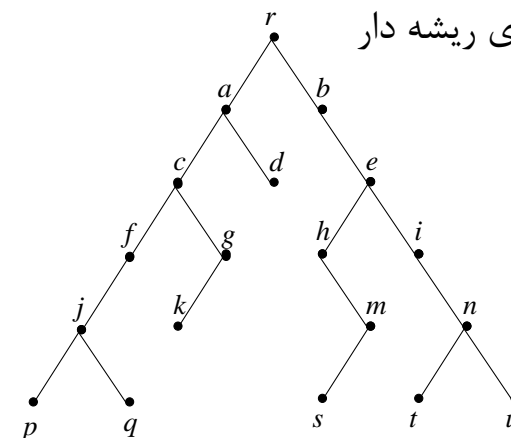
PostOrder : a, v, c, b, r



## فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

مثال ۸-۱۲.



InOrder: p, j, q, f, c, k, g, a, d, r, b, h, s, m, e, i, t, n, u

## فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

**درخت پوشا:** زیرگراف  $H$  از گراف  $G=(V, E)$  یک درخت پوشا برای  $G$  نامیده می شود، اگر  $H$  یک درخت بوده و شامل همه گره های مجموعه  $V$  باشد.

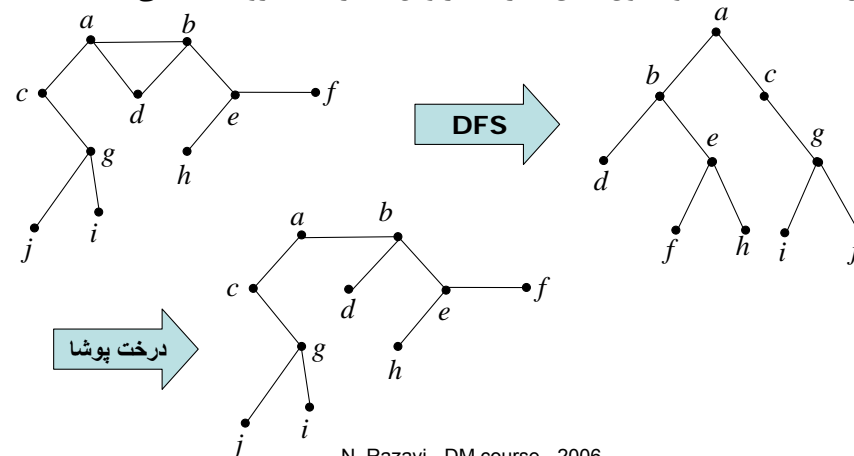
**درخت پوشای جهت دار:** درخت پوشایی که جهت دار نیز باشد.

**نکته:** برای ساختن درخت پوشا می توان از جستجوی اول عمق و جستجوی اول سطح استفاده نمود.

## فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

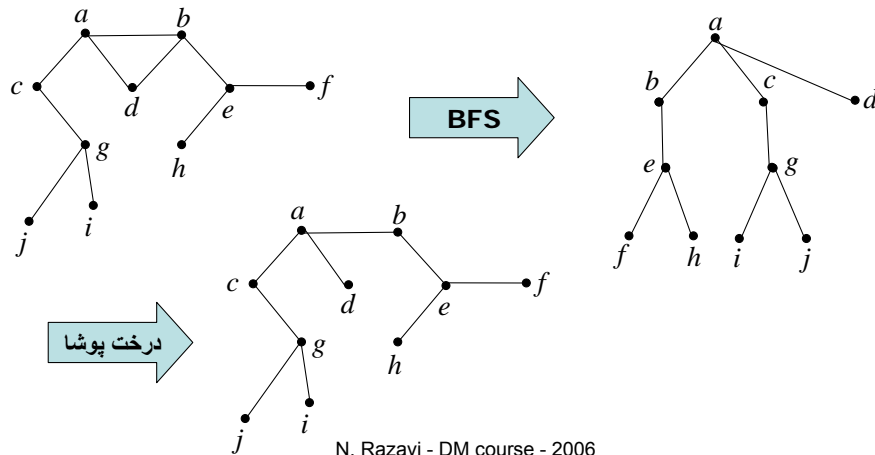
مثال ۹-۱۲. (جستجوی اول عمق) ترتیب رئوس به ترتیب حروف الفبا می باشد.



## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۹. (جستجوی اول سطح) ترتیب رئوس به ترتیب حروف الفبا می باشد.

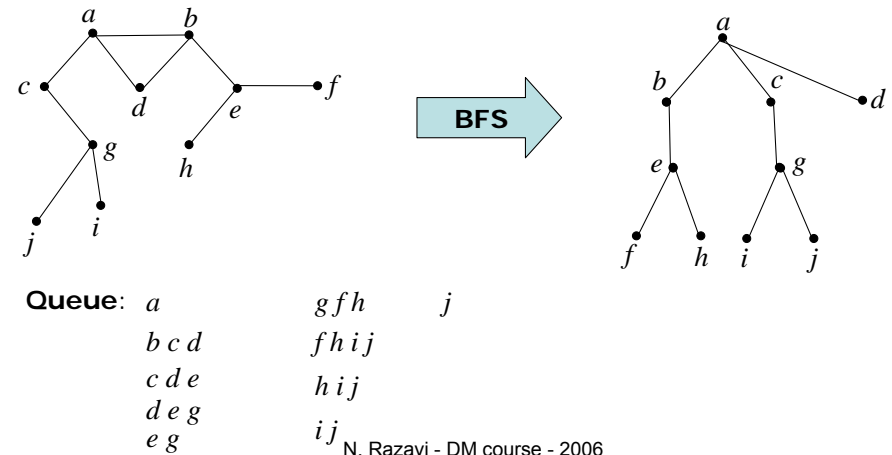


29

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۹. (جستجوی اول سطح) ترتیب رئوس به ترتیب حروف الفبا می باشد.



30



## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

**درخت  $k$ -تایی:** درختی است که در آن هر گره حداکثر  $k$  فرزند دارد.

در حالت خاص اگر  $k=2$  درخت دودویی بدست می آید.

**درخت  $k$ -تایی کامل:** یک درخت  $k$ -تایی می باشد که در آن هر گره صفر(برگ) و یا  $k$  فرزند (گره داخلی) دارد. (درخت دودویی کامل حالت خاص می باشد که در آن  $k=2$ ).

قضیه ۱۲-۶. در یک درخت  $k$ -تایی کامل با  $n$  گره، اگر  $n_0$  تعداد برگها و  $n_k$  تعداد گره های داخلی باشد، آنگاه:

$$n - 1 = \text{تعداد شاخه ها}$$

$$n = kn_k + 1 \quad (\text{آ})$$

$$\text{تعداد شاخه ها} = kn_k$$

$$n_0 = (k - 1)n_k + 1 \quad (\text{ب})$$

$$\rightarrow n - 1 = kn_k$$

$$n_k = (n_0 - 1) / (k - 1) = (n - 1) / k \quad (\text{پ}) \quad (\text{چرا؟!})$$

$$\rightarrow n = kn_k + 1$$

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

**مثال ۱۲-۱۳.** تعداد بازیهای لازم در یک دوره مسابقات تک حذفی با ۲۷ شرکت کننده.

جواب: درخت بازیها یک درخت دودویی کامل می باشد و تعداد بازیها برابر تعداد گره های داخلی این درخت یعنی ۲۶ می باشد.

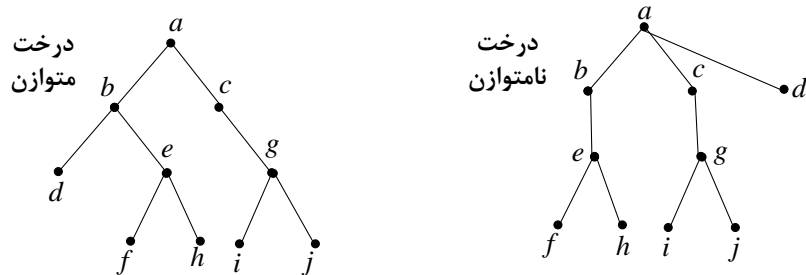
$$n_k = (n_0 - 1) / (k - 1) = (27 - 1) / (2 - 1) = 26$$

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

تعریف ۱۲-۶. ارتفاع درخت: هرگاه  $T=(V, E)$  یک درخت ریشه دار بوده و  $h$  بزرگترین شماره سطحی باشد که یک برگ در  $T$  بدان می رسد، آنگاه گوییم  $T$  دارای ارتفاع  $h$  می باشد.

**درخت متوازن:** درختی است که در آن شماره سطح هر برگ برابر  $h-1$  یا  $h$  باشد.



N. Razavi - DM course - 2006

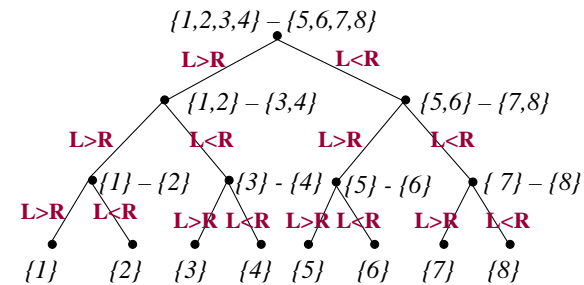
33

## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

**درخت تصمیم (decision tree):**

مثال ۱۲-۴. هشت سکه یک شکل و یک ترازو در اختیار داریم. اگر درست یکی از این سکه ها تقلبی و سنگین تر از بقیه باشد، می خواهیم با حداقل توزین آن را پیدا کنیم.



درخت تصمیم دودویی

( $h=3$ )

N. Razavi - DM course - 2006

34

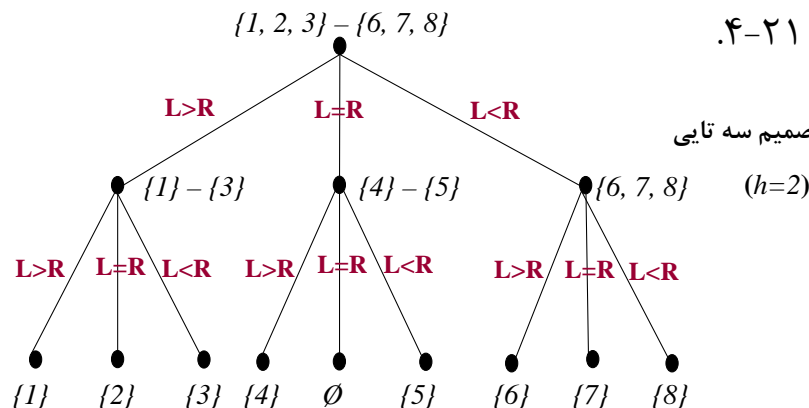


## فصل ۱۲. درخت ها

### ۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۴.

**درخت تصمیم سه تایی**



N. Razavi - DM course - 2006

35

## فصل ۱۲. درخت ها

درخت پوشای مینیمم

**الگوریتم کراسکال**

**ورودی.** گراف همبند، بدون جهت و وزن دار  $G=(V, E)$ . که در آن برای هر  $e \in E$  یک عدد حقیقی  $C(e) > 0$  منسوب شده است.

**خروجی.** درخت پوشای  $T$  با هزینه مینیمم.

(۱) فرض می کنیم  $e_i \in E$  یالی ( غیر از یک حلقه) از  $G$  است که  $C(e_i)$  از همه یالهای دیگر کوچکتر است (اگر چندین یال با هزینه مینیمم وجود داشت، یکی را به طور دلخواه انتخاب می کنیم)

(۲) برای  $1 \leq i \leq n-2$  اگر یالهای  $e_1, e_2, \dots, e_i$  قبلاً انتخاب شده اند، در این صورت از میان بقیه یالهای باقیمانده از  $G$ ،  $e_{i+1}$  را به گونه ای انتخاب کنیم که

(الف)  $C(e_{i+1})$  از همه کمتر باشد.

(ب) زیرگراف تشکیل شده بوسیله یالهای  $e_1, e_2, \dots, e_{i+1}$  (با رئوسی که این یالها تلاقی دارند) تشکیل هیچ دوری ندهند.

(۳)  $i \leftarrow i+1$

اگر  $i=n-1$ ، زیرگراف حاصل از یالهای  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  همبند، دارای  $n$  رأس و  $n-1$  یال بوده، در نتیجه  $T$  یک درخت پوشای مینیمم است و الگوریتم خاتمه پیدا می کند.

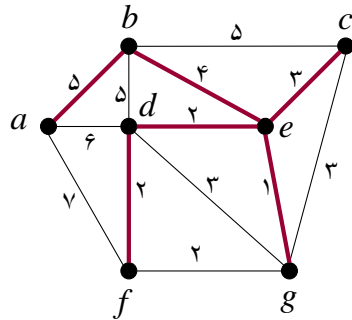
اگر  $i < n-1$ ، برو به مرحله ۲.

N. Razavi - DM course - 2006

36

## فصل ۱۲. درخت ها

### درخت پوشای مینیمم الگوریتم کراسکال



هزینه درخت پوشا = ۱۷

## فصل ۱۲. درخت ها

درخت پوشای مینیمم

الگوریتم پریم

**ورودی.** گراف همبند، بدون جهت و وزن دار  $G=(V, E)$ ، که در آن برای هر  $e \in E$  یک عدد حقیقی  $C(e) > 0$  منسوب شده است.

**خروجی.** درخت پوشای  $T$  با هزینه مینیمم

(۱)  $T \leftarrow \emptyset, N \leftarrow V - \{v_1\}, v_1 \in V$  که در آن  $P \leftarrow v_1, i \leftarrow 1$

(۲) برای  $1 \leq i \leq n-1$ ، فرض  $P = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ ،  $T = \{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}\}$ ،  $N = V - P$  به  $T$  یال دارای کمترین هزینه را که رأسی مثل  $x \in P$  رابه رأسی مثل  $y = (v_{i+1})$  از  $N$  وصل می کند، اضافه می کنیم.  $P \leftarrow P \cup \{y\}$  و  $N \leftarrow N - \{y\}$

(۳)  $i \leftarrow i+1$

اگر  $i=n$ ، زیرگراف حاصل از یالهای  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  همبند، دارای  $n$  رأس و  $n-1$  یال بوده، و در نتیجه یک درخت پوشای مینیمم برای  $G$  است و الگوریتم خاتمه پیدا می کند.

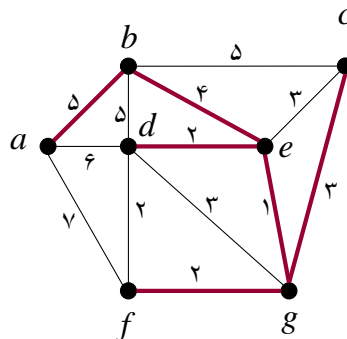
اگر  $i < n-1$ ، برو به مرحله ۲.

مثال.

## فصل ۱۲. درخت ها

$i$	$P$	$N$	$T$
1	{a}	{b,c,d,e,f,g}	$\emptyset$
2	{a,b}	{c,d,e,f,g}	{ab}
3	{a,b,e}	{c,d,f,g}	{ab, be}
4	{a,b,e,g}	{c,d,f}	{ab, be, eg}
5	{a,b,e,g,d}	{c,f}	{ab, be, eg, de}
6	{a,b,e,g,d,f}	{c}	{ab, be, eg, de, fg}
7	{a,b,e,g,d,f,c}	$\emptyset$	{ab, be, eg, de, fg, cg}

• الگوریتم پریم



## فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

فرض کنید بخواهیم برای نمایش حروف انگلیسی از رشته های باینری (صفر و یک) راهی پیدا کنیم. چون ۲۶ حرف داریم و  $2^4 < 26 < 2^5$  باید بتوانیم این حروف را با رشته های باینری ۵ بیتی نمایش دهیم.

روش اول: استفاده از رشته هایی به طول ثابت برای حروف  
مثلا رشته "ata" را به وسیله ۱۵ بیت نمایش داده می شود. و یک رشته  $n$  کاراکتری دارای طول  $5n$  می باشد.

## فصل ۱۲. درخت ها

۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

روش دوم. (استفاده از رشته های با طولهای متفاوت) اگر بتوانیم روشی بیابیم که در آن به کاراکترهایی که احتمال وقوعشان بالاتر است کد کوتاه تری نسبت دهیم در این صورت ضریب فشرده سازی افزایش می یابد.

مثلا زیر مجموعه  $S = \{a, e, n, r, t\}$  از حروف الفبا را در نظر می گیریم. و عناصر  $S$  را با رشته های باینری زیر نمایش می دهیم:

$a:01, e:0, n:101, r:10, t:1$

$ata:01101$  و طول کد برابر ۵ است ولی برای پیامهای "an" و "etn" نیز همین کد تولید می شود و امکان ابهام وجود دارد.

## فصل ۱۲. درخت ها

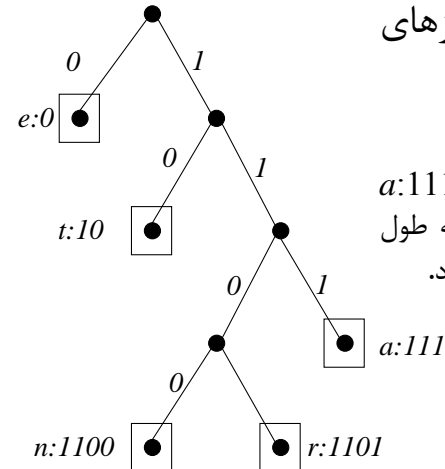
۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

حال طرح دیگری را در نظر می گیریم:

$a:111, e:0, n:1100, r:1101, t:10$

در اینجا کد "ata" برابر 11110111 به طول ۸ می باشد و امکان ابهام نیز وجود ندارد.

رمزگشایی 11110111



## فصل ۱۲. درخت ها

۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

تعریف ۷-۱۲. مجموعه  $P$  از رشته های دودویی یک رمز پیشوندی نام دارد اگر هیچ رشته ای در  $P$  پیشوند رشته دیگری در  $P$  نباشد.

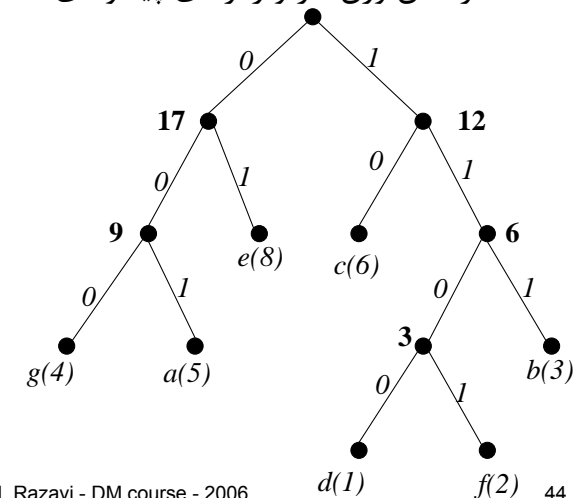
بنابراین  $P = \{111, 0, 1100, 1101, 10\}$  یک رمز پیشوندی برای حروف  $a, e, n, r, t$  می باشد.

مسأله: می خواهیم با داشتن تعدادی علامت و نیز احتمال وقوع هر کدام، یک طرح رمزگذاری با حداکثر فشرده سازی ایجاد کنیم.

## فصل ۱۲. درخت ها

۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

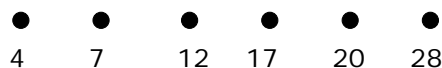
کد	احتمال	تعداد	علامت
001	5/29	5	a
111	3/29	3	b
10	6/29	6	c
1100	1/29	1	d
01	8/29	8	e
1101	2/29	2	f
000	4/29	4	g



## فصل ۱۲. درخت ها

۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

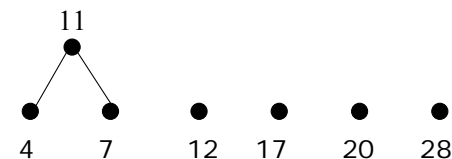
مثال ۱۲-۱۷. برای علائم  $a, o, q, u, y, z$  که ( در یک نمونه داده شده) به ترتیب با فرکانسهای 20, 28, 4, 17, 12, 7 ظاهر می شوند، یک رمز پیشوندی بهینه بسازید.



## فصل ۱۲. درخت ها

۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

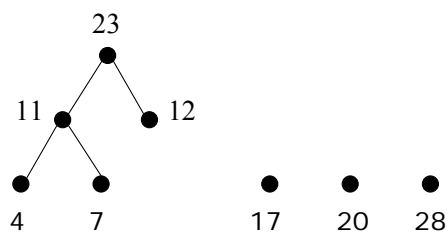
مثال ۱۲-۱۷.



## فصل ۱۲. درخت ها

۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

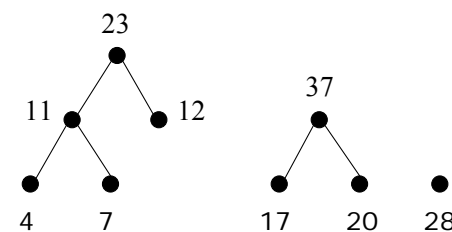
مثال ۱۲-۱۷.



## فصل ۱۲. درخت ها

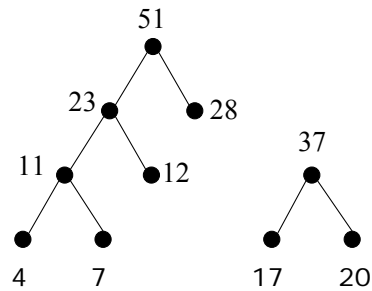
۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

مثال ۱۲-۱۷.



## فصل ۱۲. درخت ها

۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی  
مثال ۱۲-۱۷.



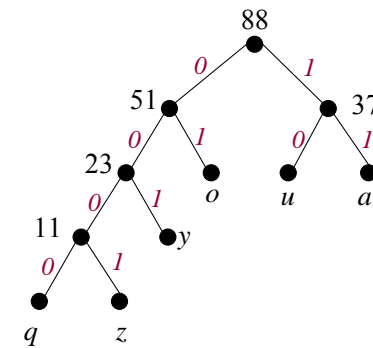
N. Razavi - DM course - 2006

49



## فصل ۱۲. درخت ها

۴-۱۲. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی  
مثال ۱۲-۱۷.



a: 11

o: 01

q: 0000

u: 10

y: 001

z: 0001

N. Razavi - DM course - 2006

50