کتابچه نمونه سوالات چیست:

سایت ما **افتخار** دارد برای اولین بار در ایران توانسته است کتابچه نمونه سوالات تمام دروس پیام نور که هر یک حاوی تمامی آزمون های برگزار شده پیام نور (تمامی نیمسالهای موجود حتی الامکان با جواب) را در یک فایل به نام کتابچه جمع آوری کند و هر ترم نیز آن را آپدیت نماید.

مراحل ساخت یک کتابچه نمونه سوال

(برای آشنایی با زحمت بسیار زیاد تولید آن در هر ترم) :

دسته بندی فایلها – سرچ بر اساس کد درس – چسباندن سوال و جواب – پیدا کردن یک درس در نیمسالهای مختلف و چسباندن به کتابچه همان درس – چسباندن نیمسالهای مختلف یک درس به یکدیگر – وارد کردن اطلاعات تک تک نیمسالها در سایت – آپلود کتابچه و خیلی موارد دیگر..

همچنین با توجه به تغییرات کدهای درسی دانشگاه استثنائات زیادی در ساخت کتابچه بوجود می آید که کار ساخت کتابچه را بسیار پیچیده می کند .

WWW.PNUEB.COM

فهرست مطالب

عنوان صفحه

حل تمرین‌های خودآزمایی ۱ ..... ۴
حل تمرین‌های خودآزمایی ۲ ..... ۱۸
حل تمرین‌های خودآزمایی ۳ ..... ۲۸
حل تمرین‌های خودآزمایی ۴ ..... ۳۹
حل تمرین‌های خودآزمایی ۵ ..... ۵۱
حل تمرین‌های خودآزمایی ۶ ..... ۷۷
حل تمرین‌های خودآزمایی ۷ ..... ۸۸
حل تمرین‌های خودآزمایی ۸ ..... ۹۵
حل تمرین‌های خودآزمایی ۹ ..... ۱۱۵

حل تمرین‌های خودآزمایی ۱

۱ـ درستی تساویهای زیر را ثابت کنید

$$\text{(i)} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$\text{(ii)} \quad \arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1} \qquad (|z_1| = |z_2| = |z_3|)$$

حل: (i) کافیست در مثال ۶ به جای θ قرار دهید $-\theta$ تا نتیجه به‌دست آید.

(ii) چون $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ پس می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{\cos\theta_3 + i\sin\theta_3 - \cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_3 + i\sin\theta_3 - \cos\theta_1 - i\sin\theta_1}$$

$$= \frac{(\cos\theta_3 - \cos\theta_2) + i(\sin\theta_3 - \sin\theta_2)}{(\cos\theta_3 - \cos\theta_1) + i(\sin\theta_3 - \sin\theta_1)}$$

$$= \frac{-2\sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_3 + \theta_2}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_3 + \theta_2}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_3 + \theta_1}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_3 + \theta_1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right)} \cdot \frac{-\sin\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right)+i\cos\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\right)+i\cos\left(\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\right)}$$

$$= R\frac{\cos\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\right)}$$

که $R=\dfrac{\sin(\frac{\theta_3-\theta_2}{2})}{\sin(\frac{\theta_3-\theta_1}{2})}$، حال با آرگومان گرفتن از طرفین خواهیم داشت

$$\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\right)=\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right)-\left(\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\right)=\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)$$
$$=\frac{1}{2}(\arg z_2-\arg z_1)=\frac{1}{2}\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

۲ـ با استفاده از فرمول دوموآور نشان دهید که

(i) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(ii) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(iii) $\left(\dfrac{\cot\theta+i}{\cot\theta-i}\right)^n = \dfrac{\cot n\theta+i}{\cot n\theta-i}$

(iv) $\left(\sqrt{3}-i\right)^n+\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

حل: (i) و (ii) در فرمول دوموآور قرار دهید $n=3$. نتیجه می‌گیریم

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$
$$\Rightarrow (\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta)$$
$$=[\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)]$$
$$=[\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)+i(3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta)]$$
$$=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

با مقایسه طرفین تساوی نتیجه می‌گیریم:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(iii) داریم:

$$\left[\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)/\sin\theta}{(\cos\theta-i\sin\theta)/\sin\theta}\right]^n=\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n$$
$$=\frac{\cos n\theta-i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta}$$

صورت و مخرج را بر $\sin n\theta$ تقسیم می کنیم خواهیم داشت

$$\left(\frac{(\cos n\theta+i\sin n\theta)/\sin n\theta}{(\cos n\theta-i\sin n\theta)/\sin n\theta}\right)=\frac{\cot n\theta+i}{\cot n\theta-i}$$

(iv) $\sqrt{۳}-i$ و $\sqrt{۳}+i$ را به شکل قطبی می‌نویسیم داریم:

$$\sqrt{۳}-i\Rightarrow \begin{matrix}x=\sqrt{۳}\\ y=-۱\end{matrix}\Rightarrow r=۲\ ,\theta=\tan^{-۱}\frac{-۱}{\sqrt{۳}}=-\frac{\pi}{۶}$$
$$\Rightarrow\sqrt{۳}-i=۲\left(\cos\left(\frac{-\pi}{۶}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{۶}\right)\right)=۲\left(\cos\frac{\pi}{۶}-i\sin\frac{\pi}{۶}\right)$$

بطریقی مشابه برای $\sqrt{۳}+i$ داریم $r=۲$ و $\theta=\frac{\pi}{۳}$ در اینصورت

$$\sqrt{۳}+i=۲\left(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶}\right)$$

در نتیجه:

$$(\sqrt{۳}-i)^n-(\sqrt{۳}+i)^n=\left[۲(\cos\frac{\pi}{۶}-i\sin\frac{\pi}{۶})\right]^n$$
$$+\left[۲(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶})\right]^n$$
$$=۲^n\left(\cos\frac{n\pi}{۶}-i\sin\frac{n\pi}{۶}\right)+۲^n\left(\cos\frac{n\pi}{۶}+i\sin\frac{n\pi}{۶}\right)=۲^{n+۱}\cos\frac{n\pi}{۶}.$$

۳ـ با استفاده از اتحاد

$$۱+z+z^۲+\cdots+z^n=\frac{۱-z^{n+۱}}{۱-z}\qquad(z\neq۱)$$

و اینکه $۰<\theta<۲\pi$ ثابت کنید

(i) $۱+\cos\theta+\cos۲\theta+\cdots+\cos n\theta=\cos\left(n\frac{\theta}{۲}\right)\sin\left[(n+۱)\frac{\theta}{۲}\right]/\sin\frac{\theta}{۲}$

(ii) $\sin\theta+\sin۲\theta+\cdots+\sin n\theta=\sin\left(n\frac{\theta}{۲}\right)\sin\left[(n+۱)\frac{\theta}{۲}\right]/\sin\frac{\theta}{۲}$

حل: با قرار دادن $z=\cos\theta+i\sin\theta$ در رابطه داده شده و با استفاده از فرمول دوموآور داریم

$$۱+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos۲\theta+i\sin۲\theta)+\cdots+(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$= \frac{۱ - (\cos n\theta - i \sin n\theta)}{۱ - (\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$\Rightarrow (۱ + \cos\theta + \cos ۲\theta + \cdots + \cos n\theta) + i(\sin\theta + \sin ۲\theta + \cdots + \sin n\theta)$$

$$= \frac{۱ - \cos n\theta - i\sin n\theta}{۱ - \cos\theta - i\sin\theta}$$

صورت و مخرج سمت راست را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{(۱ - \cos n\theta - i\sin n\theta)(۱ - \cos\theta + i\sin\theta)}{(۱ - \cos\theta)^۲ + \sin^۲\theta}$$

$$= \frac{(۱ - \cos n\theta)(۱ - \cos\theta) + \sin\theta\sin n\theta + i\sin\theta(۱ - \cos n\theta)) - i\sin n\theta(۱ - \cos\theta))}{۱ + \cos^۲\theta - ۲\cos\theta + \sin^۲\theta}$$

کافیست صورت و مخرج را ساده کنیم. می‌گیریم

$$= \frac{۱ - \cos\theta - \cos n\theta + \cos(n-۱)\theta}{۴\sin^۲\frac{\theta}{۲}} + i\frac{\sin\theta - \sin n\theta + \sin(n-۱)\theta}{۴\sin^۲\frac{\theta}{۲}}$$

$$= \frac{\cos\left(n\frac{\theta}{۲}\right)\sin\left[(n+۱)\frac{\theta}{۲}\right]}{\sin\frac{\theta}{۲}} + i\frac{\sin\left(n\frac{\theta}{۲}\right)\sin\left[(n+۱)\frac{\theta}{۲}\right]}{\sin\frac{\theta}{۲}}$$

با مقایسه طرفین تساوی نتایج (i) و (ii) را خواهیم داشت.

۴ـ نشان دهید

$$\text{(i)} \quad |z_۱ + z_۲|^۲ + |z_۱ - z_۲|^۲ = ۲|z_۱|^۲ + ۲|z_۲|^۲$$

$$\text{(ii)} \quad |x| + |y| \leq \sqrt{۲}|z|$$

حل: (i)

$$|z_۱ + z_۲|^۲ - |z_۱ - z_۲|^۲ = (z_۱ + z_۲)(\overline{z}_۱ + \overline{z}_۲) + (z_۱ - z_۲)(\overline{z}_۱ - \overline{z}_۲)$$

$$= z_۱\overline{z}_۱ + z_۲\overline{z}_۱ + z_۱\overline{z}_۲ + z_۲\overline{z}_۲ + z_۱\overline{z}_۱ - z_۱\overline{z}_۲ - z_۲\overline{z}_۱ + z_۲\overline{z}_۲$$

$$= ۲(z_۱\overline{z}_۱ + z_۲\overline{z}_۲)$$

$$= ۲(|z_۱|^۲ + |z_۲|^۲)$$

(ii) : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ، $|x|^۲ + |y|^۲ = x^۲ + y^۲ = |z|^۲$، از طرفی داریم $(|x| - |y|)^۲ \geq ۰$ یعنی $|x|^۲ + |y|^۲ \geq ۲|x||y|$ بنابراین اگر بر طرفین رابطه بالا $۲|x||y|$ را اضافه می‌کنیم و این نامساوی را بکار ببریم نتیجه می‌گیریم

$$|x|^۲ + |y|^۲ + ۲|x||y| = |z|^۲ + ۲|x||y| \leq |z|^۲ + |x|^۲ + |y|^۲ = ۲|z|^۲$$

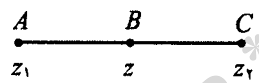
پس $|z|^2 \le 2(|x|+|y|)^2$. با جذرگرفتن از طرفین نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

۵ـ ثابت کنید عبارت $\cos n\theta + z\sin n\theta - (\cos\theta + z\sin\theta)^n$ بر z^2+1 بخش‌پذیر است.

حل: کافیست نشان دهیم این عبارت به‌ازای $z=\pm i$ صفر می‌شود. داریم

$$z=i:\ \cos n\theta + i\sin n\theta - (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$
$$= \cos n\theta + i\sin n\theta - \cos n\theta - i\sin n\theta = 0$$
$$z=-i:\ \cos n\theta - i\sin n\theta - (\cos\theta - i\sin\theta)^n$$
$$= \cos n\theta - i\sin n\theta - \cos n\theta + i\sin n\theta = 0$$

۶ـ نشان دهید مرکز ثقل سیستمی شامل یک جرم m_1 مستقر در نقطه z_1 و جرم m_2 مستقر در z_2 عبارت است از $\dfrac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}$.



حل: داریم $m_1AB = m_2BC$، یا به عبارت دیگر $m_1(z-z_1) = m_2(z_2-z)$ که از آن $z = \dfrac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}$.

۷ـ ثابت کنید هر عدد مختلط $z \ne -1$ به هنگ یک را می‌توان به صورت $z = \dfrac{1+it}{1-it}$ نمایش داد که در آن t پارامتر حقیقی است

حل: چون $|z|=1$ پس می‌توانیم بنویسیم $z=\cos\theta + i\sin\theta$ از آنجائیکه

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\ ,\qquad \sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

در نتیجه

$$z = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} + i\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2} + i2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$
$$= \frac{(1+i\tan\frac{\theta}{2})^2}{(1+i\tan\frac{\theta}{2})(1-i\tan\frac{\theta}{2})} = \frac{1+i\tan\frac{\theta}{2}}{1-i\tan\frac{\theta}{2}}$$

کافی است فرض کنیم $\tan\frac{\theta}{2} = t$ تا نتیجه مورد نظر بدست آید.

۸ـ ثابت کنید اگر $B\overline{B} > (A+\overline{A})(C+\overline{C})$ آنگاه معادله زیر نمایش یک دایره است $(A+\overline{A})z\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + (C\overline{C}) = 0$.

حل: در مثال (۴) نشان دادیم که معادله هر دایره را می‌توان بصورت

$$Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}+D=0$$

نوشت که در آن A و D اعداد حقیقی هستند حال در معادله داده شده در صورت مسئله اگر فرض کنیم $A+\overline{A}=A'$ (عدد حقیقی) چون $A+\overline{A}$ (عدد حقیقی است) همچنین چون $C+\overline{C}$ هم حقیقی است اگر آنرا مساوی D انتخاب کنیم و عدد مختلط $\overline{E}$ را B در نظر بگیریم در اینصورت معادله داده شده همان دایره قبلی است. برای درستی شرط داده شده کافیست شرط داده شده در مثال ۴ را برحسب مفروضات انتخاب شده بنویسید.

۹ـ معادلات زیر را حل کنید

$$\text{(i) } z^4-z^3+z^2-z+1=0 \qquad \text{(ii) } z^6+2z^3+2=0$$
$$\text{(iii) } (z-i)^m-(z+i)^m=0 \qquad \text{(iv) } z^n+\overline{z}^n=0$$
$$\text{(v) } z^8-15iz^4+16=0 \qquad \text{(vi) } z^4-4z^3+6z^2-4z=15$$

حل: (i) چون $z+1\neq 0$، طرفین معادله داده شده را در آن ضرب می‌کنیم خواهیم داشت

$$(z^4-z^3+z^2-z+1)(z+1)=0 \Rightarrow z^5+1=0$$

پس جوابهای معادله $z^5+1=0$ را بدست می‌آوریم. می‌نویسیم

$$z^5=-1=\cos\pi+i\sin\pi=\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi$$

از طرفین ریشه پنجم می‌گیریم، خواهیم داشت

$$z=\cos(2k+1)\frac{\pi}{5}+i\sin(2k+1)\frac{\pi}{5}$$

که در آن $k=0,1,3,4$. برای این $k\neq 2$ است چون $z\neq -1$.

(ii) با فرض $z^3=A$ معادله $A^2+2A+2=0$ را داریم که از آن $A=-1\pm\sqrt{-1}=-1\pm i$ حال قرار دهید $z^3=-1+i$ و $z^3=-1-i$ از اولی $r=\sqrt{2}$ و $\theta=\frac{3\pi}{4}$ و از دومی $r=\sqrt{2}$ و $\theta=-\frac{3\pi}{4}$. در نتیجه:

$$z^3=\sqrt{2}(\cos(2k\pi+\frac{3\pi}{4})+i\sin(2k\pi+\frac{3\pi}{4}))$$
$$\Rightarrow z=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4})$$
$$z^3=\sqrt{2}(\cos(2k\pi-\frac{3\pi}{4})+i\sin(2k\pi-\frac{3\pi}{4}))$$
$$\rightarrow z=\sqrt[6]{2}(\cos(2k-\frac{3}{4})\frac{\pi}{3}+i\sin(2k-\frac{3}{4})\frac{\pi}{3})$$

که در هر دوی آنها $k = ۰, ۱, ۲$.

(iii) می‌نویسیم $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^m = ۱$ که با فرض $\frac{z-i}{z+i} = a$ معادله $a^m = ۱$ را خواهیم داشت. از حل این معادله چون $r = ۱$ و $\theta = ۰$ می‌گیریم

$$a = \cos\frac{۲k\pi}{m} + i\sin\frac{۲k\pi}{m} \quad , m = ۰, ۱, ۲, \cdots, m-۱$$

حال بجای a قرار دهید $\frac{z-i}{z+i}$ و سپس z را بیابید.

(iv) همانند معادله بالا می‌نویسیم $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n = -۱$ و فرض می‌کنیم $a = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)$ در نتیجه معادله تبدیل می‌شود به $a^n = -۱$ که از آن $r = ۱$ و $\theta = \pi$ پس $a = \cos(۲k+۱)\frac{\pi}{n} + i\sin(۲k+۱)\frac{\pi}{n}$ در ادامه به جای a قرار دهید $\frac{z}{\bar{z}}$ و صورت مخرج را در z ضرب کنید.

(v) قرار دهید $z^۴ = A$ در نتیجه حل معادله $A^۲ - ۱۵iA + ۱۶ = ۰$ مورد نظر خواهد بود. از حل این معادله $A = ۱۶i$ و $A = -i$ پس کافیست جوابهای معادله $z^۴ = ۱۶i$ و $z^۴ = -i$ را بدست آوریم که حل این معادلات را می‌دانیم.

(vi) سمت چپ معادله را به صورت $(z-۱)^۴ - ۱$ می‌نویسیم در نتیجه معادله تبدیل می‌شود به $(z-۱)^۴ = ۱۶$ که از آن $r = ۱۶$ و $\theta = ۰$ پس

$$(z-۱)^۴ = ۱۶(\cos ۲k\pi + i\sin ۲k\pi) \Rightarrow z - ۱ = ۲(\cos\frac{k\pi}{۲} + i\sin\frac{k\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow z = ۱ + ۲(\cos\frac{k\pi}{۲} + i\sin\frac{k\pi}{۲}), \quad k = ۰, ۱, ۲, ۳$$

۱۰ـ ثابت کنید اگر z ریشه معادله $a_n z^n + a_{n-۱}z^{n-۱} + \ldots + a_۱ z + a_۰ = ۰$ باشد آنگاه $\bar{z}$ هم‌ریشه این معادله است در صورتیکه a_iها اعداد حقیقی باشند.

حل: داریم

$$a_n z^n + a_{n-۱}z^{n-۱} + \ldots + a_۱ z + a_۰ = ۰$$

$$\Rightarrow \overline{(a_n z^n + a_{n-۱}z^{n-۱} + \ldots + a_۱ z + a_۰)} = ۰$$

$$\Rightarrow \overline{a_n z^n + a_{n-۱}z^{n-۱} + \ldots + a_۱ z + \bar{a}_۰} = ۰$$

چون ضرایب اعداد حقیقی‌اند پس

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-۱}\bar{z}^{n-۱} + \ldots + a_۱\bar{z} + a_۰ = ۰$$

$$\Rightarrow a_n \bar{z}^n + a_{n-۱}\bar{z}^{n-۱} + \ldots + a_۱\bar{z} + a_۰ = ۰$$

چون $(\overline{z^n}) = (\bar{z})^n$.

۱۱ـ با فرض $z = \cos\theta + i\sin\theta$ نشان دهید $۲\cos n\theta = z^n + \bar{z}^n$ و آنگاه با استفاده از آن ثابت کنید معادله $۳z^۴ - z^۳ + ۲z^۲ - z + ۳ = ۰$ ریشه حقیقی ندارد.

حل: با استفاده از فرمول دموآور $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$، $z^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$ که با جمع این دو نتیجه خواسته شده بدست می‌آید.

معادله را به صورت زیر دوباره نویسی می‌کنیم

$$z^{۲}(۳z^{۲} - z + ۲ - \frac{۱}{z} + \frac{۳}{z^{۲}}) = ۰$$

که چون $z \neq ۰$ پس $۳z^{۲} - z + ۲ - \frac{۱}{z} + \frac{۳}{z^{۲}} = ۰$. این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$۳(z^{۲} + z^{-۲}) - (z + z^{-۱}) + ۲ = ۰$$

که با توجه به $z^n + z^{-n} = ۲\cos n\theta$ می‌توان نوشت

$$۶\cos ۲\theta - ۲\cos\theta + ۲ = ۰ \to ۳\cos ۲\theta - \cos\theta + ۱ = ۰$$

چون $\cos ۲\theta = ۲\cos^{۲}\theta - ۱$ پس داریم $۶\cos^{۲}\theta - \cos\theta - ۲ = ۰$ که از آن

$$\cos\theta = \frac{۱ \pm \sqrt{۴۹}}{۱۲} = \frac{۱ \pm ۷}{۱۲} \to \cos\theta = -\frac{۱}{۲}, \cos\theta = \frac{۲}{۳}$$

یعنی $\theta = \frac{۲\pi}{۳}$ یا $\theta = \arccos\frac{۲}{۳}$ که بەازای هر یک از آنها $\sin\theta \neq ۰$ یعنی z قسمت موهومی غیر صفر دارد بعبارتی دیگر z نمی‌تواند عددی حقیقی باشد

۱۲ـ ثابت کنید عبارت $(a^{۲} + ۱)(b^{۲} + ۱)(c^{۲} + ۱)$ را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عدد نوشت.

حل: چون $z\overline{z} = x^{۲} + y^{۲}$ از طرفی $a^{۲} + ۱ = (a + i)(a - i)$, $b^{۲} + ۱ = (b + i)(b - i)$ و $c^{۲} + ۱ = (c + i)(c - i)$ در نتیجه

$$\begin{aligned}(a^{۲} + ۱)(b^{۲} + ۱)(c^{۲} + ۱) &= (a + i)(a - i)(b + i)(b - i)(c + i)(c - i)\\ &= ((a + i)(b + i)(c + i))((a - i)(b - i)(c - i)) \Rightarrow z\overline{z} = x^{۲} + y^{۲}\end{aligned}$$

یعنی حاصل ضرب داده شده برابر مجموع مربعات دو عدد است. این مسئله را می‌توان برای هر عبارت نظیر $(a_۱^{۲} + ۱)(a_۲^{۲} + ۱)(\cdots)(a_n^{۲} + ۱)$ هم تعمیم داد.

۱۳ـ ثابت کنید اگر $|z| = ۱$ آنگاه $\left|\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}\right| = ۱$.

حل: داریم

$$\begin{aligned}\left|\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}\right|^{۲} &= \left(\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}\right)\overline{\left(\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}\right)}\\ &= \left(\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}\right)\left(\frac{\overline{a}\overline{z} + \overline{b}}{b\overline{z} + a}\right) = \frac{a\overline{a}z\overline{z} + a\overline{b}z + b\overline{a}\overline{z} + b\overline{b}}{b\overline{b}z\overline{z} + a\overline{b}z + b\overline{a}\overline{z} + a\overline{a}}\end{aligned}$$

چون $z\overline{z} = |z|^{۲} = ۱$ پس صورت و مخرج کسر یکی است و نتیجه بدست می‌آید.

۱۴ـ نشان دهید اگر $|z_۱| = ۱$ یا $|z_۲| = ۱$ و $\overline{z}_۱ z_۲ \neq ۱$، آنگاه $\left|\frac{z_۱ - z_۲}{۱ - \overline{z}_۱ z_۲}\right| = ۱$.

حل: داریم

$$\left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1z_2}\right|^2=\left(\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1z_2}\right)\overline{\left(\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1z_2}\right)}$$
$$=\left(\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1z_2}\right)\left(\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2}{1-z_1\overline{z}_2}\right)=\frac{z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2}{1-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2+z_1\overline{z}_1z_2\overline{z}_2}$$

فرض کنید $z_1\overline{z}_1=1$ در اینصورت صورت و مخرج یکی می‌شوند و نتیجه مورد نظر بدست می‌آید اگر فرض کنیم $z_2\overline{z}_2=1$ باشد باز هم صورت و مخرج یکی می‌شوند. کافی است از طرفین جذر بگیریم.

۱۵ـ اگر z_1، z_2 و z_3 اعداد مختلط با طول مساوی باشند و داشته باشیم $z_1+z_2+z_3=0$ ثابت کنید اولاً $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0$ ثانیاً $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.

حل: فرض کنید $|z_1|=|z_2|=|z_3|=A$ پس $z_1\overline{z}_1=z_2\overline{z}_2=z_3\overline{z}_3=A^2$ یعنی $z_1=\frac{A^2}{\overline{z}_1}$، $z_2=\frac{A^2}{\overline{z}_2}$ و $z_3=\frac{A^2}{\overline{z}_3}$ به این ترتیب

$$z_1+z_2+z_3=\frac{A^2}{\overline{z}_1}+\frac{A^2}{\overline{z}_2}+\frac{A^2}{\overline{z}_3}=A^2\left(\frac{1}{\overline{z}_1}+\frac{1}{\overline{z}_2}+\frac{1}{\overline{z}_3}\right)$$
$$=A^2\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=0$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\overline{z}_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0$$

برای اثبات قسمت دوم، از تساوی بدست آمده در قسمت اول بعد از مخرج مشترک گرفتن می‌رسیم به

$$\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}=0\Rightarrow z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=0$$

از طرفی $z_1+z_2+z_3=0$ که از آن $(z_1+z_2+z_3)^2=0$ یعنی

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)=0$$

چون $z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3=0$ پس نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

۱۶ـ اگر z_1، z_2 و z_3 رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند ثابت کنید

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_3+z_2z_3+z_1z_2$$

حل: هر مثلث متساوی‌الاضلاع با رأسهای z_1 و z_2 و z_3 با خود مثلث مشابه است پس اگر اول مثلثی به رأسهای z_1, z_2, z_3 و سپس همان مثلث با رأسهای z_1، z_3، z_2 در نظرگرفته شود با استفاده از خاصیت تشابه داریم $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ که از آن به راحتی با طرفین، وسطین نمودن نتیجه بدست می‌آید.

۱۷ـ نشان دهید معادله $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a+ib$ ریشه‌های حقیقی دارد اگر و تنها اگر $a^2+b^2=1$ باشد که در آن a و b اعداد حقیقی و n عدد طبیعی است.

حل: فرض کنید z عدد حقیقی باشد یعنی $z=x$ در اینصورت

$$\left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| = \left|\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n\right| = \frac{|(1+ix)|^n}{|(1-ix)|^n} = 1$$

چون صورت و مخرج مزدوج همدیگراند و از نظر طولی با هم برابرند پس باید $a^2+b^2=1$.
برعکس فرض کنید $a^2+b^2=1$ باشد در نتیجه

$$\left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Rightarrow |(1+iz)^n| = |(1-iz)^n|$$

$$\Rightarrow |1+iz| = |1-iz| \Rightarrow |1-y+ix| = |1+y-ix|$$

$$\Rightarrow (1-y)^2+x^2 = (1+y)^2+x^2 \Rightarrow (1-y)^2 = (1+y)^2 \Rightarrow y=0$$

پس $z=x+iy=x$ یعنی z عددی حقیقی است.

۱۸ـ نشان دهید معادله $|z+i|+|z-i|=k$ نمایش هذلولی است اگر $k=1$ و خط راست است اگر $k=2$ باشد.

حل: معادله را به صورت $|x+i(y+1)|+|x+i(y-1)|=k$ می‌نویسیم.
فرض کنید $k=1$ باشد در اینصورت با مجذورکردن طرفین تساوی می‌گیریم

$$x^2+(y+1)^2+x^2+(y-1)^2+2\sqrt{(x^2+(y+1)^2)(x^2+(y-1)^2)} = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(x^2+(y+1)^2)(x^2+(y-1)^2)} = -1-2(x^2+y^2)$$

مجدداً طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم خواهیم داشت

$$4(x^2+(y+1)^2)(x^2+(y-1)^2) = 1+4(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)^2$$

$$4(x^4+2x^2y^2+2x62+y^4-2y^2+1) = 1+4(x^2+y^2)+4(x^4+y^4+2x^2y^2)$$

که بعد از ساده کردن آن می‌رسیم به معادله $12y^2-4x^2=3$ که معادله یک هذلولی است.
در حالتی که $k=2$ باشد در اینصورت با مجذورکردن طرفین تساوی می‌گیریم

$$x^2+(y+1)^2+x^2+(y-1)^2+2\sqrt{(x^2+(y+1)^2)(x^2+(y-1)^2)} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x^2+(y+1)^2)(x^2+(y-1)^2)} = 1-(x^2+y^2)$$

طرفین را بار دیگر به توان ۲ می‌رسانیم

$$(x^2+(y+1)^2)(x^2+(y-1)^2) = 1-4(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2$$

که بعد از ساده کردن طرفین تساوی می‌رسیم به رابطه $۲y^۲ = ۴x^۲$ یعنی $۲x^۲ - y^۲ = ۰$ یا بعبارت دیگر $(\sqrt{۲}x - y)(\sqrt{۲}x + y) = ۰$ که از آن $y = \pm\sqrt{۲}x$ که در هر حالت معادله خط خواهد بود.

۱۹ـ نشان دهید اگر پارامتر حقیقی t از صفر تا یک تغییر کند نقطه $z_۱ + t(z_۲ - z_۱)$ خطی را توصیف می‌کند که $z_۱$ را به $z_۲$ متصل می‌کند.

حل: معادله خطی که از دو نقطه $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$\frac{y - y_۱}{y_۲ - y_۱} = \frac{x - x_۱}{x_۲ - x_۱} = t$$

که از آن $y = y_۱ + t(y_۲ - y_۱)$ و $x = x_۱ + t(x_۲ - x_۱)$ از طرفی $z = x + iy$ می‌تواند معرف نقطه‌ای روی خط راست باشد پس

$$z = x + iy = x_۱ + t(x_۲ - x_۱) + i(y_۱ + t(y_۲ - y_۱))$$

که با دوباره نویسی آن بصورت

$$z = x_۱ + iy_۱ + t(x_۲ + iy_۲) - (x_۱ + iy_۱) = z_۱ + t(z_۲ - z_۱)$$

با این فرض که $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy$. اگر $t = ۰$ شود در اینصورت $z = z_۱$ و اگر $t = ۱$ اختیار شود $z = z_۲$. یعنی رابطه حاصل خطی را توصیف می‌کند که نقطه $z_۱$ را به $z_۲$ وصل می‌کند.

۲۰ـ می‌دانیم وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه $z_۲$ و $z_۳$ عبارت است از $\frac{z_۲ + z_۳}{۲}$ نشان دهید معادله پارامتری میانه رسم شده از نقطه $z_۱$ عبارت است از $z = (۱ - t)z_۱ + (z_۲ + z_۳)\frac{t}{۳}$ و با توجه به این رابطه ثابت کنید سه میانه مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

حل: از تمرین ۱۹ استفاده می‌کنیم چون میانه از نقطه $z_۱$ و $\frac{z_۱ + z_۳}{۲}$ می‌گذرد پس معادله پارامتری آن می‌تواند چنین باشد

$$z = z_۱ + t\left(\frac{z_۲ + z_۳}{۲} - z_۱\right) = (۱ - t)z_۱ + (z_۲ + z_۳)\frac{t}{۲}$$

به این ترتیب معادلات میانه‌های دیگر چنین می‌شوند

$$z = (۱ - t)z_۲ + (z_۱ + z_۳)\frac{t}{۲}$$
$$z = (۱ - t)z_۳ + (z_۱ + z_۲)\frac{t}{۲}$$

دو تای اول را با هم قطع می‌دهیم می‌گیریم

$$(۱ - t)z_۱ + (z_۲ + z_۳)\frac{t}{۲} = (۱ - t)z_۲ + (z_۱ + z_۳)\frac{t}{۲}$$
$$\Rightarrow (۱ - t)(z_۱ - z_۲) = (z_۱ - z_۲)\frac{t}{۲}$$

چون $z_۱ - z_۲ \neq ۰$ پس باید $۱ - t = \frac{t}{۲}$ یعنی $t = \frac{۲}{۳}$

اگر بطریقی مشابه برای میانه‌های دیگر انجام دهیم مجدداً $t = \frac{۲}{۳}$ می‌شود که نشان می‌دهد سه میانه همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کند.

حل آزمونهای چهار جوابی

۱. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اعداد مختلط زیر مجموعه اعداد حقیقی‌اند

ب) اعداد حقیقی زیر مجموعه اعداد مختلط‌اند

ج) حاصل ضرب دو عدد مختلط همیشه عدد مختلط می‌شود

د) مجموع دو عدد مختلط هیچگاه یک عدد حقیقی نمی‌شود

حل: گزینه ب درست است زیرا در عدد مختلط $z = x + iy$ اگر $y = ۰$ انتخاب شود $z = x$ را خواهیم داشت که عددی حقیقی است.

۲. کدام رابطه داده شده زیر درست است؟

الف) $Re(iz) = I_m z$ ب) $I_m(iz) = Rez$ ج) $Re(z^۲) = x^۲$ د) $I_m(z^۲) = xy$

حل: گزینه ب درست است. چون

$$I_m(iz) = I_m(ix - y) = x = Rez$$

۳. شکل قطبی عدد مختلط $۱ + i$ عبارت است

الف) $\sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$ ب) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\cos\frac{۳\pi}{۴} - i\sin\frac{۳\pi}{۴}\right)$

ج) $\cos\frac{\pi}{۲} + i\sin\frac{\pi}{۲}$ د) $\sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} - i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$

حل: براحتی می‌توان دریافت که گزینه الف درست است زیرا، $r = \sqrt{۲}$ و $\theta = \tan^{-۱}\frac{۱}{۱} = \frac{\pi}{۴}$ پس

$$۱ + i = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

۴. معادله $z^۴ + ۸۱ = ۰$ دارای

الف) چهار ریشه حقیقی است ب) یک ریشه حقیقی است

ج) دو ریشه حقیقی است د) ریشه حقیقی ندارد

حل: اگرچه هر معادله درجه n دقیقاً، بنابر قضیه‌ای اساسی جبر، n ریشه دارد امّا این ریشه‌ها می‌تواند مختلط یا حقیقی باشند در معادله بالا چون مجموع دو عدد مثبت هیچوقت صفر نمی‌شود پس ریشه‌ها باید مختلط باشند بعبارتی در اینجا گزینه د صحیح است.

۵. معادله $z^{۵} + ۳۲ = ۰$

الف) پنج ریشه حقیقی دارد
ب) یک ریشه حقیقی دارد
ج) ریشه حقیقی ندارد
د) سه ریشه حقیقی دارد

حل: معادله را به صورت $(z+۲)(z^{۴} - ۲z^{۳} + ۴z^{۲} - ۸z + ۱۶) = ۰$ می‌نویسیم که از آن $z + ۲ = ۰$ یعنی $z = -۲$ امّا معادله $z^{۴} - ۲z^{۳} + ۴z^{۲} - ۸z + ۱۶ = ۰$ ریشه حقیقی ندارد در نتیجه گزینه ب درست است

۶. یکی از مقادیر $\{(-۱)^{\frac{۱}{۴}}\}^{۲}$ برابر است با

الف) i
ب) $۱ - i$
ج) $۱ + i$
د) $۲i$

حل: گزینه الف درست است زیرا

$$\{(-۱)^{\frac{۱}{۴}}\}^{\frac{۱}{۲}} = \left[(\cos(۲k\pi + \pi) + i\sin(۲k\pi + \pi))^{\frac{۱}{۴}}\right]^{۲}$$
$$= \left[\cos\left(\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}\right)\right]^{۲}$$
$$k = ۰, ۱, ۲, ۳$$

با انتخاب $k = ۰$ می‌گیریم

$$\{(-۱)^{\frac{۱}{۴}}\}^{۲} = \left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)^{۲} = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲} = i$$

۷. کدامیک از معادلات زیر نمایش هذلولی $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ است.

الف) $z\overline{z} = ۱$
ب) $z^{۲} - \overline{z}^{۲} = ۱$
ج) $(z + \overline{z})^{۲} = ۱$
د) $z^{۲} + \overline{z}^{۲} = ۲$

حل: داریم $x = \frac{z + \overline{z}}{۲}$ و $y = \frac{z - \overline{z}}{۲i}$. در نتیجه

$$x^{۲} - y^{۲} = \left(\frac{z + \overline{z}}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{z - \overline{z}}{۲i}\right)^{۲} = \frac{z^{۲} + \overline{z}^{۲}}{۲} = ۱ \Rightarrow z^{۲} + \overline{z}^{۲} = ۲$$

پس گزینه د درست است.

۸. مزدوج عدد $\frac{۲}{۱ - i}$ برابر است با

الف) $۱ + i$
ب) $۱ - i$
ج) $۲i$
د) $۱ - ۲i$

حل: براحتی می‌توان دریافت که گزینه ب درست است زیرا مزدوج این عدد $\frac{۲}{۱ + i}$ است. اما

$$\frac{۲}{۱ + i} = \frac{۲(۱ - i)}{۲} = ۱ - i$$

۹. کدامیک از روابط زیر درست است؟

الف) $\arg(z^n) = (\arg z)^n$

ب) $|z|^n = n|z|$

ج) $\arg(z^n) = n\arg z$

د) $\arg z_۱ z_۲ = \arg z_۱ \arg z_۲$

حل: با استفاده از فرمول دوموآر بدیهی است که اگر z به توان n برسد مقدار θ یا بعبارتی دیگر $\arg z$، n برابر می‌شود پس گزینه ج درست است

۱۰. مقدار $\frac{۱۲۸}{(۱+i)^{۲۰}}$ برابر است با

الف) $-\frac{۱}{۸}$

ب) $-\frac{۱}{۴}$

ج) $۴(۱-i)$

د) $۴(۱+i)$

حل: گزینه الف، زیرا داریم

$۱+i = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$ پس $۱۲۸(۱+i)^{-۲۰} = (\sqrt{۲})^{-۲۰}(\cos ۵\pi - i\sin ۵\pi) = -۲^{-۳}$

در نتیجه $\frac{۱۲۸}{(۱+i)^{۲۰}} = -\frac{۱}{۸}$.

حل تمرین‌های خودآزمایی ۲

۱ـ فرض می‌کنیم S مجموعه نقاط $z = x + iy$ است که در داخل مربعی با رئوس به مختصات $(۰,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۱,i)$ و $(۰,i)$ واقعند و x و y اعداد گویا هستند

(i) آیا S کراندار است ؟ (ii) نقاط حدی آنرا مشخص کنید (iii) آیا S بسته است؟

(iv) نقاط داخلی و مرزی آنرا مشخص کنید

(v) آیا S همبند است؟ آیا یک ناحیه باز است؟ بست S چیست؟

حل: (i) آری

(ii) هر نقطه داخل و روی مربع نقاط حدی مجموعه به حساب می‌آیند.

(iii) اگر نقاط داخل مربع مورد نظر باشند این مجموعه بسته نخواهد بود.

(iv) همه نقاط مربع، نقاط مرزی هستند، نقاط داخلی ندارند.

(v) خیر ـ خیر ـ بست S مجموعه همه نقاط داخل و روی مرز مربع خواهد بود

۲ـ نشان دهید ± ۱ نقاط حدی مجموعه $S = \{\frac{۱}{۲}, -\frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, -\frac{۴}{۵}, \cdots\}$ است

حل: چون حد دنباله به سمت ± ۱ میل می‌کند پس هر دو نقطه، نقطه حدی‌اند زیرا مثلاً برای $+۱$ هر همسایگی آن شامل نقطه‌ای از مجموعه S است.

۳ـ ثابت کنید تابع $f(z)=\begin{cases}\frac{I_m z^{۲}}{|z|^{۲}} & ,z\neq ۰\\ ۰ & ,z=۰\end{cases}$ در z پیوسته نیست.

حل: داریم $f(z)=\begin{cases}\frac{۲xy}{x^{۲}+y^{۲}} & ,z\neq ۰\\ ۰ & ,z=۰\end{cases}$ با استفاده از مختصات قطبی وقتی $r\neq ۰$ می‌گیریم $f(z)=\sin ۲\theta$ که حد آن وقتی $r\to ۰$ بستگی به θ دارد چون θ متغیر است بنابراین جواب حد یکتا نیست. بعبارتی تابع پیوسته نیست.

۴ـ تابع $f(z)=\sqrt{|xy|}$ را در نظر می‌گیریم نشان دهید معادلات کوشی ـ ریمان برای این تابع در $z=۰$ برقرارند اما در این نقطه تابع تحلیلی نیست.

حل: داریم $f(z)=\sqrt{|xy|}=u+iv \Rightarrow u=\sqrt{|xy|}$ و $v=۰$. با استفاده از تعریف مشتق نسبی در $(۰,۰)$ می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\underset{\Delta y\to ۰}{\text{حد}}\frac{\sqrt{۰|\Delta y|}-۰}{\Delta y}=\underset{\Delta y\to ۰}{\text{حد}}\frac{۰}{\Delta y}=۰$$

از طرفی داریم $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=۰$ در نتیجه $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=۰$ و همچنین $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=۰$ بنابراین برای تابع در $z=۰$ معادلات کوشی ـ ریمان برقرارند. این مشتق‌ها در $z=۰$ پیوسته نیستند زیرا (مثلاً) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\begin{cases}\frac{y}{۴(xy)^{\frac{۳}{۴}}} & ,(x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & ,(x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

و براحتی می‌توان مشاهده کرد که چرا این مشتق نسبی در $(۰,۰)$ پیوسته نیست زیرا درجه صورت از درجه مخرج کمتر است پس تابع در $z=۰$ مشتق‌پذیر نیست بعبارتی در این نقطه تحلیلی نیست.

۵ـ ثابت کنید تابع $f(z)=\frac{۱}{z^{۲}}$ روی مجموعه $۰<|z|\leq ۱$ پیوسته یکنواخت نیست اما روی مجموعه $\frac{۱}{۲}\leq|z|\leq ۱$ پیوسته یکنواخت است.

حل: داریم

$$\begin{aligned}\left|\frac{۱}{z_۱^{۲}}-\frac{۱}{z_۲^{۲}}\right|&=\left|\frac{z_۲^{۲}-z_۱^{۲}}{z_۱z_۲}\right|=\frac{|z_۱-z_۲||z_۱+z_۲|}{|z_۱||z_۲|}\\&\leq|z_۱-z_۲|\left(\frac{|z_۱|+|z_۲|}{|z_۱||z_۲|}\right)\end{aligned}$$

اگر $|z|\leq ۱$. باشد چون در نزدیکی صفر سمت راست بسیار بزرگ می‌شود پس در این بازه پیوستگی یکنواخت نخواهیم داشت اما برای $\frac{۱}{۲}\leq|z|\leq ۱$ حداکثر $|z_۱+z_۲|$ برابر ۲ و حداقل $|z_۱||z_۲|$ برابر $\frac{۱}{۴}$

می‌شود یعنی

$$\left|\frac{۱}{z_۱^۲}-\frac{۱}{z_۲^۲}\right| \leq \frac{|z_۱-z_۲|\times ۲}{\frac{۱}{۴}} = ۸|z_۱-z_۲| < ۴ \Rightarrow |z_۱-z_۲| < \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین پیوستگی یکنواخت است

۶ـ نشان دهید اگر f و $\overline{f}$ در D تحلیلی باشند آنگاه f روی D تابعی ثابت است. مسئله را با این فرض که f تحلیلی و $|f| = c$ باشد حل کنید

حل: فرض کنید $f = u + iv$ در نتیجه $\overline{f} = u - iv$ چون هر دو تحلیلی‌اند پس معادلات کوشی ـ ریمان برای هر دو برقرارند یعنی

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

اگر اولین معادله از هر یک را با هم جمع بزنیم خواهیم داشت $\dfrac{\partial u}{\partial x} = ۰$ که از حل آن $u = g_۱(y)$ یعنی u تنها تابعی از y خواهد بود. اما اگر دومین معادله از هر یک جمع زده شوند، می‌گیریم $\dfrac{\partial u}{\partial y} = ۰$ که از حل آن $u = g_۲(x)$ و این به معنی آن است که u تنها تابعی از x است.

از آنجایی که u باید تنها برحسب x و یا تنها برحسب y باشد این زمانی امکان پذیر است که u تنها تابعی ثابت باشد. حال اگر همانند عملیاتی که برای تعیین u به کار بردیم این بار برای v بکار ببریم نتیجه می‌گیریم که v هم تنها می‌تواند تابعی ثابت باشد.

برای قسمت دوم از $|f| = c$ داریم $f\overline{f} = c^۲$ که از آن $f = \dfrac{c^۲}{\overline{f}}$. چون f تحلیلی است پس $\overline{f} \neq ۰$، یعنی $f \neq ۰$. پس اگر بنویسیم $\overline{f} = \dfrac{c^۲}{f}$ چون f تحلیلی و مخالف صفر است بنابراین $\overline{f}$ هم باید چنین باشد.

پس مجدداً دو تابع f و $\overline{f}$ تحلیلی‌اند، که با توجه به قسمت اول مسئله باید ثابت باشند.

۷ـ اگر قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ به صورت زیر باشد قسمت موهومی آنرا بیابید

$$\text{(i)}\ u = r(\theta\cos\theta + \ln r\sin\theta) \quad \text{(ii)}\ u = \frac{۱}{۲}\ln(x^۲+y^۲) + \cos x\cos hy$$

حل: (i) داریم $u_r = \theta\cos\theta + (\ln r + ۱)\sin\theta$ اما $u_r = \dfrac{۱}{r}v_\theta$ پس

$$v_\theta = r(\theta\cos\theta + (\ln r + ۱)\sin\theta)$$

که با انتگرال گیری از آن برحسب θ داریم $v = r(\theta\sin\theta - \ln r.\cos\theta) + f(r)$ اگر برحسب r مشتق بگیریم خواهیم داشت $v_r = \theta\sin\theta - \ln r\cos\theta - \cos\theta + f'(r)$ از طرفی داریم

$u_\theta = r(\cos\theta - \theta\sin\theta + \cos\theta\ln r)$ اما با توجه به تساوی $v_r = \frac{1}{r}u_\theta$ می‌گیریم $f'(r) = 0$ یعنی $f(r) = c$ پس

$$v = r(\theta\sin\theta - \ln r.\cos\theta) + c$$

(ii) با توجه به رابطه داده شده اگر برحسب x مشتق گیری نماییم می‌گیریم $u_x = \frac{x}{x^2+y^2} - \sin x ch y$ چون $u_x = v_y$ پس $v_y = \frac{x}{x^2+y^2} - \sin x ch y$ برحسب y از این رابطه انتگرال می‌گیریم خواهیم داشت $v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \sin x sh y + g(x)$ حال اگر از v برحسب x و از u برحسب y مشتق گیری نماییم، با توجه به رابطه $u_y = -v_x$ می‌رسیم به $g'(x) = 0$ که از آن $g(x) = c$ بنابراین $v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \sin x sh y + c$

۸ـ اگر $w = \frac{1-3iz}{1+iz}$ باشد نشان دهید از $Re(z) \le 0$ نتیجه می‌شود $I_m w \ge 0$

حل: می‌نویسیم $w + wiz = 1 - 3iz$ که از آن $z = \frac{1-w}{i(w+3)}$ حال با توجه به این که $z = x + iy$ و $w = u + iv$ خواهیم داشت

$$x + iy = \frac{1-u+iv}{-v+i(3+u)} = \frac{(1-u-iv)(-v-i(3+u))}{v^2+(3+u)^2}$$
$$= \frac{-4v}{v^2+(3+u)^2} + i\frac{v^2+u^2+2u-3}{v^2+(3+u)^2}$$

چون $Re z = x \le 0$ پس باید $\frac{-4v}{v^2+(3+u)^2} \le 0$ باشد، که از آن $v \ge 0$ یعنی باید $I_m w \ge 0$ باشد.

۹ـ با استفاده از رابطه (۲۳) معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 - y^2$ را حل کنید.

حل: با توجه به رابطه (۲۳) داریم $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}}$ پس حل معادله معادل می‌شود با حل معادله $\frac{4\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}} = x^2 - y^2$ اما $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ و $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ بنابراین می‌گیریم $\frac{4\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}(z^2+\overline{z}^2)$ یا به عبارت دیگر $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}} = \frac{1}{8}(z^2+\overline{z}^2)$. اول برحسب z انتگرال می‌گیریم خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{z}} = \frac{z^3}{24} + \frac{z\overline{z}^2}{8} + g_1(\overline{z})$$

این بار از طرفین برحسب $\overline{z}$ انتگرال می‌گیریم، نتیجه چنین می‌شود

$$u = \frac{z^3\overline{z}}{24} + \frac{z\overline{z}^3}{24} + F(z) + G(\overline{z})$$

که اگر برحسب $z = x + iy$ و $\overline{z} = x - iy$ بنویسیم خواهیم داشت

$$u = \frac{1}{12}(x^4 - y^4) + F(x+iy) + G(x-iy).$$

۱۰ـ ثابت کنید اگر v مزدوج همساز u و u مزدوج همساز v باشد در اینصورت u و v باید توابعی ثابت باشند.

حل: فرض کنید $f = u + iv$ و $g = v + iu$ که v مزدوج همساز u و u مزدوج همساز v باشد در اینصورت روابط زیر را داریم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (۱) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (۲)$$

اگر رابطه اولی از معادلات (۱) را با رابطه دومی از معادلات (۲) جمع بزنیم می‌گیریم $\dfrac{\partial u}{\partial x} = ۰$ یعنی $u = g(y)$ حال اگر رابطه دومی از معادلات (۱) را با رابطه اولی از معادلات (۲) مقایسه شود می‌رسیم به $\dfrac{\partial u}{\partial y} = ۰$ یعنی $u = h(x)$ اما این امکان پذیر نیست مگر u تابع ثابتی باشد. حال اگر همین تفسیر برای روابط دیگر بکار رود نتیجه مشابه (ثابت) $v = c$ بدست می‌آید. یعنی $f = u + iv$ تابعی ثابت است.

۱۱ـ آیا توابع $u = x^۲ + y^۲$ و $v = \ln(x^۲ + y^۲)$ می‌توانند قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی باشند؟ چرا؟

حل: فرض کنید چنین باشد (برهان خلف) نشان می‌دهیم در معادلات لاپلاس صدق می‌کنند یا خیر؟ از اولی داریم $\dfrac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \dfrac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۴ \neq ۰$ پس u نمی‌تواند قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی باشد اما برای v داریم

$$\dfrac{\partial^۲ v}{\partial x^۲} + \dfrac{\partial^۲ v}{\partial y^۲} = ۰$$

یعنی v می‌تواند قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی باشد. می‌شود نشان داد که قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی می‌تواند باشد امّا قسمت موهومی خیر. بعنوان تمرین این موضوع را ثابت کنید

۱۲ـ نشان دهید اگر v و u همساز باشند آنگاه تابع $w = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$ تابع تحلیلی است.

حل: چون u و v همساز هستند پس در معادله لاپلاس صدق می‌کنند فرض کنید $w = U + iV$ داریم

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^۲ v}{\partial x^۲}$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^۲ u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^۲ v}{\partial y^۲} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

زیرا $\dfrac{\partial^۲ v}{\partial y^۲} + \dfrac{\partial^۲ v}{\partial x^۲} = ۰$ بطریقی مشابه می‌توان نشان داد که $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$ پس U و V در معادلات کوشی ـ ریمان صدق می‌کنند. از این معادلات می‌توان نتیجه گرفت که U و V هم مانند u و v در معادله لاپلاس صدق می‌کنند. V را مزدوج همساز U در نظر می‌گیریم پس w تحلیلی است.

۱۳ـ نگاشت $w = (ke^{i\alpha})z$ را بصورت رابطه ماتریسی بین دو بردار با مؤلفه‌های (v, u) و (x, y) بنویسید.

حل: می‌نویسیم $w = ke^{i\alpha}z \Rightarrow u + iv = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

۱۴ـ ثابت کنید $\nabla^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 16\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}$

حل: داریم

$$\nabla^4 u = \nabla^2 . \nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

$$= \nabla^4 u = \nabla^2 . \nabla^2 u = \nabla^2\left(4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}\right) = 4\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}\right) = 4\left(4\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}\right)$$

$$= 16\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}.$$

۱۵ـ آیا تابع $u = e^{-y}(x\sin x + y\cos x)$ تابعی همساز است؟ در صورت همساز بودن آن تابع $f(z)$ را مشخص کنید.

حل: اگر u همساز باشد باید در معادله لاپلاس صدق کند یعنی باید $\nabla^2 u = 0$. داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y}(\sin x + x\cos x - y\sin x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-y}(2\cos x - x\sin x - y\cos x)$$

همچنین

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}(x\sin x + y\cos x - \cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-y}(x\sin x + y\cos x - 2\cos x)$$

در نتیجه $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0$. چون u همساز است مزدوج همساز آن را به‌دست می‌آوریم تا $f(z)$ مشخص شود. داریم $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ در نتیجه $\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-y}(\sin x + x\cos x - y\sin x)$. اگر برحسب y انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$v = e^{-y}(y\sin x - x\cos x) + g(x)$$

حال از طرفین برحسب x مشتق می‌گیریم. خواهیم داشت

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}(y\cos x - \cos x + x\sin x) + g'(x)$$

از آنجائیکه $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ پس

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c \Rightarrow v = e^{-y}(y\sin x - x\cos x) + c.$$

۱۶ـ نشان دهید $\operatorname{div}(\nabla A) = ۰$ اگر A موهومی باشد یا ReA همساز باشد:

حل:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla A) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ)\\ &= \operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial^۲ P}{\partial x^۲} - \frac{\partial^۲ Q}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^۲ P}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ Q}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^۲ P}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ P}{\partial y^۲}\end{aligned}$$

بدیهی است که $\operatorname{div}(\nabla A) = ۰$ اگر $P = ۰$ یا P در معادله لاپلاس صدق کند که این دو به ترتیب به این معنی است که A موهومی یا ReA همساز باشد.

۱۷ـ در هیدرودینامیک شار موازی صفحه حالت پایدار مایع تراکم ناپذیر در صورتی کاملاً تعریف می‌شود که تابع تحلیلی $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ به نام **پتانسیل مختلط** معلوم باشد. $u(x,y)$ را **پتانسیل سرعت** و $v(x,y)$ را **تابع جریان** نامند. منحنی‌های، ثابت $= u(x,y)$، ثابت $= v(x,y)$ را به ترتیب منحنی‌های **همپتانسیل** و **خطوط جریان** گویند. با توجه به این مطالب پتانسیل مختلط شار مایع را طوری بیابید که منحنی‌های همپتانسیل به صورت زیر داده شوند:

$$x^۲ - y^۲ + ۲xy + x = \text{ثابت}, \quad f(۰) = ۰$$

حل: فرض کنید $u = x^۲ - y^۲ + ۲xy + x$ در نتیجه از $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ می‌گیریم

$$\frac{\partial v}{\partial y} = ۲x - ۲y + ۱$$

حال برحسب y انتگرال می‌گیریم خواهیم داشت

$$v = ۲xy - y^۲ + y + g(x)$$

که از مشتق گیری از آن برحسب x و اینکه $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ می‌رسیم به

$$۲y + g'(x) = ۲y + ۲x \Rightarrow g'(x) = ۲x \rightarrow g(x) = x^۲ + c$$

پس $v = x^۲ + ۲xy - y^۲ + y + c$ یعنی

$$f(z) = x^۲ - y^۲ + ۲xy + x + i(x^۲ + ۲xy - y^۲ + y + c).$$

از شرط $f(۰) = ۰$ نتیجه می‌شود که $c = ۰$ است پس

$$f(z) = x^۲ - y^۲ + ۲xy + x + i(x^۲ - y^۲ + ۲xy + y).$$

۱۸ـ جریان شار غیر چرخش دو بعدی همانند تمرین ۱۷ با پتانسیل مختلط به خوبی تعریف می‌شود. اگر سرعت شار u از رابطه $\vec{V} = \nabla u$ بدست آید و تابع پتانسیل $f(z)$ تحلیلی باشد نشان دهید (i) $f'(z) = V_x - iV_y$ (ii) $\operatorname{div}\vec{V} = 0$ (نبودن چشمه یا چاهک) $curl\vec{V} = 0$ (جریان غیر چرخشی).

حل: (i) فرض کنید $\vec{V} = V_x i + V_y j$ در نتیجه $\vec{V} = \nabla V = V_x + iV_y$. از طرفی چون $\vec{V} = \nabla u = u_x + iu_y$ بنابراین با توجه به تحلیلی بودن $f(z)$ داریم

$$f'(z) = u_x + iv_x = V_x - iV_y$$

زیرا $V_y = u_y - v_x$.

(ii) بدیهی است زیرا

$$\operatorname{div} V = \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

زیرا تابع تحلیلی است در نتیجه معادله لاپلاس برقرار است.

همچنین داریم

$$\operatorname{curl} V = \operatorname{curl}(\nabla u) = \operatorname{curl}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

چون u تابعی همساز است در نتیجه این دو مشتق برابراند.

۱۹ـ فرض کنید توابع u و v در معادله لاپلاس صدق کنند. آیا امکان دارد که تابع $w = f(z) = u + iv$ تابع تحلیلی از z نباشد؟ دلیل خود را با ذکر یک مثال توضیح دهید

حل: چنین امکانی وجود دارد بعنوان مثال فرض کنید $u = v = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ و u و v هر دو در معادله لاپلاس صدق می‌کنند اما روی خط $x = 0$ توابع تحلیلی نیستند

۲۰ـ فرض کنید توابع v و u در معادله لاپلاس صدق کند و $\phi = \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}$ و $\psi = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$ ثابت کنید تابع $\phi + i\psi$ تحلیلی است.

حل: حل آن همانند تمرین شماره ۱۲ است. در اصل این همان سوال ۱۲ است که شکل آن به صورتی دیگر عنوان شده است.

حل آزمونهای چهار جوابی ۲

۱. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ برابر است با

الف) ۱ ب) ۱− ج) ۰ د) حد موجود نیست

حل: بخاطر وجود $\overline{z}$ می‌توان دریافت که گزینه د درست است زیرا

$$\lim_{z\to \circ}\frac{\overline{z}}{z}=\lim_{\substack{x\to\circ\\ y\to\circ}}\frac{x-iy}{x+iy}=\lim_{y\to\circ}\frac{-iy}{iy}=-۱$$

$$\neq \lim_{\substack{y\to\circ\\ x\to\circ}}\frac{x-iy}{x+iy}=\lim_{x\to\circ}\frac{x}{x}=۱$$

۲. کدام گزاره در مورد تابع $f(z)=\mathrm{Arg}z$ درست است؟

الف) این تابع روی محور حقیقی منفی حد دارد

ب) این تابع روی محور حقیقی منفی حد ندارد

ج) روی هر محوری این تابع حد ندارد

د) تنها در $z=\circ$ حد ندارد

حل: گزینه الف درست است مثال ۵ از این فصل را ببینید.

۳. تابع $f(z)=\overline{z}$

الف)فقط در $z=\circ$ پیوسته نیست

ب) در بخشی از صفحه مختلط پیوسته نیست

ج) در تمام صفحه مختلط پیوسته نیست

د) فقط در $z=\circ$ پیوسته است

حل: گزینه ج درست است به مثال ۸ مراجعه شود

۴. تابع $f(z)=z\overline{z}$

الف)فقط در $z=\circ$ مشتق پذیر است

ب) در تمام صفحه مختلط مشتق پذیر است

ج) تحلیلی است

د) در $z=\circ$ مشتق پذیر نیست

حل: چون $z\overline{z}=x^۲+y^۲$ در نتیجه معادلات کوشی ـ ریمان فقط در $x=y=\circ$ برقراراند بنابراین گزینه الف درست است.

۵. مجموعه $z_n=i^n(n=۱,۲,\cdots)$

الف)دارای یک نقطه حدی است

ب) دارای دو نقطه حدی است

ج) بیشمار نقطه حدی دارد

د) نقطه حدی ندارد

حل: گزینه د صحیح است چون $i^n=\pm ۱$ یا $i^n=\mp i$ که نقطه حدی نیستند.

۶. مجموعه $|z|>\circ$ ،$\circ\leq \arg\leq\frac{\pi}{۴}$

الف)مجموعه‌ای باز است

ب) مجموعه‌ای بسته است

ج) نه باز و نه بسته است

د) هم باز و هم بسته است

حل: گزینه ج صحیح است زیرا شرط $|z| = 1 > 0$ باعث می‌شود که مجموعه از یک طرف باز باشد.

۷. کدامیک از توابع زیر تام است؟

الف) $f(z) = \frac{1}{z}$ ب) $f(z) = z^4$ ج) $f(z) = Re z$ د) $f(z) = |z|^2$

حل: گزینه ب درست است. تمام توابع $f(z) = z^n$ برای $n \in \mathbb{N}$ تام‌اند

۸. کدامیک از توابع زیر همساز است؟

الف) $u = x^2 + y^2$ ب) $u = x^2 y$ ج) $u = (xy)^2$ د) $u = x^2 - y^2$

حل: براحتی می‌توان مشاهده نمود گزینه د درست است.

۹. نقاط تکین تابع $f(z) = \frac{ie^z}{z(z^2+1)}$ عبارتند از

الف) $\pm i$ ب) $0, \pm i$ ج) $0, i$ د) ∓ 1

حل: نقاط تکین نقاطی‌اند که در آن توابع تعریف نمی‌شوند بدیهی است در نقاطی که مخرج کسر صفر می‌شود چنین حالتی را داشته باشیم یعنی $z = 0$، $z = \pm i$ پس گزینه ب درست است.

۱۰. کدام گزاره درست نیست

الف) جمع دو تا تابع تام، تابعی تام است

ب) از تقسیم دو تابع تام، تابعی تام حاصل می‌شود

ج) از ضرب دو تابع تام، تابعی تام بدست می‌آید

د) از تفاضل دو تابع تام ، تابعی تام خواهیم داشت

حل: گزینه ب صحیح است زیرا مثلاً اگر $f(z) = \sin z$ و $g(z) = \cos z$ هر دو تابعی تام هستند امّا تابع $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ تابعی تام نیست.

حل تمرین‌های خودآزمایی ۳

۱ـ نشان دهید

$$(i)\ \ 1^{\sqrt{2}} = e^{i2k\pi\sqrt{2}},\ (ii)\ \ \frac{d}{dz}(i)^z = \frac{\pi}{2}i^{z+1},\ (iii)\ \ 1^i = e^{-2k\pi}$$

حل:

$$i)\,1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 1} = e^{\sqrt{2}(\ln|1|+i\arg 1)} = e^{\sqrt{2}(0+2k\pi i)} = e^{2k\sqrt{2}\pi i}$$

$$ii)\,\frac{d}{dz}(i)^z = \frac{d}{dz}(\exp(z\ln i)) = \frac{d}{dz}(\exp(0+i\frac{\pi}{2}))z$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)z\right) = \frac{\pi}{2}i\exp\left(\frac{\pi}{2}iz\right) = \frac{\pi}{2}i(i)^z = \frac{\pi}{2}(i)^{z+1}$$

$$iii)\,1^i = \exp(i\ln 1) = \exp(i(0+2k\pi i)) = \exp(-2k\pi) = e^{-2k\pi}$$

۲ـ ثابت کنید

$$(i)|shy| \le |\sin z| \le chy$$

$$(ii)|shy| \le |\cos z| \le chy$$

$$(iii)sh^2y + ch^2y = |\sin z|^2 + |\cos z|^2$$

حل: (i) داریم $\sin z = \sin x ch y + i \cos x sh y$ که از آن

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x ch^2 y + \cos^2 x sh^2 y} = \sqrt{(1 - \cos^2 x) ch^2 y + \cos^2 x(-1 + ch^2 y)}$$
$$= \sqrt{ch^2 y - \cos^2 x} \leq \sqrt{ch^2 y} = chy \Rightarrow |\sin z| \leq chy$$
$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x ch^2 y + \cos^2 x sh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x(1 + sh^2 y) + (1 - \sin^2 x) sh^2 y}$$
$$= \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y} \geq \sqrt{sh^2 y} = shy \Rightarrow |\sin z| \geq shy.$$

با ترکیب این دو نامساوی، درستی (i) ثابت می‌شود.

(ii) برای $\cos z$ داریم $\cos z = \cos x ch y - i \sin x sh y$ که از آن

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x ch^2 y + \sin^2 x sh^2 y} = \sqrt{(1 - \sin^2 x) ch^2 y + \sin^2 x(ch^2 y - 1)}$$
$$= \sqrt{ch^2 y - \sin^2 x} \leq chy \Rightarrow |\cos z| \leq chy$$

به‌طریقی مشابه:

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x(sh^2 y + 1) + sh^2 y(1 - \cos^2 x)} = \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y} \geq shy$$
$$\Rightarrow |\cos z| \geq shy$$

از ترکیب دو نامساوی صحت درستی (ii) معلوم می‌شود.

(iii) می‌نویسیم

$$sh^2 y + ch^2 y = (sh^2 y + ch^2 y)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$= (\sin^2 x ch^2 y + \cos^2 x sh^2 y) + (\cos^2 x ch^2 y + \sin^2 x sh^2 y) = |\sin z|^2 + |\cos z|^2$$

۳ـ چرا با وجود اینکه $e^0 > 0$ و $e^{\pi i} < 0$ است ولی معادله $e^z = 0$ جواب ندارد؟ توضیح دهید.

حل: متأسفانه به این مطلب که مجموعه اعداد مختلط خاصیت ترتیب ندارند در متن درس اشاره نشده است. در اینجا این مطلب را ذکر می‌کنیم که نمی‌توان گفت $z_2 > z_1$ یا بالعکس $z_2 < z_1$ یعنی اعداد مختلط خاصیت ترتیب ندارند به همین مناسبت نمی‌توان اظهار داشت که $e^0 > 0$ یا $e^{\pi i} < 0$ تا با توجه به قضیه مقدار میانی نتیجه گرفت که اگر فرض کنیم $f(z) = e^z$ و داریم $f(0)f(\pi i) < 0$ پس باید یک ریشه در فاصله $(0, \pi i)$ موجود باشد. بسیاری از قضایای مشابه، مانند قضیه رل و قضیه مقدار میانگین ...در حوزه اعداد مختلط برقرار نیستند (به‌عنوان مثال تمرین ۶ این خودآزمایی را ببینید.)

۴ـ نشان دهید $\tan z = i$ جواب ندارد اما معادله $\tan hz = i$ جواب دارد.

حل: داریم $\tan z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = i$ که از آن $-1 = \dfrac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$ یعنی $1 - e^{2iz} = -e^{2iz} - 1$. پس باید $2e^{2iz} = 0$ باشد که امکان پذیر نیست زیرا می‌دانیم $e^z \neq 0$.

اما برای معادله دومی داریم

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^z} = i \Rightarrow \frac{e^{۲z} - ۱}{e^{۲z} + ۱} = i \Rightarrow e^{۲z} = \frac{۱ + i}{۱ - i} = i$$
$$\Rightarrow z = \frac{۱}{۲}\left(\ln|i| + i\left(۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\right)\right) = \frac{i}{۲}\left(۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\right).$$

۵ـ فرض کنید $z = ۱ + i$ و $n = ۵$. کدام‌یک از تساوی‌های زیر می‌تواند درست باشد؟ مقدار آن‌را بیابید.

$$\text{(i) } n \ln z = \ln z^n \,,\ \text{(ii) } n \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} z^n$$

حل: قبلاً هم اشاره داشتیم که چون $\operatorname{Ln} z$ مقدار اصلی را انتخاب می‌کند پس نمی‌تواند درست باشد با وجود این، درستی (i) را ثابت می‌کنیم. داریم

$$(۱ + i)^۵ = [\sqrt{۲}e^{i\left(۲k\pi + \frac{\pi}{۴}\right)}]^۵ = ۲^{\frac{۵}{۲}} e^{i\left(۱۰k\pi + \frac{۵\pi}{۴}\right)}$$
$$\Rightarrow \ln(۱ + i)^۵ = \ln ۲^{\frac{۵}{۲}} + i\left(۱۰k\pi + \frac{۵\pi}{۴}\right) = \frac{۵}{۲}\ln ۲ + i\left(۲k_۱\pi + \frac{۵\pi}{۴}\right)$$

که $k_۱ = ۵k$. هم‌چنین داریم

$$۵\ln(۱ + i) = ۵\ln[\sqrt{۲}e^{i\left(۲k\pi + \frac{\pi}{۴}\right)}]$$
$$= ۵\left(\ln\sqrt{۲} + i\left(۲k\pi + \frac{\pi}{۴}\right)\right) = \frac{۵}{۲}\ln ۲ + i\left(۱۰k\pi + \frac{۵\pi}{۴}\right)$$
$$= \frac{۵}{۲}\ln ۲ + i\left[۲k_۱\pi + \frac{۵\pi}{۴}\right]$$

چون $-\pi < \theta < \pi$ است می‌توانیم به‌جای $\pi + \frac{\pi}{۴} = ۵\frac{\pi}{۴}$ مقدار $-\frac{۳\pi}{۴}$ را اختیار کنیم در هر صورت دو رابطه برابرند. برای قسمت (ii) داریم

$$\operatorname{Ln}(۱ + i)^۵ = \frac{۵}{۲}\ln ۲ - \frac{۳\pi}{۴}i$$
$$۵\operatorname{Ln} z = ۵\left(\ln\sqrt{۲} + i\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۵}{۲}\ln ۲ + \frac{۵\pi}{۴}i$$

که با هم برابر نیستند. توجه شود که در اینجا نمی‌توان به‌جای $\frac{۵\pi}{۴}$ مقدار $-\frac{۳\pi}{۴}$ را اختیار کنیم زیرا θ مقدار اولیه خود را که $\frac{\pi}{۴}$ بود برگزید اما در قسمت (i) با انتخاب یک $k_۱$ مناسب این برقراری امکان پذیر بوده است.

۶ـ ثابت کنید با وجود $f(۰) = f(۲\pi) = ۰$ قضیه رل [مرجع [۳]] در مورد تابع $f(z) = e^{iz} - ۱$ برقرار نیست.

حل: داریم $f'(z) = ie^{iz}$ که طبق قضیه رل باید نقطه‌ای نظیر $z = c$ در بین $(۰, ۲\pi)$ موجود باشد به‌طوری که $f'(z) = ۰$. اما $ie^{iz} \neq ۰$ پس قضیه رل نمی‌تواند برای مجموعه اعداد مختلط درست باشد. ممکن است برای یک تابع خاصی درست باشد ولی در حالت کلی درست نیست.

۷ـ کدامیک از روابط زیر در حالت کلی نمی‌تواند درست باشد.

$$\text{(i)}\ \tan^{-1}(\tan z) = z\ ,\text{(ii)}\ \tan(\tan^{-1} z) = z.$$

حل: به‌خاطر چند مقداری بودن $\tan^{-1}$ رابطه (i) نمی‌تواند درست باشد.

۸ـ در نظریه کوانتومی یونش فوتونی، با رابطه $\left[\frac{ia-1}{ia+1}\right]^{ib} = e^{-2b\cot^{-1} a}$ مواجه می‌شویم که $a, b \in R$ درستی این رابطه را بررسی کنید.

حل: فرض کنید $\left[\frac{ia-1}{ia+1}\right]^{ib} = A$ در این‌صورت داریم

$$\ln A = ib\ln\left(\frac{ia-1}{ia+1}\right) = ib\ln\left(\frac{a+i}{a-i}\right)$$

از طرفی $\cot^{-1} z = -\frac{i}{2}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$. درنتیجه

$$\ln A = ib\left(-\frac{2}{i}\cot^{-1} a\right) = -2b\cot^{-1} a \Rightarrow A = e^{-2b\cot^{-1} a}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{ia-1}{ia+1}\right]^{ib} = e^{-2b\cot^{-1} a}$$

۹ـ معادلات زیر را حل کنید

$$\text{(i)}\ \tan z = \ln i\ ,\text{(ii)}\ \cosh^{-1} z = 1+i\ ,\text{(iii)}\ \sinh z = i\sqrt{2}$$
$$\text{(iv)}\ \cosh z = i\ ,\text{(v)}\ \cos z = \sin z\ ,\text{(vi)}\ \cos z = -3$$

حل: (i) داریم

$$\tan z = \ln i = \ln|i| + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

از طرفی $\tan z = -i\tanh iz$ درنتیجه

$$-i\tanh iz = i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\tanh iz = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow iz$$
$$= -\tanh^{-1}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow z = i\tanh^{-1}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

(ii) داریم $\cosh^{-1} z = 1+i$ که از آن $z = \cosh(1+i)$. با توجه به روابط موجود در این فصل می‌توانیم بنویسیم

$$z = \cosh(1+i) = ch1chi + sh1shi = ch1\cos 1 + ish1\sin 1$$

(iii) داریم $\sinh z = \sinh(x+iy) = shx\cos y + ichx\sin y = i\sqrt{۲}$، که با مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم

$$shx\cos y = ۰ \quad , chx\sin y = \sqrt{۲}$$

از معادله اولی $shx = ۰$ یا $\cos y = ۰$ است اگر $shx = ۰$ باشد در این‌صورت $x = ۰$ است که اگر در معادله دومی قرار دهیم می‌گیریم $\sin y = \sqrt{۲}$ که قابل قبول نیست پس باید $cosy = ۰$ باشد یعنی $y = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$. با جاگذاری در معادله دوم می‌گیریم $chx = \sqrt{۲}$ که از آن $x = ch^{-۱}\sqrt{۲}$ پس $z = ch^{-۱}\sqrt{۲} + i\left(۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\right)$.

(iv) به‌طریقی مشابه قسمت (iii) عمل می‌کنیم. داریم

$$\cosh z = \cosh(x+iy) = chx\cos y + ishx\sin y = i$$

با مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم $chx\cos y = ۰$ که از آن $chx = ۰$ یا $\cos y = ۰$ و $shx\sin y = ۱$. تساوی $chx = ۰$ نمی‌تواند برقرار باشد چون $chx \geq ۱$ پس باید $\cos y = ۰$ باشد یعنی $y = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ بنابراین از $shx\sin y = ۱$ نتیجه $shx = ۱$ به‌دست می‌آید که از آن $x = sh^{-۱}۱$ یعنی $z = sh^{-۱}۱ + i\left(۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\right)$.

(v) داریم $\cos z = \cos(x+iy) = \cos xchy - i\sin xshy$ و $\sin z = \sin xchy + i\cos xshy$ در نتیجه $\sin xchy = \cos xchy$ و $\cos xshy = -\sin xshy$. از رابطه اولی می‌گیریم $\sin x = \cos x$ زیرا $chy \neq ۰$. از طرفی $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$ درنتیجه، $x = ۲k\pi + \left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$ یعنی $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$. براحتی می‌توان نتیجه گرفت که $y = ۰$ پس $z = k\pi + \frac{\pi}{۴}$،

(vi) می‌نویسیم

$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos xchy - i\sin xshy$ که از آن $\cos xchy = ۰$ و $\sin xshy = ۳$. براحتی می‌توان نشان داد که $z = ۲k\pi + \pi + ich^{-۱}۳$.

۱۰ـ درستی اتحادهای زیر را ثابت نمایید.

$$\text{(i)} \quad \tan z = \frac{\sin ۲x + i\sinh ۲y}{\cos ۲x + \cosh ۲y},$$

$$\text{(ii)} \quad \left[\frac{pi+۱}{pi-۱}\right] e^{۲mi\operatorname{arccot}p} = ۱.$$

(i) در متن سوال در مخرج به‌جای $\cosh ۲y$ جمله $\cosh y$ درج شده است که بدینوسیله تصحیح می‌شود. در اثبات این قسمت باید توجه شود که خواسته شده از سمت چپ تساوی سمت راست را نتیجه‌گیری نمایید به‌همین علت اگر از سمت راست به سمت چپ تساوی برسید اگرچه عملیات جبری درست است ولی ترجیح داده می‌شود از سمت چپ، سمت راست را نتیجه‌گیری کنید. داریم

$$\tan z = \tan(x+iy) = \frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \frac{\sin xchy + i\cos xshy}{\cos xchy - i\sin xshy}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\tan z = \frac{(\sin xchy + i\cos xshy)(\cos xchy + i\sin xshy)}{\cos^۲ xch^۲y + \sin^۲ xsh^۲y}$$
$$= \frac{\sin x\cos xch^۲y - \cos x\sin xsh^۲y + i(\cos^۲ xshxchy + \sin^۲ xshxchy)}{\cos^۲ xch^۲y + \sin^۲ xsh^۲y}$$
$$= \frac{\sin x\cos x(ch^۲y - sh^۲y) + ishxchy(\cos^۲ x + \sin^۲ x)}{\cos^۲ xch^۲y + \sin^۲ xsh^۲y}$$
$$= \frac{\sin x\cos x + ishxchy}{\cos xch^۲y + \sin^۲ xsh^۲y} = \frac{\frac{\sin ۲x}{۲} + \frac{ish۲y}{۲}}{\cos^۲ xch^۲y + \sin^۲ xsh^۲y}$$
$$= \frac{\sin ۲x + ish۲y}{۲\cos^۲ xch^۲y + ۲\sin^۲ xsh^۲y} = \frac{\sin ۲x + ish۲y}{۲\cos^۲ x(۱ + sh^۲y) + ۲(۱ - \cos^۲ x)sh^۲y}$$
$$= \frac{\sin ۲x + ish۲y}{۲\cos^۲ x + ۲sh^۲y} = \frac{\sin ۲x + ish۲y}{(۲\cos^۲ x - ۱) + (۲sh^۲y + ۱)} = \frac{\sin ۲x + ish۲y}{\cos ۲x + sh۲y}$$

توجه شود که در مخرج کسر عدد ۱ کم و زیاد شده است.

(ii) با توجه به تعریف داریم $\text{arccot}p = -\frac{i}{۲}\ln\left(\frac{p+i}{p-i}\right)$ درنتیجه،

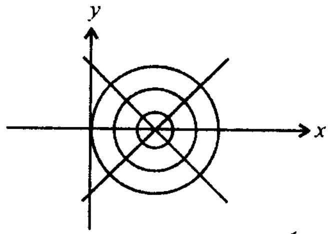
$$\left[\frac{pi+۱}{pi-۱}\right]^m .e^{۲mi\text{arccot}p} = \left[\frac{pi+۱}{pi-۱}\right]^m .e^{m\ln\left(\frac{p+i}{p-i}\right)}$$
$$= \left[\frac{pi+۱}{pi-۱}\right]^m .e^{\ln\left(\frac{p+i}{p-i}\right)^m} = \left(\frac{pi+۱}{pi-۱}\right)^m \left(\frac{p+i}{p-i}\right)^m$$
$$= \left(\frac{(pi+۱)(p+i)}{(pi-۱)(p-i)}\right)^m = \left(\frac{-i(pi+۱)(p+i)}{-i(pi-۱)(p-i)}\right)^m$$
$$= \left(\frac{(p-i)(p+i)}{(p+i)(p-i)}\right)^m = ۱$$

۱۱ـ با توجه به تمرین ۱۷ از فصل قبل فرض کنید پتانسیل مختلط شار مایع به‌صورت $f(z) = \ln(z-۱)$ تعریف شود. پتانسیل سرعت، تابع جریان، منحنی‌های هم‌پتانسیل، خطوط جریان و تصاویر سرعت بر محورهای مختصات را بیابید.

حل: با توجه به تعریف تابع لگاریتم داریم

$$f(z) = \ln(z-۱) = \ln(x - ۱ + iy)$$
$$= \ln|x - ۱ + iy| + i\tan^{-۱}\frac{y}{x-۱}$$
$$= \ln\sqrt{(x-۱)^۲ + y^۲} + i\tan^{-۱}\frac{y}{x-۱} = u + iv$$

یعنی $u = \ln\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ و $v = \tan^{-1}\dfrac{y}{x-1}$. براحتی می‌توان نشان داد که با انتخاب $u = c_1$ و $v = c_2$ به‌ترتیب دسته منحنی‌های $(x-1)^2+y^2 = c$ و $y = c(x-1)$ بدست می‌آیند که بر هم عمودند.



۱۲ـ نشان دهید $\ln e^z = z$ اگر و تنها اگر $-\pi < y \le \pi$.

حل: اگر $-\pi < y \le \pi$ در این صورت بنابر تعریف $\arg e^z = y$ و

$$\ln e^z = \operatorname{Ln} e^z = \operatorname{Ln} e^{x+iy} = \operatorname{Ln} e^x + \operatorname{Ln} e^{iy} = x + i\operatorname{Arg}e^{iy} = x+iy = z$$

برعکس اگر $\ln e^z = z$ در این صورت

$$\ln e^z = \operatorname{Ln} e^z = \operatorname{Ln} e^x + \operatorname{Ln} e^{iy} = x + i\operatorname{Arg}e^{iy} = x+iy$$
$$\Rightarrow \operatorname{Arg}e^{iy} = y \Rightarrow -\pi < y \le \pi$$

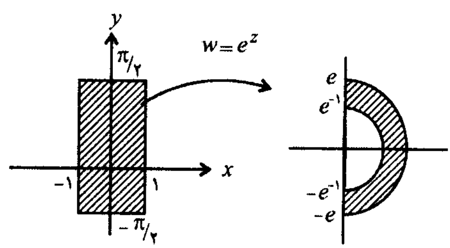
۱۳ـ تصویر نواحی زیر را تحت نگاشت‌های داده شده به‌دست آورید

(i) $w = iz\ , x = a\ , y = b$

(ii) $w = iz^2\ , y = x$

(iii) $w = \dfrac{1}{z}\ , y = x^2$

(iv) $w = e^z\ , |y| < \dfrac{\pi}{2}\ , |x| < 1$



(i) داریم $w = iz = i(x+iy) = -y + ix = u + iv$
پس $u = -y = -b$ و $v = x = a$.

(ii) داریم $w = iz^2 = i(x+iy)^2 = i(x^2-y^2+2ixy) = -2xy + i(x^2-y^2) = u+iv$
پس $u = -2xy$ و $v = x^2-y^2$ و چون $y = x$ پس $u = -2x^2 < 0$ و $v = 0$ یعنی خط $y = x$ روی $v = 0$ و $u < 0$ نگاشت می‌شود.

(iii) داریم $w = \dfrac{1}{z} \Rightarrow z = \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{u+iv} = \dfrac{u-iv}{u^2+v^2}$
پس $x+iy = \dfrac{u}{u^2+v^2} - i\dfrac{v}{u^2+v^2}$، که $x = \dfrac{u}{u^2+v^2}\ , y = -\dfrac{v}{u^2+v^2}$
چون $y = x^2$ پس $\dfrac{-v}{u^2+v^2} = \dfrac{u^2}{(u^2+v^2)^2}$ چون سمت راست بزرگ‌تر از صفر است پس باید $v < 0$ باشد. بنابراین منحنی $y = x^2$ به روی $v < 0$ نگاشت می‌شود.

(vi) داریم

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = Re^{iy} \Rightarrow R = e^x \ , \ \varphi = y$$

بنابراین ناحیه $|x| < ۱$ به توی دایره‌های $R = e^{-۱}$ و $R = e$ نگاشت می‌شود و ناحیه بین خطوط $|y| < \frac{\pi}{۲}$ به توی $|\phi| < \frac{\pi}{۲}$ نگاشت می‌گردد (شکل را ببینید).

۱۴ـ ثابت کنید تبدیل $w = \sin^۲ z$ ناحیه $۰ \le x \le \frac{\pi}{۲}$، $y \ge ۰$ را به توی $v \ge ۰$ می‌نگارد.

حل: داریم

$$\begin{aligned} w = \sin^۲ z &= \sin^۲(x+iy) = (\sin x ch y + i\cos x sh y)^۲ \\ &= \sin^۲ x ch^۲ y - \cos^۲ x sh^۲ y + ۲i \sin x \cos x sh y ch y \\ &= ch^۲ y \sin^۲ x - (۱ - \sin^۲ x) sh^۲ y + \frac{i}{۲}\sin ۲x sh ۲y \\ &= (ch^۲ y + sh^۲ y)\sin^۲ x - sh^۲ y + \frac{i}{۲}\sin ۲x sh ۲y = u + iv \Rightarrow \end{aligned}$$

$$u = (ch^۲ y + sh^۲ y)\sin^۲ x - sh^۲ y \ , v = \frac{۱}{۲}\sin ۲x sh^۲ y.$$

چون $۰ \le x \le \frac{\pi}{۲}$ و $y \ge ۰$ درنتیجه u می‌تواند هر مقداری انتخاب شود اما برای v داریم $v = \frac{۱}{۲}\sin ۲x sh^۲ y \ge ۰$ زیرا $۰ \le \sin ۲x \le ۱$ و $sh ۲y \ge ۰$. پس ناحیه موردنظر بالای محور uهاست.

۱۵ـ نشان دهید ناحیه $x \ge ۰$، $۰ \le y \le \pi$ تحت تبدیل $w = chz$ به نیمه فوقانی صفحه w نگاشت می‌شود طوری‌که $z = ۰$ و $z = \pi i$ به‌ترتیب متناظر با $w = ۱$ و $w = -۱$ است و قسمت کرانه نوار به توی محور u نگاشت می‌شود.

حل: داریم

$$w = chz = ch(x+iy) = chx \cos y + ishx \sin y = u + iv \Rightarrow$$

$$u = chx \cos y \ , v = shx \sin y$$

بهتر است ناحیه موردنظر در صفحه z را مشخص نماییم

روی نوار $x \ge ۰ \ , y = \pi$ داریم $v = ۰ , u = chx \cos \pi = -chx \le -۱$

روی نوار $x \ge ۰ \ , y = ۰$ داریم $v = ۰ \ , u = chx \cos ۰ = chx \ge ۱$

روی نوار عمودی $x = ۰ \ , ۰ \le y \le \frac{\pi}{۲}$ داریم $u = \cos y$ پس $۰ \le u \le ۱$ و $v = ۰$ درنتیجه ناحیه داده شده به توی محور u نگاشت می‌شود

۱۶ـ ثابت کنید تحت تبدیل $w = x^۲$ دایره $|w - ۱| = c$ به‌ازای cهای مختلف بتوی منحنی‌های $|z - ۱||z + ۱| = c$ نگاشت می‌شود.

حل: داریم $w = z^۲$ که از آن $w - ۱ = z^۲ - ۱$. چون $|w - ۱| = c$ پس $|z^۲ - ۱| = c$ یعنی $|z - ۱||z + ۱| = c$.

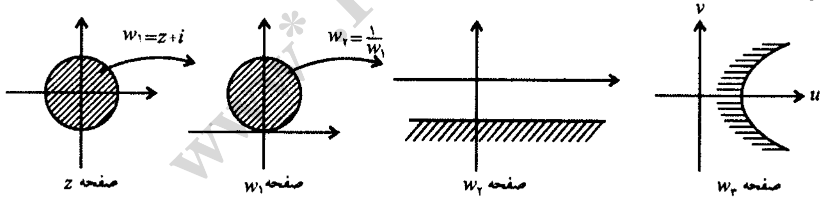
۱۷ـ تصویر داخل دایره $|z|=1$ را با استفاده از تابع $w=\frac{1}{(z+i)^2}$ به‌دست آورید.

حل: برای حل این بهتر است از چند تبدیل متوالی استفاده کنیم. فرض کنید $z+i=w_1$ دراین صورت $z=w_1-i$ که از آن $|z|=1=|w_1-i|$، بنابراین دایره حاصل را تحت تبدیل $w_2=\frac{1}{w_1}$ بررسی می‌کنیم. داریم $w_1=\frac{1}{w_2}$ که از آن $w_1-i=\frac{1}{w_2}-i$ به‌عبارتی دیگر $w_1-i=\frac{1-iw_2}{w_2}$. چون $|w_1-i|=1$ پس $\left|\frac{1-iw_2}{w_2}\right|=1$ که از آن $|1-iw_2|^2=|w_2|^2$ یعنی $(1-iw_2)(1+i\overline{w}_2)=w_2\overline{w}_2$ به‌عبارتی دیگر $1-i(w_2-\overline{w}_2)=0$ که از آن با فرض $w_2=u_2+iv_2$ می‌گیریم $v_2=-\frac{1}{2}$ پس $w_2=-\frac{i}{2}$ یعنی دایره $|w_1-i|=1$ تحت تبدیل $w_2=\frac{1}{w_1}$ به روی خط $w_2=-\frac{i}{2}$ نگاشت می‌شود

حال کافی است تبدیل $w=w_2^2$ را بررسی کنیم. داریم

$$w=w_2^2=(u_2+iv)^2=u_2^2-v_2^2+2iu_2v_2=u+iv$$

پس $u=u_2^2-v_2^2$ و $v=2u_2v_2$. با توجه به اینکه $v_2=-\frac{1}{2}$ می‌باشد پس $u=u_2^2-\frac{1}{4}$ و $v=-u_2$ که با حذف u_2 از این دو معادله می‌گیریم $u=v^2-\frac{1}{4}$. چون u_2 دلخواه است پس می‌توانیم تغییرات u_2 را یکبار از $u_2=0$ تا $u_2=\infty$ و بار دیگر از $u_2=-\infty$ تا $u_2=0$ درنظر بگیرید تا سهمی حاصل مشخص‌تر شود. به‌راحتی می‌توان مشاهده نمود که شاخه بالایی و پایین سهمی ناحیه موردنظر است. (شکل‌ها را ببینید)



۱۸ـ ثابت‌کنید معادله $\tan z=z$ فقط ریشه‌های حقیقی، و معادله $i^z+i^{-z}=0$ فقط ریشه‌های صحیح دارد.

حل: اول نشان می‌دهیم معادله $i^z+i^{-z}=0$ ریشه‌های صحیح دارد. برای این منظور می‌نویسیم

$$i^z=-i^{-z}\Rightarrow i^{2z}=-1\Rightarrow 2z\ln i=\ln(-1)\Rightarrow \pi z=2k\pi+\pi\Rightarrow z=2k+1$$

پس z تنها می‌تواند ریشه‌های حقیقی داشته باشد.

برای معادله $\tan z=z$ دانسته‌های فصل برای حل آن کافی نیست و یا اگر سعی شود با روابط جبری داده شده در این فصل اثبات شود بسیار وقت‌گیر است در پایان مسئله ۲۰ از فصل ۵ با استفاده از قضیه روشه حل این مسئله را بررسی خواهیم نمود. در حالت کلی معادله $\tan z=az$ با $a\geq 1$ دارای بیشمار ریشه حقیقی و برای $0<a<1$ تنها دارای ریشه موهومی محض است.

اینکه این معادله بینهایت ریشه حقیقی دارد با رسم نمودارهای $f(z)=z$ و $g(z)=-tanz$ به راحتی معلوم می شود. اما ریشه‌های مختلط ندارد.

۱۹ـ تصویر خط $z = (۱+i)t + ۲i$، $|t| < \infty$ را تحت تبدیل $w = e^z$ بیابید.

حل: داریم $z = (۱+i)t + ۲i = t + i(۲+t)$ درنتیجه،

$$w = e^z = e^{t+i(۲+t)} = e^t.e^{i(۲+t)} = Re^{i\phi} \Rightarrow R = e^t \,, \phi = ۲+t$$

که با حذف t از این رابطه می‌گیریم $R = e^{\phi-۲}$ یا به‌گونه‌ای دیگر $\phi = ۲ + \ln R$ که در آن $R > ۰$.

۲۰ـ نشان دهید که نوار نیمه نامتناهی $|x| \leq \frac{\pi}{۲}$، $y \geq ۰$ تحت تبدیل $w = (\sin z)^{\frac{۱}{۴}}$ به روی قسمتی از ربع اول که زیر خط $u = v$ قرار دارد نگاشت می‌شود.

حل: در اینجا هم مانند تمرین ۱۷ از چند تبدیل متوالی استفاده می‌کنیم. فرض کنید $w_۱ = \sin z$ در این صورت

$$w_۱ = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x ch y + i \cos x sh y = u_۱ + iv_۱$$
$$\Rightarrow u_۱ = \sin x ch y \quad , \quad v_۱ = \cos x sh y$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که ناحیه داده شده در صفحه $w_۱$ تحت تبدیل $w_۱ = \sin z$ به ناحیه بالایی صفحه $w_۱$ نگاشت می‌شود. حال با فرض $w = w_۱^{\frac{۱}{۴}}$ به‌طریقی مشابه نشان داده می‌شود که ناحیه فوق به ناحیه زیرین خط $u = v$ و بالای محور u نگاشته می‌شود.

حل آزمونهای چهار جوابی ۳

۱. کدام یک از توابع زیر در صفحه مختلط تحلیلی است

الف) $\exp(\bar{z})$ ب) $\cos \bar{z}$ ج) $\sin \bar{z}$ د) $\exp(z)$

حل: وجود $\bar{z}$ تحلیلی بودن را از بین می‌برد که در متن درس هم به برخی از آنها اشاره شد همچنین ثابت شد که $\exp(z)$ تابعی تحلیلی است پس گزینه د صحیح است.

۲. کدامیک از روابط زیر درست است؟

الف) $\cos z = \cosh iz$ ب) $\sinh z = i \sin z$

ج) $\cosh^۲ z = ۱ + \sinh^۲ z$ د) هر سه

حل: گزینه د اگر در رابطه (۱۳) این فصل بجای z قرار دهیم iz درستی الف و ب معلوم می‌شود. درستی ج بدیهی است.

۳. دوره تناوب تابع $\sinh z$ برابر است با

الف) ۲π ب) $۲k\pi$ ج) $۲\pi i$ د) πi

حل: گزینه ج

چون $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{۲}$ و توابع نمایی موجود دارای دوره تناوب $۲\pi i$ هستند پس $\sinh z$ هم دارای دوره تناوب $۲\pi i$ است.

۴. کدامیک از توابع زیر چند مقداری‌اند

الف) $\ln x$ ب) $\ln z$ ج) $\ln y$ د) $\ln(x+y)$

حل: گزینه ب به غیر از گزینه ب بقیه توابع حقیقی‌اند که تک مقداری‌اند

۵. مقدار اصلی $\ln(-1)$ برابر است با

الف) $i\pi$ ب) π ج) $\pi + i\theta$ د) $2k\pi i$

حل: گزینه الف مراجعه کنید به مثال ۵ از همین فصل

۶. $\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ مقدار اصلی کدام یک از داده‌های زیر است؟

الف) i^2 ب) i^i ج) $i^{\frac{\pi}{i}}$ د) $\left(\frac{\pi}{i}\right)^i$

حل: گزینه ب مراجعه کنید به مثال ۷ از همین فصل

۷. کدام گزاره زیر درست است؟

الف) اگر c عددی صحیح باشد z^c تک مقداری است

ب) اگر c عددی صحیح باشد z^c چند مقداری است

ج) $z = 1$ یک شاخه از z^c است وقتی c عددی صحیح است

د) c^z یک تابع چند مقداری است.

حل: گزینه الف. بدیهی است.

۸. مشتق $\sinh^{-1} z$ کدام است؟

الف) $\sqrt{1+z^2}$ ب) $\sqrt{1-z^2}$ ج) $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ د) $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

حل: گزینه ج. مراجعه شود به روابط (۳۵) همین فصل

۹. معادله $e^z = 0$ در فاصله 0 و $i\pi$

الف) جواب ندارد ب) تنها یک جواب دارد ج) دو جواب دارد د) بی‌شمار جواب دارد

حل: گزینه الف.

قبلاً نشان دادیم که معادله $e^z = 0$ به‌ازای هیچ z ای صفر نمی‌شود

۱۰. معادله $\tan z = i$

الف) بی‌شمار جواب دارد ب) تنها یک جواب دارد ج) تنها دو جواب دارد د) جواب ندارد

حل: گزینه د.

حل تمرین شماره ۴ از همین فصل را ببینید.

حل تمرین‌های خودآزمایی ۴

۱ـ کار انجام شده از نقطه $A(-۱,۱)$ تا $B=(۱,۱)$ را روی سهمی گذرا از مرکز مختصات بوسیله نیروی $\overline{f}=(۲xy+x^۲)\overrightarrow{i}+x^۲\overrightarrow{j}$ محاسبه نمایید.

حل: با توجه به نقاط داده شده معادله سهمی $y=x^۲$ است که از آن $dy=۲xdx$. از طرفی داریم $f(z)=۲xy+x^۲+ix^۲$ بنابراین

$$\text{کار انجام شده}=Re\int_c\overline{f}(z)dz=Re\int_{-۱}^{۱}(۲xy+x^۲-ix^۲)(۱+۲xi)dx$$
$$=\int_{-۱}^{۱}(۲xy+x^۲+۲x^۳)dx=\int_{-۱}^{۱}(۲x^۳+x^۲+۲x^۳)dx=\frac{x^۳}{۳}|_{-۱}^{۱}=\frac{۲}{۳}$$

۲ـ در مسائل مربوط به جریان سیال، انتگرال خط $\int_c\overrightarrow{V}.d\overrightarrow{r}$ با مؤلفه‌های مماسی بردار سرعت دور منحنی c، معرف گردش دور این منحنی است. اگر مؤلفه‌های $\overrightarrow{V}$ به ترتیب $u(x,y)$ و $v(x,y)$ باشند آنگاه حاصل $Re\oint_c\overline{f}(z)dz$ مبین گردش است. با انتخاب $\overrightarrow{V}=۲xy\overrightarrow{i}+(x^۲-y^۲)\overrightarrow{j}$ یا $\overrightarrow{V}=r\cos۲\theta u_r$، حاصل آنرا بیابید

حل: داریم $dz=dx+idy$ و $f(z)=۲xy+i(x^۲-y^۲)$ بنابراین

$$Re\oint_c\overline{f}(z)dz=Re\oint_c(۲xy-i(x^۲-y^۲))(dx+idy)$$

$$= \oint_c 2xydx + (x^2 - y^2)dy \overset{\text{قضیه گرین}}{=\!=\!=} \int_D \int (2x - 2x)dA = 0$$

۳ـ با محاسبه $\oint_c e^z dz$ که c مرز دایره $|z| = 1$ است نشان دهید

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta)d\theta = 0$$

حل: با فرض $z = \cos\theta + i\sin\theta$ داریم $dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$. پس

$$\begin{aligned}
\oint_c e^z dz &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta}(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cdot e^{i\sin\theta}(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta))(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}(-\cos(\sin\theta)\sin\theta - \cos\theta\sin(\sin\theta))d\theta \\
&+ i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}(\cos\theta\cos(\sin\theta) - \sin\theta\sin(\sin\theta))d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta + \sin\theta)d\theta + i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta + \sin\theta)d\theta
\end{aligned}$$

امّا $\oint_c e^z dz = 0$ (بنابر قضیه کوشی)، پس با مقایسه طرفین تساوی سمت راست تساوی هم باید صفر باشد. چون سمت راست عددی مختلط است و عدد مختلط وقتی صفر می‌شود که قسمتهای حقیقی و موهومی آن صفر باشند در نتیجه

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta)d\theta = 0$$

۴ـ با محاسبه $\oint_c \frac{\cos z}{z}dz$ که c مرز دایره $|z| = 1$ است درستی رابطهٔ زیر را بررسی کنید

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta = 2\pi.$$

حل: با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم $\oint_c \frac{\cos z}{z}dz = 2\pi i$ از طرفی $z = \cos\theta + i\sin\theta$ که از آن $dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$ بنابراین

$$\begin{aligned}
\oint_c \frac{\cos z}{z}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\cos\theta + i\sin\theta)(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} \\
&= i\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta}d\theta
\end{aligned}$$

$$= i\int_{۰}^{۲\pi} \cos(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta = ۲\pi i$$

$$\Rightarrow \int_{۰}^{۲\pi} \cos(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta = ۲\pi$$

امّا

$$\cos(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\cos\theta)\cos(i\sin\theta) - \sin(\cos\theta)\sin(i\sin\theta)$$

$$= \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta) - i\sin(\cos\theta)\sin(\sinh\theta)$$

که با جاگذاری در انتگرال و مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم

$$\text{i)} \quad \int_{۰}^{۲\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta = ۲\pi$$

$$\text{ii)} \quad \int_{۰}^{۲\pi} \sin(\cos\theta)\sin(\sinh\theta)d\theta = ۰$$

۵ـ با توجه به فرمول انتگرال کوشی داریم $\oint_c \frac{e^{az}dz}{z^{n+۱}} = \frac{۲a^n\pi i}{n!}$ که c مرز دایره $|z| = ۱$ است. با توجه به این موضوع ثابت کنید

$$\text{i)} \quad \int_{۰}^{۲\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta - n\theta)d\theta = \frac{۲\pi a^n}{n!}$$

$$\text{ii)} \quad \int_{۰}^{۲\pi} e^{a\cos\theta}\sin(a\sin\theta - n\theta)d\theta = ۰$$

حل: مجدداً داریم $z = \cos\theta + i\sin\theta$ که از آن $dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta$ در نتیجه

$$\oint_c \frac{e^{az}dz}{z^{n+۱}} = i\int_{۰}^{۲\pi} \frac{e^{a(\cos\theta + i\sin\theta)}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+۱}}(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta$$

$$= i\int_{۰}^{۲\pi} \frac{e^{a(\cos\theta + i\sin\theta)}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}d\theta$$

$$= i\int_{۰}^{۲\pi} \frac{e^{a\cos\theta}.e^{ia\sin\theta}}{\cos n\theta + i\sin n\theta}d\theta$$ صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم

$$= i\int_{۰}^{۲\pi} e^{\cos\theta}(\cos(a\sin\theta) + i\sin(a\sin\theta))(\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta$$

$$= i\int_{۰}^{۲\pi} e^{\cos\theta}[\cos(a\sin\theta)\cos n\theta + \sin n\theta\sin(a\sin n\theta)]d\theta$$

$$+ \int_{۰}^{۲\pi} e^{\cos\theta}\sin(a\sin\theta - n\theta)d\theta + i\int_{۰}^{۲\pi} e^{\cos\theta}\cos(a\sin\theta - n\theta)d\theta = \frac{۲a^n\pi i}{n!}$$

با مقایسه طرفین تساوی نتایج بالا بدست می‌آیند.

۶ـ نشان دهید

$$\text{(i)}\quad \oint_c \frac{e^{۲z}dz}{z-۲} = ۲\pi i e^{۴} \qquad , \quad c: |z-۲| = ۱$$
$$\text{(ii)}\quad \oint_c \frac{dz}{(z^۲+۱)(z^۲+۴)} = ۰ \qquad , \quad c: |z| = \frac{۳}{۲}$$
$$\text{(iii)}\quad \oint_c \tan z dz = ۰ \qquad , \quad c: |z| = ۱$$
$$\text{(iv)}\quad \oint_c \cos z e^{\sin z} dz = ۰ \qquad , \quad c: r = a(۱+\cos\theta)$$

حل: (i)چون $z = ۲$ داخل D قرار دارد پس بنابر فرمول انتگرال کوشی داریم

$$\oint_c \frac{e^{۲z}dz}{z-۲} = ۲\pi i f(۲) = ۲\pi i e^{۴}.$$

(ii) نقاط $z = \pm i$ داخل دایره $c: |z| = \frac{۳}{۲}$ قرار دارند در نتیجه

$$\oint_c \frac{dz}{(z^۲+۱)(z^۲+۴)} = \oint_{c_۱} \frac{\frac{۱}{(z+i)(z^۲+۴)}}{z-i}dz + \oint_{c_۲} \frac{\frac{۱}{(z-i)(z^۲+۴)}}{z+i}dz$$
$$= ۲\pi i f(i) + \pi i f(-i) = ۲\pi i \left(\frac{۱}{۶i} + \frac{۱}{-۶i}\right) = ۰$$

(iii) می‌نویسیم $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ که $\cos z$ در نقاط $\pm\frac{\pi}{۲}$، $\pm\frac{۳\pi}{۲}$، ...صفر می‌شود که هیچکدام از آنها داخل دایره قرار ندارد در نتیجه بنابر قضیه کوشی ـ گورسا حاصل انتگرال صفر می‌شود.

(iv) چون تابع زیر انتگرال تابعی تحلیلی است بنابراین طبق قضیه کوشی ـ گورسا مقدار انتگرال صفر می‌شود

۷ـ درستی حاصل انتگرالهای داده شده زیر را بررسی کنید اگر c دایره $|z| = ۲$ باشد

$$\text{(i)}\quad \oint_c \frac{z(z^۲+۱)dz}{(z-۱)^۲} = ۸\pi i \quad , \quad \text{(ii)}\quad \oint_c \frac{e^z dz}{z^۳} = \pi i$$
$$\text{(iii)}\quad \oint_c \frac{e^{az}\sin z}{z^۲}dz = ۲\pi i \quad , \quad \text{(iv)}\quad \oint_c \frac{\sin z dz}{z^{۲n}} = \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{(۲n-۱)!}$$

حل: (i) نقطه $z = ۱$ داخل دایره قرار دارد پس با استفاده از تعمیم فرمول انتگرال کوشی داریم

$$\oint_c \frac{z(z^۲+۱)}{(z-۱)^۲}dz = ۲\pi i \frac{d}{dz}(z(z^۲+۱))_{z=۱} = ۲\pi i(۳z^۲+۱)_{z=۱} = ۸\pi i$$

(ii) همانند قسمت (i) مجدداً از تعمیم فرمول و انتگرال کوشی استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\oint_c \frac{e^z \sin z}{z^۳}dz = \frac{۲\pi i}{۲!}\frac{d^۲}{dz^۲}(e^z \sin z)_{z=۰} = \pi i$$

(iii) در اینجا ریشه تکراری $z = ۰$ را با تکرار دو داریم پس مثل قسمت (i) می‌نویسیم

$$\oint_x \frac{e^{az}\sin z}{z^۲}dz = ۲\pi i \frac{d}{dz}(e^{az}\sin z)_{z=۰} = ۲\pi i(۰+۱) = ۲\pi i$$

(iv) این تمرین مانند قسمت (ii) است؛ با $۲n$ ریشه تکراری در $z = ۰$ در نتیجه

$$\oint_c \frac{\sin z}{z^{۲n}} dz = \frac{۲\pi i}{(۲n-۱)!}\left(\frac{d^{۲n-۱}(\sin z)}{dz^{۲n-۱}}\right)_{z=۰}$$
$$= \frac{۲\pi i}{(۲n-۱)!}(-۱)^{n-۱}(\cos z)_{z=۰} = \frac{۲\pi i(-۱)^n}{(۲n-۱)!}.$$

۸ـ یکی از انتگرالهای معین و مهم که کاربردهای بسیار به‌ویژه در نظریه احتمال و آمار دارد، انتگرال پواسن است که با $I = \int_۰^\infty e^{-ax^۲} dx$ نشان داده می‌شود و حاصل آن با استفاده از انتگرالهای دوگانه برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ خواهد بود. با فرض $a = ib$ درستی انتگرالهای زیر، که به انتگرالهای فرنل معروفند، را تحقیق نمایید.

$$\int_۰^\infty \cos bx^۲ dx = \int_۰^\infty \sin bx^۲ dx = \sqrt{\frac{\pi}{۸b}}$$

حل: با فرض $a = ib$ داریم

$$\int_۰^\infty e^{-ax^۲} dx = \int_۰^\infty e^{-ibx^۲} dx = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{ib}} = \frac{۱}{۲}(i)^{-\frac{۱}{۲}}\sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

از طرفی با استفاده از فرمول اویلر و ریشه دوم $\frac{۱}{i}$ می‌توانیم بنویسیم

$$\int_۰^\infty e^{-ibx^۲} dx = \int_۰^\infty (\cos bx^۲ - i\sin bx^۲) dx = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{b}}(i)^{-\frac{۱}{۲}}$$
$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\left[\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{۴}\right) - i\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{۴}\right)\right]$$

با $k = ۰, ۱$. در نتیجه

$$\int_۰^\infty \cos bx^۲ dx = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{۴}\right)$$
$$\int_۰^\infty \sin bx^۲ dx = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{۴}\right)$$

با انتخاب $k = ۰$ نتایج مورد نظر به‌دست می‌آیند. با $k = ۱$ نتایجی قرینه با نتایج قبلی را خواهیم داد.

۹ـ با استفاده از قضیه گرین نشان دهید مساحت هر ناحیه بسته‌ای نظیر D با مرز c از فرمول $\frac{۱}{۲i}\oint_c \bar{z} dz$ بدست می‌آید. آنگاه مساحت بیضی $|z-۳| + |z+۳| = ۱۰$ را بدست آورید.

حل: با توجه به فرمول مساحت می‌دانیم برای هر ناحیه D که مرز آن c باشد فرمول مساحت با استفاده از $\iint_D dA$ بدست می‌آید که اگر قضیه گرین را اعمال کنیم خواهیم داشت

$$\iint_D dA = \frac{۱}{۲}\oint_c xdy - ydx$$

سمت راست تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{۱}{۲}\oint_c xdy - ydx = \frac{۱}{۲i}\oint_c [i(xdy - ydx) + ۰]$$

$$= \frac{1}{2i} \oint_c [i(xdy - ydx) + \oint_c (xdx + ydy)]$$
$$= \frac{1}{2i} \oint_c (x - iy)dx + i(x - iy)dy$$
$$= \frac{1}{2i} \oint_c (x - iy)d(x + iy) = \frac{1}{2i} \oint_c \overline{z}dz$$

حال نشان می‌دهیم که حاصل این انتگرال πab می‌شود.
با فرض $x = a\cos\theta$ و $y = b\sin\theta$ می‌گیریم

$$\frac{1}{2i} \oint_c \overline{z}dz = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} (a\cos\theta - ib\sin\theta)(-a\sin\theta + ib\cos\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} (b^2 - a^2)\sin\theta\cos\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} abd\theta$$
$$= \frac{1}{4i}(b^2 - a^2)\sin^2\theta|_0^{2\pi} + \frac{ab}{2}|_0^{2\pi} = \pi ab$$

چون بیضی با رابطه $|z + 3| + |z - 3| = 10$ داده شده است براحتی می‌توان دریافت که $a = 5$ و $b = 4$ در نتیجه مساحت بیضی 20π خواهد شد

۱۰ـ با استفاده از قضیه مقدار میانگین گوس ثابت نمایید که

$$\text{i)} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2e^{i\theta}\right) d\theta = \pi$$
$$\text{(ii)} \quad \int_0^{2\pi} \ln(a^2 + 1 + 2a\cos\theta)d\theta = 4\pi\ln a, \quad a > 1$$

حل: (i) با توجه به فرمول حاصل از قضیه مقدار میانگین گوس داریم

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta = f(a)$$

که مقایسه انتگرال داده شده با این فرمول نتیجه زیر را حاصل می‌کند

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2e^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi\sin^2\frac{\pi}{4} = \pi$$

(ii) در صورت مسئله موجود درکتاب $\cos n\theta$ درج شده است که در اینجا با حذف n به صورت $\cos\theta$ تصحیح می‌شود.
تابع $f(z) = \ln z^2$ را در نظر می‌گیریم که $z = a + e^{i\theta}$.
با استفاده از قضیه مقدار میانگین گوس داریم

$$\int_0^{2\pi} \ln(a + e^{i\theta})d\theta = 2\pi\ln a^2 = 4\pi\ln a$$

از طرفی بنابر تعریف لگاریتم داریم

$$\begin{aligned}\ln(a+e^{i\theta})^{2} &= \ln|a+e^{i\theta}|^{2} + i\arg(a+e^{i\theta})^{2}\\ &= \ln|(a+\cos\theta+i\sin\theta)|^{2} + 2i\arg\alpha\\ &= \ln(a^{2}+1+2a\cos\theta) + 2i\arg\alpha\end{aligned}$$

که با بکارگیری این حاصل در انتگرال بالا می‌گیریم

$$\int_{0}^{2\pi}[\ln(a^{2}+1+2a\cos\theta)+2i\arg\alpha]d\theta = 4\pi\ln a$$

از مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم

$$\int_{0}^{2\pi}\ln(a^{2}+1+2a\cos\theta)d\theta = 4\pi\ln a$$

$$\int_{0}^{2\pi}\arg\alpha d\theta = 0$$

۱۱ـ ناحیه کراندار و بسته D که به صورت $0 \le x \le 1$ ، $0 \le y \le 1$ داده شده است را در نظر می‌گیریم. ماکزیمم و می‌نیمم تابع $f(z) = Rez^{2}$ را برای ناحیه D بدست آورید.

حل: داریم

$$f(z) = Rez^{2} = Re(x+iy)^{2} = Re(x^{2}-y^{2}+2ixy) = x^{2}-y^{2}$$

بدیهی است که برای D، ماکزیمم f در $x=1$ و $y=0$ و می‌نیمم آن در $x=0$ و $y=1$ است که هر دو نقطه روی مرز c قرار دارند.

۱۲ـ فرض می‌کنیم $P(z)$ یک چند جمله‌ای باشد که یک ریشه تکراری از مرتبه n در z_0 دارد و z_0 تنها نقطه داخل ناحیه D باشد که مرز آن c است. نشان دهید،

$$\oint_{c}\frac{P'(z)dz}{P(z)} = 2n\pi i.$$

حل: فرض کنید $P(z) = (z-z_0)^{n}Q(z)$ که $Q(z_0) \neq 0$ در این صورت

$$\begin{aligned}\oint_{c}\frac{P'(z)}{P(z)}dz &= \oint_{c}\frac{n(z-z_0)^{n-1}Q(z)+(z-z_0)^{n}Q'(z)}{(z-z_0)^{n}Q(z)}dz\\ &= \oint_{x}\frac{nQ(z)+(z-z_0)Q'(z)}{(z-z_0)Q(z)}dz\\ &= \oint_{c}\frac{n+\dfrac{(z-z_0)}{Q(z)}Q'(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i(n+0) = 2\pi ni\end{aligned}$$

۱۳ـ حاصل $\oint_c \frac{dz}{z^{2}(z-1)^{3}}$ راکه در آن c دایره ۲ $=|z|$ است با استفاده از تغییر متغیر $z=\frac{1}{w}$ بدست آورید.

حل: از $z=\frac{1}{w}$ می‌گیریم $dz=-\frac{dw}{w^{2}}=-z^{2}dw$ و از ۲ $=|z|$ می‌گیریم $|w|=\frac{1}{2}$ بنابراین

$$\oint_c \frac{dz}{z^{2}(z-1)^{3}}=\oint_c \frac{-z^{2}dw}{z^{2}\left(\frac{1}{w}-1\right)^{3}}=-\oint_{c'} \frac{w^{3}dw}{(1-w)^{3}}=0$$

زیرا $c':|w|=\frac{1}{2}$ و $w=1$ خارج این دایره واقع می‌شود.

۱۴ـ با انتخاب مسیری که شامل $z=0$ و قسمت منفی محور حقیقی نیست و استفاده از مقادیر اصلی برای توابع z^{i} و i^{z} درستی

$$\int_{-i}^{i}(z^{i}-i^{z})dz=(i+1)ch\frac{\pi}{2}-\frac{4i}{\pi}sh\frac{\pi}{2}$$

را بررسی کنید.

حل: فرض کنید $f(z)=z^{i}-i^{z}$ اگر c را طوری در نظر بگیریم که $z=0$ و قسمت منفی محور حقیقی را شامل شود در این صورت $f(z)$ بر c تحلیلی است و بنابر نتیجه (iii) از قضیه کوشی ـ گورسا داریم

$$\begin{aligned}\int_{-i}^{i}(z^{i}-i^{z})dz&=\frac{z^{i+1}}{i+1}-\frac{i^{z}}{\ln i}\Big|_{-i}^{i}\\&=\frac{1}{i+1}(i^{i+1}-(-i)^{i+1})-\frac{1}{\ln i}(i^{i}-i^{-i})\\&=\frac{1}{i+1}(e^{(1+i)\ln i}-e^{(1+i)\ln(-i)})-\frac{1}{\ln i}(e^{i\ln i}-e^{-i\ln i})\end{aligned}$$

چون مقدار اصلی مورد نظر است پس

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{i+1}(e^{i(1+i)\frac{\pi}{2}}-e^{i(1+i))\frac{-\pi}{2}}-\frac{1}{i\frac{\pi}{2}}(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}})\\&=\frac{1}{i+1}(e^{-\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}})-\frac{1}{i\frac{\pi}{2}}(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}})\\&=\frac{1}{i+1}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{i\frac{\pi}{2}}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{-\pi}{2}}\right)\\&=\frac{i}{i+1}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}})+\frac{1}{i\frac{\pi}{2}}(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}})\\&=i(1-i)\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\right)-\frac{4i}{\pi}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\right)\\&=(i+1)ch\frac{\pi}{2}-\frac{4i}{\pi}sh\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

۱۵ـ اگر مسیر انتگرال را سمت راست محور y ها انتخاب نمائیم می‌توان نشان داد که $\int_{-i}^{i} \frac{1}{z}dz = \pi i$. آیا اگر مسیر انتگرال را سمت چپ محور y ها انتخاب کنیم حاصل انتگرال مستقل از مسیر خواهد بود؟ علت را بیان دارید.

حل: فرض کنید c مسیری از $-i$ تا i در سمت چپ محور موهومی در نظر گرفته شود. چون $\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$ و $\ln z$ در سمت چپ محور موهومی تحلیلی نیست، c را از $-i$ تا i به صورت دایره واحد در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت $z = e^{-i\theta}$ و $dz = -ie^{-i\theta}d\theta$. در نتیجه

$$\int_{-i}^{i} \frac{dz}{z} = \oint \frac{dz}{z} = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{-ie^{-i\theta}}{e^{-i\theta}}d\theta = -i\pi$$

و همانطوریکه مشاهده می‌شود مقدار انتگرال به مسیر انتگرالگیری وابسته است.

۱۶ـ اگر $F'(z) = f(z)$ و $f(z)$ روی مسیری که z_1 را به z_2 وصل می‌کند تحلیلی باشد ثابت کنید

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

حل: با فرض اینکه $z(t) = \phi(t) + i\psi(t)$ معادله پارامتری کمان c باشد که نقطه $A = z(t_1)$ را به نقطه $B = z(t_2)$ وصل می‌کند در اینصورت

$$\begin{aligned}\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz &= \int_{z_1}^{z_2} F'(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} F'(z(t))d(z(t))\\ &= \int_{t_1}^{t_2} d(F(z(t))) = F(z)|_{t_1}^{t_2} = F(z(t_2)) - F(z(t_1))\\ &= F(z_2) - F(z_1).\end{aligned}$$

۱۷ـ کمیتهای T_c و N_c که به ترتیب معرف گردش بردار سرعت $\overrightarrow{V}$ و شار بردار $\overrightarrow{V}$ پیموده شده در جهت مثبت‌اند با رابطه $T_c + iN_c = \int_c f'(z)dz$ داده می‌شوند. اگر حرکت مایعی با پتانسیل مختلط $f(z) = \ln\sinh(\pi z)$ مشخص شود، مقدار گردش و شارگذرا بر دایره $|z| = \frac{3}{2}$ را بیابید.

حل: داریم

$$T_c + iN_c = \int_c f'(z)dz = \oint_c \frac{\pi ch\pi z}{sh\pi z}dz$$

که مخرج در نقاط $z = ki$ صفر می‌شود که تنها برای $k = \pm 1$ نقاط $z = \pm i$ در داخل دایره داده شده قرار دارند.

با استفاده از قضیه مانده در فصل بعدی نشان داده می‌شود که حاصل این انتگرال برابر $\frac{1}{\pi i} = \frac{1}{2\pi i}(2)$ می‌شود. به مثال ۱۲ از فصل ۵ مراجعه شود.

۱۸ـ فرض می‌کنیم $f(z)$ تابعی تحلیلی و M عددی مثبت باشد به گونه‌ای که $|f(z)| \leq M|z|$. نشان دهید $f(z) = az + b$ است.

حل: با استفاده از نامساوی داده شده داریم

$$|f(z)| \leq M|z| \leq Mr$$

که r شعاع دایره با مرز c است. حال اگر در فرمول تعمیم انتگرال کوشی n را برابر ۲ اختیار کنیم خواهیم داشت

$$|f''(z)| \leq \frac{۲!Mr}{r^۲} = \frac{۲M}{r}$$

که صفر می‌شود اگر $r \to \infty$. یعنی $f''(z) = ۰$ می‌شود. با دو بار انتگرال گیری می‌گیریم $f(z) = az + b$.

۱۹ـ فرض می‌کنیم تابع $f(z)$ در ناحیه بسته ساده D و روی مرز آن تحلیلی باشد اگر مرکز مختصات درون این ناحیه باشد ثابت کنید برای هر شاخه از $\ln z$ داریم

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_x f'(z)\ln z dz = f(z_۰) - f(۰)$$

که نقطه $z_۰$ نقطه شروع انتگرال‌گیری است.

حل: داریم

$$\int_c f'(z)\ln z dz = f(z)\ln z|_{z_۰}^{z_۰} - \int_c \frac{f(z)}{z}dz$$
$$= f(z_۰)(\ln z_۰ + ۲\pi i) - f(z_۰)\ln z_۰$$
$$- ۲\pi i f(۰) = ۲\pi i(f(z_۰) - f(۰))$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_c f'(z)\ln z dz = f(z_۰) - f(۰)$$

۲۰ـ این مسئله را در فصل ۵ با استفاده از مطالب آن فصل بررسی می‌کنیم.

حل آزمونهای چهار جوابی ۴

۱. حاصل انتگرال $\oint_c e^{z^۲}dz$ که $c: |z| = ۲$ برابر است با

الف) ۱ ب) π ج) ۰ د) πi

حل: گزینه ج. تابع زیر انتگرال در c تحلیلی است پس بنابر قضیه کوشی حاصل انتگرال صفر می‌شود

۲. مقدار $\oint_c \frac{e^{z^۲}dz}{z}$ که در $c: |z| = ۲$، برابر است با

الف) ۱ ب) ۲π ج) ۰ د) $۲\pi i$

حل: با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم $\oint_c \frac{e^{z^۲}dz}{z} = ۲\pi i(e^۰) = ۲\pi i$ بنابراین گزینه د صحیح است.

۳. حاصل انتگرال $\oint_c \frac{e^{z^۲}}{z^۲}dz$ که $c: |z| = ۲$ برابر است با

الف) ۲ ب) π ج) ۰ د) πi

حل: با استفاده از تعمیم فرمول انتگرال کوشی داریم

$$\oint_c \frac{e^{z^۲}}{z^۲} = ۲\pi i(۲ze^{z^۲})_{z=۰} = ۰$$

یعنی گزینه ج درست است.

۴. عکس قضیه کوشی ـ گورسا کدام است

الف) قضیه مورآ ب) قضیه گوس ج) قضیه لیوویل د) قضیه گرین

حل: گزینه الف.

۵. با استفاده از کدام قضیه نشان داده می‌شود که یک معادله از درجه n دقیقاً n ریشه دارد.

الف) قضیه کوشی ب) قضیه مورآ ج) قضیه لیوویل د) قضیه گوس

حل: گزینه ج

۶. حاصل $\oint_c \frac{\cos z}{z - \pi i}dz$ به‌ازای هر کانتور حول نقطه πi برابر است با:

الف) $\sin \pi i$ ب) $۲\pi \sin \pi$ ج) $۲\pi \cos h\pi$ د) $\cos ۲\pi i$

حل: داریم

$$\oint_c \frac{\cos z}{z - \pi i}dz = ۲\pi i \cos \pi i = ۲\pi ch\pi$$

پس گزینه ج درست است.

۷. کدامیک از نامساویهای زیر نامساوی کوشی است

الف) $|f^{(n)}(z_۰)| \leq \frac{n!}{r}$ ب) $|f(z_۰)| < \frac{M}{n!}$

ج) $|f^{(n)}(z_۰)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$ د) $|f(z_۰)| < \frac{mn}{n!}$

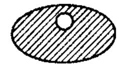
حل: گزینه ج

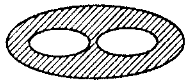
۸. حاصل $\oint_c (z - z_۰)^k dz$ حول دایره c به مرکز $z_۰$ وقتی $k \neq -۱$ برابر است با

الف) $۲\pi i$ ب) $\frac{۲\pi i}{k!}$ ج) $\frac{۲\pi i}{n!}$ د) ۰

حل: گزینه د

۹. کدامیک از قلمروهای زیر همبند ساده است؟

الف) 

ب) 

ج) 

د) 

حل: اگرچه الف و ب و ج همبنداند امّا تنها گزینه ج که همبند ساده است صحیح است

۱۰. حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty} \cos 2\pi x^{2} dx$ برابر است با

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $4i$ ج) $4\pi i$ د) $\frac{\pi i}{4}$

حل: گزینه الف. از نتیجه تمرین ۸ همین فصل استفاده شود.

حل تمرین‌های خودآزمایی ۵

۱ـ سری لوران توابع زیر را حول نقطه داده شده بدست آورید.

$$\text{(i)}\ f(z)=\frac{z+۱}{(z-۱)(z-۲)},z_۰=۱\quad,\quad \text{(ii)}\ f(z)=z^۲\cos\frac{۱}{z},z_۰=۰$$
$$\text{(iii)}\ f(z)=\frac{۱}{z}\cosh\left[\frac{۱}{z}\right],z_۰=۰\quad,\quad \text{(iv)}\ f(z)=\frac{۱}{z}\sinh\sqrt{z},z_۰=۰$$

(i)سری برای دو دامنه بررسی می‌شود. یکی برای $۰<|z-۱|<۱$ و دیگری برای $|z-۱|>۱$. داریم

$$\frac{z+۱}{(z-۱)(z-۲)}=\frac{-۲}{z-۱}+\frac{۳}{z-۲}$$

که برای $۰<|z-۱|<۱$ می‌نویسیم

$$\frac{z+۱}{(z-۱)(z-۲)}=\frac{-۲}{z-۱}+\frac{۳}{z-۲}=\frac{-۲}{z-۱}+\frac{۳}{(z-۱)-۱}$$
$$=\frac{-۲}{z-۱}-\frac{۳}{۱-(z-۱)}=-\frac{۲}{z-۱}-۳\sum_{۰}^{\infty}(z-۱)^n$$

و برای $|z-۱|>۱$، به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$f(z)=\frac{-۲}{z-۱}+\frac{۳}{z-۲}=\frac{-۲}{z-۱}+\frac{۳}{(z-۱)\left(۱-\frac{۱}{z-۱}\right)}$$

$$= \frac{-۲}{z-۱} + \frac{۳}{z-۱}\sum_{۰}^{\infty}(z-۱)^{-n}$$

از اینرو

$$f(z) = -۲(z-۱)^{-۱} + ۳\sum_{۰}^{\infty}(z-۱)^{-n-۱}$$
$$= (z-۱)^{-۱} + ۳\sum_{۱}^{\infty}(z-۱)^{-n-۱}$$

(ii) بسط $\cos\frac{۱}{z}$ با استفاده از بسط تیلور برای $\cos z$ بدست می‌آید، در نتیجه

$$z^{۲}\cos\frac{۱}{z} = z^{۲}\left(۱ - \frac{\frac{۱}{z^{۲}}}{۲!} + \frac{\frac{۱}{z^{۴}}}{۴!} - \frac{\frac{۱}{z^{۶}}}{۶!}\cdots\right) \qquad = z^{۲} - \frac{۱}{۲!} + \frac{\frac{۱}{z^{۲}}}{!} - \frac{\frac{۱}{z^{۴}}}{۶!} + \cdots$$

(iii) بطریقی مشابه قسمت (ii) داریم

$$\frac{۱}{z}\cosh\left[\frac{۱}{z}\right] = \frac{۱}{z}\left(۱ + \frac{۱/z^{۲}}{۲!} + \frac{۱/z^{۴}}{۴!} + \frac{۱/z^{۶}}{۶!} + \cdots\right)$$
$$= \frac{۱}{z} + \frac{۱/z^{۳}}{۲!} + \frac{۱/z^{۵}}{۴!} + \frac{۱/z^{۷}}{۶!} + \cdots$$

(iv) برای نوشتن بسط $\sinh\sqrt{z}$ از بسط تیلور $\sinh z$ استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\frac{۱}{z}\sinh\sqrt{z} = \frac{۱}{z}\left(z^{\frac{۱}{۲}} + \frac{z^{\frac{۳}{۲}}}{۳!} + \frac{z^{\frac{۵}{۲}}}{۵!} + \cdots\right)$$
$$= z^{\frac{-۱}{۲}} + \frac{z^{\frac{۱}{۲}}}{۳!} + \frac{z^{\frac{۳}{۲}}}{۵!} + \frac{z^{\frac{۵}{۲}}}{۷!} + \cdots$$

۲ـ با نوشتن سه جمله اول از سری لوران توابع زیر نشان دهید مانده برای هر یک از این توابع برابر یک است

$$\text{(i) } f(z) = \csc z, |z| < \pi \;\; ; \;\; \text{(ii)} f(z) = \frac{e^{z}}{z^{۲}(۱+z^{۲})}, \;\; ۰ < |z| < ۱$$

حل: (i) برای $cscz$ داریم $cscz = \frac{۱}{\sin z}$ و بسط $\sin z$ را می‌نویسیم. می‌گیریم

$$f(z) = \csc z = \frac{۱}{\sin z} = \frac{۱}{z - \frac{z^{۳}}{۳!} + \cdots} = \frac{۱}{z\left(۱ - \frac{z^{۲}}{۳!} + \frac{z^{۴}}{۵!} + \cdots\right)}$$
$$= \frac{۱}{z}\left(۱ - \frac{z^{۲}}{۳!} + \frac{z^{۴}}{۵!} - \cdots\right)^{-۱} = \frac{۱}{z}\left(۱ + \frac{z^{۲}}{۳!} - \frac{z^{۴}}{۵!}\cdots + \left(\frac{z^{۲}}{۳!} - \frac{z^{۴}}{۵!}\cdots\right)^{۲} + \cdots\right)$$
$$= \frac{۱}{z} + \frac{z}{۳!} + \frac{۷}{۳۶۰}z^{۳} + \cdots$$

که نشان می‌دهد مانده تابع برابر یک است.

(ii) همانند قسمت (i) عمل می‌کنیم. داریم

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^z}{z^۲(۱+z^۲)} = \frac{۱}{z^۲}(e^z)(۱+z^۲)^{-۱} = \\
&= \frac{۱}{z^۲}\left(۱+\frac{z}{۱!}+\frac{z^۲}{۲!}+\cdots\right)(۱-z^۲+z^۴-z^۶+\cdots) \\
&= \frac{۱}{z^۲}\left(۱+\frac{z}{۱!}-\frac{z^۲}{۲}-z^۳+\cdots\right) \\
&= \frac{۱}{z^۲}+\frac{۱}{z}-\frac{۱}{۲}-z+\cdots
\end{aligned}
$$

ضریب $\frac{۱}{z}$ برابر یک است پس مانده یک می‌باشد.

۳ـ با استفاده از نوشتن سری لوران تابع $f(z) = \dfrac{\sin z^۲}{z^۲\left(z-\frac{\pi}{۴}\right)}$ حول نقطه صفر برای حالتی که $۰ < |z| < ۱$ مقدار مانده $f(z)$ را محاسبه کنید. آیا $z = \infty$ یک نقطه تکین برای این تابع می‌باشد؟ اگر جوابتان مثبت است حاصل مانده را در $z = \infty$ بدست آورید.

حل: می‌نویسیم

$$\frac{\sin z^۲}{z^۲}\left(z-\frac{\pi}{۴}\right)^{-۱} = \frac{۱}{z^۲}\left(z-\frac{\pi}{۴}\right)^{-۱}\sin z^۲$$

و چون $۰ < |z| < ۱$ در نتیجه برای نوشتن بسط $\left(z-\frac{\pi}{۴}\right)^{-۱}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
\frac{۱}{z^۲}\left(z-\frac{\pi}{۴}\right)^{-۱}\sin z^۲ &= \frac{-۱}{z^۲}\frac{۴}{\pi}\left(۱-\frac{۴}{\pi}z\right)^{-۱}\sin z^۲ \\
&= \frac{-۴}{\pi z^۲}\left(۱+\frac{۴}{\pi}z+\frac{۱۶}{\pi^۲}z^۲+\cdots\right)\left(z^۲-\frac{z^۶}{۳!}+\frac{z^{۱۰}}{۵!}\cdots\right) \\
&= \frac{-۴}{\pi}\left(۱+\frac{۴}{\pi}z+\frac{۱۶z^۲}{\pi^۲}+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

که از آن مقدار مانده برابر صفر می‌شود.

اگر قرار دهیم $z = \frac{۱}{z}$ می‌گیریم

$$f(z) = \frac{۴z^۳\sin\frac{۱}{z^۲}}{۴-\pi z}$$

که در $z = ۰$ تحلیلی است یعنی $z = ۰$ یا بعبارتی دیگر $z = \infty$ یک نقطه تکین تابع داده شده نمی‌باشد.

۴ـ مانده‌های تابع $f(z) = \dfrac{z^۳}{(z-۱)(z-۲)(z-۳)}$ را در نقاط $z = ۱, ۲, ۳$ بیابید و نشان دهید مانده این تابع در $z = \infty$ برابر صفر می‌شود.

حل: به ترتیب برای $z=۱$ و $z=۲$ و $z=۳$ داریم

$$\mathrm{Res}_{z=۱} f(z) = \lim_{z\to ۱} \frac{(z-۱)z^۳}{(z-۱)(z-۲)(z-۳)} = \frac{۱}{۲}$$

$$\mathrm{Res}_{z=۲} f(z) = \lim_{z\to ۲} \frac{(z-۲)z^۳}{(z-۱)(z-۲)(z-۳)} = -۸$$

$$\mathrm{Res}_{z=۳} f(z) = \lim_{z\to ۳} \frac{(z-۳)z^۳}{(z-۱)(z-۲)(z-۲)} = \frac{۲۷}{۲}$$

برای $z=\infty$ قرار می‌دهیم $z=\frac{۱}{z}$ و در تابع داده شده جاگذاری می‌کنیم. خواهیم داشت

$$f(z) = \frac{\frac{۱}{z^۳}}{\left(\frac{۱}{z}-۱\right)\left(\frac{۱}{z}-۲\right)\left(\frac{۱}{z}-۳\right)} = \frac{۱}{(۱-z)(۱-۲z)(۱-۳z)}$$

و همانطوریکه مشاهده می‌شود مقدار مانده در $z=۰$ (یا بعبارتی در $z=\infty$) برابر صفر می‌شود

۵ـ درستی یادداشتهای (i) و (ii) در ۵ـ۳ را تحقیق نمایید

یادداشت (i) داریم

$$\mathrm{Res}_{z=z_۰} = \lim_{z\to z_۰} (z-z_۰)\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{۰}{۰}$$

از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\mathrm{Res}_{z=z_۰} = \lim_{z\to z_۰} \frac{(z-z_۰)P(z)}{Q(z)} = \lim_{z\to z_۰} \frac{P(z)+(z-z_۰)P'(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_۰)}{Q'(z_۰)}$$

یادداشت (ii): چون $f(z)$ یک قطب از مرتبه دو در $z=z_۰$ دارد، در نتیجه

$$\mathrm{Res}_{z=z_۰} f(z) = \lim_{z\to z_۰} \left((z-z_۰)^۲\frac{P(z)}{Q(z)}\right)'$$

اما از آنجائیکه $Q(z_۰)=Q'(z_۰)=۰$ پس می‌توان نوشت

$$Q(z) = (z-z_۰)^۲ R(z)$$

از اینرو

$$\mathrm{Res}_{z=z_۰} f(z) = \lim_{z\to z_۰} \left(\frac{(z-z_۰)^۲P(z)}{(z-z_۰)^۲R(z)}\right)' = \lim_{z\to z_۰} \left(\frac{P(z)}{R(z)}\right)'$$
$$= \lim_{z\to z_۰} \frac{P'(z)R(z)-P(z)R'(z)}{R^۲(z)}$$

برای محاسبه $\lim_{z\to z_۰} R(z)$ و $\lim_{z\to z_۰} R'(z)$، می‌نویسیم

$$R(z) = \frac{Q(z)}{(z-z_۰)^۲}$$

که از آن

$$\lim_{z\to z_\circ} R(z) = \lim_{z\to z_\circ} \frac{Q'(z)}{۲(z-z_\circ)} = \lim_{z\to z_\circ} \frac{Q''(z)}{۲} = \frac{Q''(z_\circ)}{۲}$$

از طرفی

$$R'(z) = \frac{Q'(z)(z-z_\circ) - ۲Q(z)}{(z-z_\circ)^۳}$$

که از آن

$$\lim_{z\to z_\circ} R'(z) = \frac{\circ}{\circ}$$

از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\lim_{z\to z_\circ} R'(z) = \lim \frac{Q''(z)(z-z_\circ) - Q'(z)}{۳(z-z_\circ)^۲}$$

مجدداً قاعده هوپیتال را بکار می‌بریم، می‌گیریم

$$\lim_{z\to z_\circ} R'(z) = \lim_{z\to z_\circ} \frac{Q'''(z)(z-z_\circ)}{۶(z-z_\circ)} = \frac{Q'''(z_\circ)}{۶}$$

با جاگذاری $\lim_{z\to z_\circ} R(z)$ و $\lim_{z\to z_\circ} R'(z)$ نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

۶ـ درستی یادداشت (iii) در ۵ـ۳ را ثابت نمایید و سپس با استفاده از آن نشان دهید که $\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz = ۱۶\pi i$ که در آن منحنی c دایره ۴ $= |z|$ است و $f(z) = (z^۲+۱)(z^۲+۲z+۲)^۳$.

حل: فرض کنید $f(z)$ در $z = z_\circ$ یک صفر از مرتبه m داشته باشد یعنی

$$f(z) = (z-z_\circ)^m g(z)$$

طوریکه $g(z) \neq \circ$. در این صورت $f'(z) = m(z-z_\circ)g(z) + (z-z_\circ)^m g'(z)$. بنابراین

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-z_\circ)^{m-۱}g(z) + (z-z_\circ)^m g'(z)}{(z-z_\circ)^m g(z)} = \frac{m}{(z-z_\circ)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

حال از آنجائیکه $g(z_\circ) \neq \circ$ پس $\frac{g'(z)}{g(z)}$ در این نقطه تحلیلی است و $\frac{f'(z)}{f(z)}$ دارای قطبی ساده با مانده m خواهد بود. اگر تعداد صفرها بیش از یک صفر باشد بنابراین مجموع مانده‌ها در تمام صفرهای f می‌تواند عددی صحیح مانند N باشد.

حال فرض کنید $z_\circ$ یک قطبی از مرتبه مثلاً m از تابع f باشد در اینصورت با انتخاب $f(z) = (z-z_\circ)^m g(z)$ می‌توان $g(z)$ را طوری انتخاب نمود که در این نقطه تحلیلی باشد و $g(z) \neq \circ$. می‌نویسیم

$$f(z) = (z-z_\circ)^{-m} g(z)$$

که اگر همانند قسمت قبلی انجام دهیم می‌گیریم

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-z_\circ} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

یعنی $\frac{g'(z)}{f(z)}$ در $z_\circ$ یک قطب ساده با مانده $\frac{-m}{P}$ دارد که اگر کل مجموع مانده‌ها را $-P$ اختیار کنیم در این صورت

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P.$$

در ادامه چون $f(z) = (z^۲+۱)(z^۲+۲z+۲)^۳$ در نقاط $z = \pm i$ صفرهای ساده و در نقاط $z = -۱ \pm i$ صفرهای سه گانه دارد پس $N = ۲ + ۶ = ۸$ و از طرفی $f(z)$ دارای قطبی نیست از اینرو

$$\frac{۱}{۲\pi i}.\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz = ۸ - ۰ \to \int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz = ۱۶\pi i.$$

۷ـ با استفاده از شاخه‌های اصلی برای $\ln z$ و $z^{\frac{۱}{۲}}$، قطبهای تابع $f(z) = \dfrac{۱}{(z^{\frac{۱}{۲}}-۱)\ln z}$ را یافته و مرتبه آنها را مشخص کنید

حل: با فرض $f(z) = \frac{۱}{g(z)}$ که $g(z) = (z^{\frac{۱}{۲}}-۱)\ln z$ در این صورت نقاط تکین تابع f همان صفرهای تابع g خواهند بود. از طرفی چون شاخه اصلی مورد نظر است در نتیجه قسمت $(z^{\frac{۱}{۲}}-۱)$ که یک صفر ساده در $z = ۱$ دارد و $\ln z$ هم یک صفر ساده در همین نقطه دارد پس $z = ۱$ یک قطب از مرتبه دو برای تابع f خواهد بود.

۸ـ با نوشتن سری لوران توابع زیر حول $z = ۰$، درستی جواب انتگرالهای زیر را با این فرض که C دایره $|z| = ۱$ باشد ثابت نمائید

$$\text{(i)}\ \oint_c \cot z dz = ۲\pi i \qquad \text{(ii)}\ \oint_c \frac{\sin z + \sinh z}{z^۶}dz = \frac{\pi i}{۳۰}$$

$$\text{(iii)}\ \oint_c \frac{z^۲ dz}{\cos z \sin^۳ z} = ۲\pi i \qquad \text{(iv)}\ \oint_c z e^{\frac{۱}{z}}dz = \pi i$$

حل:

(i) با استفاده از نوشتن سری تایلور برای تابع $f(z) = \cot z$ داریم

$$\cot z = \frac{۱}{z} - \frac{۱}{۳}z - \frac{۲}{۱۵}z^۳ + \cdots.$$

که نشان می‌دهد مانده برابر یک است در نتیجه

$$\oint_c \cot z dz = ۲\pi i(۱) = ۲\pi i.$$

(ii) مجدداً از بسط تیلور برای $\sin z$ و $\sinh z$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$
$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

در نتیجه

$$\frac{\sin z + \sinh z}{z^6} = \frac{2z + 2\frac{z^5}{5!} + 2\frac{z^9}{9!}}{z^6} = \frac{2}{z^5} + \frac{1}{60\, z} + \frac{2z^3}{9!} + \cdots$$

که از آن مانده برابر $\frac{1}{60}$ است. پس مقدار انتگرال عبارت است از

$$2\pi i\left(\frac{1}{60}\right) = \frac{\pi i}{30}.$$

(iii) می‌نویسیم

$$\frac{z^2}{\cos z \sin^3 z} = z^2(\cos z)^{-1}(\sin z)^{-3}$$
$$= z^2\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!}\cdots\right)^{-1}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\cdots\right)^{-3}$$
$$= z^2\left[1 - \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)\right]^{-1} z^{-3}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\cdots\right)^{-3}$$
$$= \frac{1}{z}\left[1 - \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)\right]^{-1}\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!}\cdots\right)\right]^{-3}$$
$$= \frac{1}{z}\left[1 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots\right]$$
$$= \left[1 + 3\left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!}\cdots\right) + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{z} + z + \cdots$$

در نتیجه مانده برابر یک می‌شود که از این نتیجه مقدار انتگرال $2\pi i$ خواهد شد.

(iv) بسط تیلور تابع $e^{\frac{1}{z}}$ را می‌نویسیم داریم

$$ze^{\frac{1}{z}} = z\left(1 + \frac{\frac{1}{z}}{1!} + \frac{\frac{1}{z^2}}{2!} + \frac{\frac{1}{z^3}}{3!} + \cdots\right)$$
$$= z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \cdots$$

یعنی مانده برابر $\frac{1}{2}$ است که از اینرو مقدار انتگرال $2\pi i\left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$ می‌شود

۹ـ انتگرالهای داده شده زیر را بدست آورید.

$$\text{(i)}\ \oint_c \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{1-z}dz,\ c:|z|=2,\ \text{(ii)}\ \oint_c \frac{e^{\frac{1}{z^2}}dz}{z^2+1},\ |c|:|z-i|=\frac{3}{2}.$$

حل: (i) تابع $f(z)=\dfrac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{1-z}$ دارای دو نقطه تکین است $z=0$ و $z=1$ که نقطه $z=0$ تکین اساسی و $z=1$ یک قطب ساده می‌باشد.

برای نقطه $z=0$ از بسط تیلور استفاده می‌کنیم. داریم

$$\sinh\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{z}}{1!}+\frac{\frac{1}{z^3}}{3!}+\frac{\frac{1}{z^5}}{5!}+\cdots$$
$$\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}=1+z+z^2+\cdots$$

بنابراین

$$\frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{1-z}=\left(\frac{1}{1!z}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}\cdots\right)(1+z+z^2+\cdots)$$
$$=\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\right)\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots\right).$$

پس مانده $f(z)$ برابر می‌شود با $\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots$ که همان $\sinh 1$ است.

مانده در $z=1$ برابر است با $\displaystyle\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{1-z}=-\sinh 1$

در نتیجه مقدار انتگرال برابر می‌شود با $2\pi i(\sinh 1-\sinh 1)=0$.

(ii) تابع $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ دارای سه نقطه تکین $\pm i$ و $z=0$ است تنها $z=0,i$ در آن واقع‌اند. برای $z=0$ مقدار مانده را با بسط تیلور بدست می‌آوریم

$$\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}=\left(1+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\cdots\right)(1-z^2+z^4\cdots)$$

و چون جمله $\frac{1}{z}$ نداریم پس مقدار مانده در این حالت برابر صفر می‌شود. برای $z=i$ داریم

$$\text{Res}_{z=i}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(e^{\frac{1}{z^2}})}{z^2+1}=\frac{e^{-1}}{2i}=\frac{1}{2ei}$$

پس مقدار انتگرال برابر می‌شود با $\frac{\pi}{e}$.

۱۰ـ با استفاده از قضیه مانده‌ها درستی انتگرالهای زیر را تحقیق کنید

$$\text{(i)}\quad \oint_c \tan z dz = -۴\pi i\ ,\ c:|z| = ۳$$

$$\text{(ii)}\quad \oint_c \frac{\sinh z}{z \sin z} dz = ۲\pi i\ ,\ c:|z| = ۱$$

$$\text{(iii)}\quad \oint_c \frac{(z^۲+۲)^۳}{z(z-۲)} dz = ۲۱۶\pi i\ ,\ c:|z-۲| = ۱$$

$$\text{(iv)}\quad \oint_c \frac{e^z dz}{z^۳-۱} = \frac{۲\pi e i}{۳}\ ,\ c: x^۲+y^۲ = ۲x.$$

حل: (i) می‌نویسیم

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

که صفرهای $\cos z$ عبارتند از $\pm\frac{\pi}{۲}$، $\pm\frac{۳\pi}{۲}$، $\pm\frac{۵\pi}{۲}$، ... که تنها $\pm\frac{\pi}{۲}$ در دایره c قرار دارند بنابراین

$$\oint_c \tan z dz = ۲\pi i \left(\text{Res}\left(\frac{\pi}{۲}\right) + \text{Res}\left(-\frac{\pi}{۲}\right)\right)$$

امّا

$$\text{Res}\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{۲}} \frac{z-\frac{\pi}{۲}}{\cot z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{-(۱+\cot^۲ z)} = -۱$$

بطریقی مشابه می‌توان نشان داد که $\text{Res}\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = -۱$ در نتیجه

$$\oint_c \tan z dz = ۲\pi i(-۱-۱) = -۴\pi i$$

(ii) مخرج در $z = ۰$ صفر می‌شود و چون $z \sin z$ در مخرج واقع است پس صفر مخرج از مرتبه دو است و از آنجائیکه صورت هم در $z = ۰$ صفر می‌شود پس $f(z)$ تنها یک قطب ساده خواهد داشت. داریم

$$\text{Res}_{z=۰} f(z) = \lim_{z\to ۰} \frac{(z-۰)\sinh z}{z\sin z} = \lim_{z\to ۰}\frac{\sinh z}{\sin z}$$

$$= \lim_{z\to ۰} \frac{\frac{\sinh z}{z}}{\frac{\sin z}{z}} = \frac{\lim_{z\to ۰}\frac{\sinh z}{z}}{\lim_{z\to ۰}\frac{\sin z}{z}} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

پس

$$\oint_c \frac{\sinh z}{\sin z} dz = ۲\pi i(۱) = ۲\pi i$$

(iii) مخرج در $z = ۰$ و $z = ۲$ صفر می‌شود که تنها $z = ۲$ درون دایره c واقع است پس

$$\text{Res}_{z=۲} f(z) = \lim_{z\to ۲} \frac{(z-۲)(z^۲+۲)^۳}{z(z-۲)} = \lim_{z\to ۲}\frac{(z^۲+۲)^۳}{z} = ۱۰۸$$

در نتیجه

$$\oint_c \frac{(z^۲+۳)^۳}{z(z-۲)}dz = ۲\pi i(۱۰۸) = ۲۱۶\pi i$$

(iv) مخرج در $z = ۱$ و $z = \dfrac{-۱ \pm \sqrt{۳}i}{۲}$ صفر می‌شود زیرا

$$z^۳ - ۱ = (z-۱)(z^۲+z+۱) \to z = ۱, z = \frac{-۱ \pm i\sqrt{۳}}{۲}$$

که تنها $z = ۱$ درون دایره داده شده است. توجه داشته باشید که

$$x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰ \to (x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$$

یعنی دایره‌ای بشعاع ۱ و به مرکز $(۱,۰)$ پس $z = ۱$ درون این دایره واقع می‌گردد. داریم

$$\mathrm{Res}_{z=۱} f(z) = \lim_{z\to ۱} \frac{(z-۱)e^z}{z^۳-۱} = \lim_{z\to ۱}\frac{e^z}{z^۲+z+۱} = \frac{e}{۳}$$

در نتیجه

$$\oint_c \frac{e^z}{z^۳-۱}dz = ۲\pi i\left(\frac{e}{۳}\right) = \frac{۲}{۳}\pi e i$$

۱۱ـ نشان دهید

$$\text{(i)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{۱+\sin^۲\theta} = \pi\sqrt{۲}\ , \quad \text{(ii)} \int_۰^{\pi} \frac{d\theta}{(۵+۴\cos\theta)^۲} = \frac{۵\pi}{۲۷}$$

$$\text{(ii)} \int_۰^{۲\pi} \frac{\sin^۲\theta d\theta}{۵-۴} = \frac{\pi}{۴}\ , \quad \text{(iv)} \int_۰^{۲\pi} \frac{d\theta}{۳+\cos\theta+۲\sin\theta} = \pi.$$

حل: (i) چون $\sin\theta = \dfrac{z-z^{-۱}}{۲i} = \dfrac{z^۲-۱}{۲iz}$ در نتیجه

$$۱+\sin^۲\theta = ۱ + \frac{z^۴-۲z^۲+۱}{-۴z^۲} = \frac{z^۴-۶z^۲+۱}{-۴z^۲}$$

از اینرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{۱+\sin^۲\theta} = -\frac{۴}{i}\oint_c \frac{zdz}{z^۴-۶z^۲+۱}$$

صفرهای مخرج عبارتند از $z = \pm\sqrt{۳\pm ۲\sqrt{۲}}$ که تنها $z_۱ = \sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$ و $z_۲ = -\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$ داخل دایره $|z| = ۱$ قرار دارند. داریم

$$\mathrm{Res}_{z=z_۱} f(z) = \lim_{z\to z_۱}\frac{(z-z_۱)z}{z^۴-۶z^۲+۱} = \lim_{z\to z_۱}\frac{۱}{۴z^۲-۱۲} = \frac{۱}{۴(z_۱^۲-۳)} = -\frac{۱}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\mathrm{Res}_{z=z_۲} f(z) = \lim_{z\to z_۲}\frac{(z-z_۲)}{z^۴-۶z^۲+۱} = \lim_{z\to z_۲}\frac{۱}{۴z^۲-۱۲} = \frac{۱}{۴(z_۲^۲-۳)} = \frac{-۱}{۸\sqrt{۲}}$$

بنابراین می‌گیریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{-4}{i}(2\pi i)\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\right) = \pi\sqrt{2}$$

(ii) داریم $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$ و از طرفی تابع زیر انتگرال زوج است از اینرو

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\oint_c \frac{\dfrac{dz}{iz}}{\left[5+\dfrac{2(z^2+1)}{z}\right]^2} = \frac{1}{2i}\oint \frac{z\,dz}{(2z^2+5z+2)^2}$$

صفرهای مخرج با استفاده از $(2z^2+5z+2)^2 = (z+2)^2(2z+1)^2$ بدست می‌آیند که دارای قطبی از مرتبه دواند امّا تنها $z=-\dfrac{1}{2}$ داخل دایره واحد واقع است. بنابراین داریم

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z) = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{4(z+2)^2}\right)' = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \frac{2-z}{4(z+2)} = \frac{5}{27}$$

به این ترتیب

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2} = \frac{1}{2i}(2\pi i)\left(\frac{5}{27}\right) = \frac{5\pi}{27}$$

(iii) با توجه به $\sin\theta$ و $\cos\theta$ داده شده برحسب z در (i) و (ii) داریم

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{5-4\cos\theta} = \oint_c \frac{\dfrac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\cdot\dfrac{dz}{iz}}{5-2\dfrac{(z^2+1)}{z}} = \frac{1}{4i}\oint_c \frac{(z^4-2z+1)dz}{z^2(2z^2-5z+2)}$$

مخرج در $z=0$ دارای قطب دوگانه است و از طرفی $(2z^2-5z+2)(z-2)(2z-1)$ که تنها صفر و $z=\dfrac{1}{2}$ داخل دایره واحد قرار دارند در نتیجه مانده‌ها باید در $z=0, \dfrac{1}{2}$ محاسبه شوند. داریم

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^4-2z^2+1}{2z^2-5z+2}\right)' = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{(z^4-2z^2+1)(2z-1)}{2z^2(2z-1)(z-2)} = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{z^4-2z+1}{2z^2(z-2)} = \frac{-3}{4}$$

از اینرو

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{5-4\cos\theta} = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(iv) همانند قسمت (iii) عمل می‌کنیم داریم

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta} = \oint_c \frac{\frac{dz}{iz}}{3+\frac{z^2+1}{2z}+\frac{z^2-1}{iz}} = 2\oint_c \frac{dz}{(2+i)z^2+6iz+i-2}$$

تابع زیرکسر را تجزیه می‌کنیم تا صفرهای آن معلوم شوند. داریم

$$(2+i)z^2+6iz+i-2 = (2+i)\left(z+\frac{i}{2+i}\right)\left(z+\frac{5i}{2+i}\right)$$

که تنها $z=\frac{-i}{2+i}$ یعنی $z=-\frac{1+2i}{5}$ داخل دایره واحد قرار دارد پس

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{1+2i}{5}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{1+2i}{5}} \frac{\left(z+\frac{1+2i}{5}\right)}{\left(z+\frac{1+2i}{5}\right)(2+i)\left(z+\frac{5i}{2+i}\right)} = \frac{1}{4i}$$

در نتیجه

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta} = 2(2\pi i)\left(\frac{1}{4i}\right) = \pi.$$

۱۲ـ ثابت کنید

$$\text{(i)} \int_0^{\pi} \frac{a\,d\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \int_0^{\pi} \frac{a\,d\theta}{a^2+\cos^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}, a>0$$

$$\text{(ii)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, a>b>0.$$

(i) وجود a در صورت کسر کمک می‌کند تا بنویسیم

$$\frac{a}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-\sin\theta}+\frac{1}{a-\sin\theta}\right)$$

همچنین تابع زیر انتگرال تابعی زوج است در نتیجه

$$\int_0^{\pi} \frac{a\,d\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\,d\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a+i\sin\theta} + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a-i\sin\theta}$$

حال قرار می‌دهیم $\sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz}$، تا داشته باشیم

$$= \frac{1}{2i}\oint_c \frac{dz}{z^2-2az-1} - \frac{1}{2i}\oint_c \frac{dz}{z^2+2az-1}$$

صفرهای $z^2-2az-1$ عبارتند از $a\pm\sqrt{a^2+1}$ و صفرهای $z^2+2az-1$ عبارتند از $-a\pm\sqrt{a^2+1}$ که به ترتیب $a-\sqrt{a^2+1}$ و $-a-\sqrt{a^2+1}$ در دایره واحد قرار دارند در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{a\,d\theta}{a^2+\sin^2\theta}&=2\pi i\left(\frac{1}{2i}\operatorname{Res}_{z=z_1}f(z)-\frac{1}{2i}\operatorname{Res}_{z=z_2}f(z)\right)\\&=2\pi i\left(\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}\right)-\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-2\sqrt{a^2+1}}\right)\right)\\&=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

برای حالتی که $\cos^2\theta$ بجای $\sin^2\theta$ باشد نتیجه عمل یکی است. می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a^2+\cos^2\theta}&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a\,d\theta}{a^2+\cos^2\theta}=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{a-i\cos\theta}+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{a+i\cos\theta}\\&=-\frac{1}{2i}\oint_c\frac{dz}{iz^2-2az+i}+\frac{1}{2i}\oint_c\frac{dz}{iz^2+2az+i}\end{aligned}$$

چهار صفر از دو مخرج حاصل می‌شود که عبارتند از $\frac{a\pm\sqrt{a^2+1}}{i},\ \frac{-a\pm\sqrt{a^2+1}}{i}$ که $\frac{a-\sqrt{a^2+1}}{i}$ و $\frac{-a+\sqrt{a^2+1}}{i}$ در داخل دایره واحد قرار دارند. داریم

$$\operatorname{Res}_{z=z_1}f(z)=\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}$$

در نتیجه

$$\int_0^{\pi}\frac{a\,d\theta}{a^2+\cos^2\theta}=2\pi i\left(+\frac{1}{4i\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{4i\sqrt{a^2+1}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}$$

(ii) داریم

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}=\oint_c\frac{\frac{dz}{iz}}{a+\frac{b(z^2-1)}{2i-z}}$$

$$=\oint_c\frac{2dz}{bz^2+2aiz-b}$$

مخرج کسر دارای صفرهای $\frac{-ia\pm\sqrt{-a^2+b^2}}{b}$ است که تنها $\frac{-ia+\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ در داخل دایره واحد قرار دارد. برای راحتی کار می‌نویسیم $\sqrt{b^2-a^2}=i\sqrt{a^2-b^2}$ پس صفر مورد نظر $\frac{i}{b}\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)$ است. بنابراین

$$\operatorname{Res}_{z=z_1}f(z)=\frac{1}{i\sqrt{a^2-b^2}}$$

پس

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}=2\pi i\left(\frac{1}{i\sqrt{a^2-b^2}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

برای قسمت دوم انتگرال خواسته شده همانند قسمت اول انجام می‌دهیم. داریم

$$\int_{\circ}^{\mathsf{2}\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\oint_{c}\frac{-\mathsf{2}idz}{bz^{\mathsf{2}}+\mathsf{2}az+b}$$

مخرج دارای صفرهای $\frac{-a\pm\sqrt{a^{\mathsf{2}}-b^{\mathsf{2}}}}{b}$ است که تنها $\frac{-a+\sqrt{a^{\mathsf{2}}-b^{\mathsf{2}}}}{b}$ در دایره واحد قرار دارد براحتی می‌توان همانند قسمت اول نشان داد که

$$\int_{\circ}^{\mathsf{2}\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\mathsf{2}\pi i\mathrm{Res}f(z_{\mathsf{1}})=\frac{\mathsf{2}\pi}{\sqrt{a^{\mathsf{2}}-b^{\mathsf{2}}}}.$$

۱۳ـ با نوشتن انتگرالهای داده شده زیر برحسب z و مسیر انتگرال گیری c که c دایره $|z|=\mathsf{1}$ می‌باشد درستی تساویهای داده شده زیر را بررسی کنید.

$$\text{i)}\ \int_{\circ}^{\mathsf{2}\pi}e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta=\frac{\mathsf{2}\pi}{n!}\quad,\text{ii)}\ \int_{\circ}^{\mathsf{2}\pi}e^{\cos\theta}\sin(n\theta-\sin\theta)d\theta=\circ$$

حل: می‌توانیم با استفاده از این نتیجه که

$$\oint_{c}\frac{e^{z}dz}{z^{n+\mathsf{1}}}=\frac{\mathsf{2}\pi i}{n!}$$

درستی تساویهای بالا را اثبات نمائیم، امّا چون خواسته شده است که انتگرالها را برحسب z بنویسیم پس به صورت زیر عمل می‌کنیم.

با ضرب انتگرال دومی در i و تفاضل آن از انتگرال اولی می‌گیریم

$$\begin{aligned}&\int_{\circ}^{\mathsf{2}\pi}e^{\cos\theta}(\cos(n\theta-\sin\theta)-i\sin(n\theta-\sin\theta))d\theta\\&=\int_{\circ}^{\mathsf{2}\pi}e^{\cos\theta}.e^{-i(n\theta-\sin\theta)}d\theta\\&=\int_{\circ}^{\mathsf{2}\pi}e^{\cos\theta}.e^{-in\theta}.e^{i\sin\theta}d\theta=\int_{\circ}^{\mathsf{2}\pi}e^{\cos\theta+i\sin\theta}.e^{-in\theta}d\theta\\&=\int_{\circ}^{\mathsf{2}\pi}e^{e^{i\theta}}.e^{-in\theta}d\theta\end{aligned}$$

از آنجائیکه $z=e^{i\theta}$ از اینرو حاصل انتگرال در ادامه چنین می‌شود

$$=\oint_{x}e^{z}z^{-n}\frac{dz}{iz}=\frac{\mathsf{1}}{i}\oint\frac{e^{z}dz}{z^{n+\mathsf{1}}}=\frac{\mathsf{2}\pi}{n!}$$

با مقایسه طرفین تساوی نتایج مورد نظر بدست می‌آیند

۱۴ـ نشان دهید

$$\text{(i)}\quad \int_{\circ}^{\infty}\frac{dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}=\frac{\pi}{۴}\quad,\quad \text{(iv)}\quad \int_{\circ}^{\infty}\frac{dx}{x^{۶}+۱}=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\text{(ii)}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^{۲}+۱)^{۳}}=\frac{۳\pi}{۸}\quad,\quad \text{(v)}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^{۴}+x^{۲}+۱}=\frac{\pi}{\sqrt{۳}}$$

$$\text{(iii)}\quad \int_{\circ}^{\infty}\frac{x^{۲}dx}{(x^{۲}+۱)}=\frac{\pi}{۲}\quad,\quad \text{(iv)}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^{۲}+۴x+۵)^{۲}}=\frac{\pi}{۲}.$$

حل: (i) داریم

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}=\frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}=\pi i(\text{مجموع مانده‌های } f(z))$$

از طرفی $Q(z)=(۱+z^{۲})^{۲}$ که صفر $z=i$ بالای محور x هاست با قطب دوگانه در نتیجه

$$\operatorname{Res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}\left(\frac{۱}{(z+i)^{۲}}\right)'=\frac{۱}{۴i}$$

به این ترتیب

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}=\pi i\left(\frac{۱}{۴i}\right)=\frac{\pi}{۴}$$

(ii) در این حالت $Q(z)=(z^{۲}+۱)^{۳}$ است که دارای صفر $z=\circ$ با قطب سه گانه است از اینرو

$$\operatorname{Res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}\left[\frac{۱}{(z+i)^{۳}}\right]''=\frac{۳}{۱۶i}$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^{۲}+۱)^{۳}}=۲\pi i\left(\frac{۳}{۱۶i}\right)=\frac{۳\pi}{۸}$$

(iii) در این حالت هم $Q(z)$ دارای صفر $z=i$ با قطب دوگانه است بنابراین

$$\operatorname{Res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}\left(\frac{z^{۲}}{(z+i)^{۲}}\right)'=\frac{۱}{۴i}$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^{۲}+۱)^{۳}}=۲\pi i\left(\frac{۱}{۴i}\right)=\frac{\pi}{۲}.$$

(iv) صفرهای مخرج را با استفاده از حل معادله $z^{۶}+۱=\circ$ بدست می‌آوریم. داریم

$$\begin{aligned} z^{۶}+۱=\circ\to z^{۶}=-۱=\cos\pi+i\sin\pi &=\cos(۲k+۱)\pi+i\sin(۲k+۱)\pi\\ &=e^{(۲k+۱)\pi i}\\ &\Rightarrow z=e^{(۲k+۱)\frac{\pi i}{۶}}\ ,\ k=\circ,۱,۲,۳,۴,۵ \end{aligned}$$

که تنها برای $k = ۰, ۱, ۲$ صفرها بالای محور x ها قرار دارند. در نتیجه

$$z_۱ = e^{\frac{\pi i}{۶}},\ z_۲ = e^{\frac{\pi}{۲}i},\ z_۳ = e^{\frac{۵\pi i}{۶}}$$

از طرفی

$$\mathrm{Res}_{z=z_i} f(z) = \lim_{z\to z_i} \frac{۱}{۶z^۵}$$

که به ترتیب برای $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ می‌گیریم

$$\mathrm{Res} f(z_۱) = -\frac{\sqrt{۳}+i}{۱۲}, \mathrm{Res} f(z_۲) = \frac{-i}{۶}, \mathrm{Res} f(z_۳) = \frac{\sqrt{۳}-i}{۱۲}$$

از اینرو

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۲ dx}{(۱+x^۲)^۲} = ۲\pi i \left(-\frac{\sqrt{۳}+i}{۱۲} - \frac{i}{۶} + \frac{\sqrt{۳}-i}{۱۲}\right) = \frac{۲\pi}{۳}.$$

(v) صفرهای $Q(z) = z^۴ + z^۲ + ۱$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم. داریم

$$(z^۲ - ۱)(z^۴ + z^۲ + ۱) = z^۶ - ۱$$

که از آن

$$z^۶ = ۱ = \cos ۲k\pi + i \sin ۲k\pi = e^{۲k\pi i} \to z = e^{\frac{k\pi i}{۳}}, k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

بدیهی است که $k \neq ۰$، ۳ چون $z^۲ - ۱ \neq ۰$. از چهار جواب باقی مانده تنها وقتی $k = ۱, ۲$ است جوابها بالای محور x هااند. یعنی $z_۱ = e^{\frac{\pi i}{۳}} = \frac{۱+i\sqrt{۳}}{۲}$ و $z_۲ = e^{\frac{۲\pi i}{۳}} = \frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲}$ از طرفی

$$\mathrm{Res}_{z=z_i} f(z) = \lim_{z\to z_i} \frac{۱}{۴z^۳ + ۲z}$$

که از آن به ترتیب

$$\mathrm{Res} f(z_۱) = -\frac{۳+i\sqrt{۳}}{۱۲}, \mathrm{Res} f(z_۲) = \frac{۳-i\sqrt{۳}}{۱۲}$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^۴ + x^۲ + ۱} = ۲\pi i \left(-\frac{۳+i\sqrt{۳}}{۱۲} + \frac{۳-i\sqrt{۳}}{۱۲}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi = \frac{\pi}{\sqrt{۳}}.$$

(vi) براحتی می‌توان نشان داد که صفرهای $z^۲ + ۴z + ۵$ عبارتند از $-۲ \pm i$ که $-۲ + i$ در بالای محور x ها قرار دارد با قطب دوگانه. پس

$$\mathrm{Res}_{z=-۲+i} = \lim_{z\to -۲+i} \left(\frac{۱}{z+۲+i}\right)' = \frac{۱}{۴i}$$

از اینرو

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^۲+۴x+۵)^۲} = ۲\pi i \left(\frac{۱}{۴i}\right) = \frac{\pi}{۲}.$$

۱۵ـ با تغییر متغیر $x = e^\theta$ مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\cosh\theta}$ را بدست آورید.

حل: با فرض $x = e^\theta$ پس $dx = xd\theta$ یعنی $d\theta = \frac{dx}{x}$. می‌نویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\cosh\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۲d\theta}{e^\theta + e^{-\theta}} = \int_{۰}^{\infty} \frac{\frac{۲dx}{x}}{x + \frac{۱}{x}} = ۲\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^۲ + ۱}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^۲ + ۱} = ۲\pi i(\text{Res}(f(i))) = ۲\pi i \times \frac{۱}{۲i} = \pi$$

زیرا $Q(z)$ دو صفر $\pm i$ دارد که تنها i در بالای محور x ها قرار دارد.

۱۶ـ توضیح دهید که چرا نمی‌توان همانند تمرین ۱۴، حاصل $\int_{۰}^{\infty} \frac{xdx}{x^۴ + ۱}$ را بدست آورد. با روش دیگر حاصل این انتگرال که برابر با $\frac{\pi}{۴}$ است را بدست آورید.

حل: در مثال ۱۴، یا مثالهایی نظیر آن تابع زیر انتگرال زوج بود که توانستیم فاصله $(۰, \infty)$ را به $(-\infty, \infty)$ تعمیم دهیم اما چون در اینجا تابع زیر انتگرال فرد است چنین تعمیمی امکان پذیر نیست. انتگرال را با روش معمول در حساب دیفرانسیل و انتگرال حل می‌کنیم.

گیریم $x^۲ = \theta$ در نتیجه $xdx = \frac{d\theta}{۲}$ پس

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{xdx}{x^۴ + ۱} =$$
$$= \lim_{A\to\infty} \int_{۰}^{A} \frac{d\theta}{۲(۱ + \theta^۲)} = \lim_{A\to\infty} \frac{۱}{۲} \tan^{-۱}\theta|_{۰}^{A} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۲} - ۰\right) = \frac{\pi}{۴}.$$

۱۷ـ درستی انتگرالهای زیر را تحقیق نمائید.

$$\text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xdx}{x^۲ + ۱} = ۰ \quad , \quad \text{(ii)} \quad \int_{۰}^{\infty} \frac{\sin^۲ xdx}{x^۲ + ۱} = \frac{\pi}{۲}(۱ - e^۲)$$
$$\text{(iii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xdx}{(x^۲ + ۱)} = \frac{۷\pi}{۸e} \quad , \quad \text{(iv)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin \pi xdx}{x^۲ + ۲x + ۵} = -\pi e^{-۲\pi}$$

حل: (i) داریم $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ از طرفی

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}dz}{z^۲ + ۱} = ۲\pi i\text{Res}f(i) = \frac{۲\pi ie^{-۱}}{۲i} = \pi e^{-۱}$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}dz}{z^۲ + ۱} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos zdz}{z^۲ + ۱} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin zdz}{z^۲ + ۱} = \pi e^{-۱} + ۰$$

که با مقایسه طرفین تساوی درستی تساوی داده شده اثبات می‌شود.

(ii) داریم $\sin^۲ x = \dfrac{۱ - \cos ۲x}{۲}$ بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^۲ x dx}{x^۲ + ۱} = \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^۲ + ۱} - \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ۲x}{x^۲ + ۱}$$

حاصل انتگرال اولی برابر $\frac{\pi}{۲}$ می‌شود برای انتگرال دومی داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{۲iz}}{z^۲ + ۱} dz = ۲\pi i \text{Res} f(i) = \frac{۲\pi i(e^{-۲})}{۲i} = \pi e^{-۲}$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^۲ x}{x^۲ + ۱} dx = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲}e^{-۲} = \frac{\pi}{۲}(۱ - e^{-۲})$$

(iii) داریم

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz} dz}{(z^۲ + ۱)^۳} &= ۲\pi i \text{Res} f(i)\\ &= ۲\pi i \lim_{z\to i} \left[\frac{e^{iz}}{۲(z^۲ + ۱)}\right]'' = \frac{۷}{۸}\pi e^{-۱}\end{aligned}$$

زیرا $Q(z)$ در $z = i$ قطبی از مرتبه ۳ دارد در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^۲ + ۱)^۳} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^۲ + ۱)^۳} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^۲ + ۱)^۳} = \frac{۷}{۸}\pi e^{-۱}$$

که از آن درستی انتگرال بالا ثابت می‌شود.

(iv) داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\pi x} dx}{x^۲ + ۲x + ۵} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x dx}{x^۲ + ۲x + ۵} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin \pi x dx}{x^۲ + ۲x + ۵}$$

امّا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{i\pi z} dz}{z^۲ + ۲z + ۵} = ۲\pi i \text{Res} f(-۱ + ۲i)$$

زیرا صفرهای $z^۲ + ۲z + ۵$ عبارتند از $-۱ \pm ۲i$ که تنها $-۱ + ۲i$ بالای محور x هاست. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x dx}{x^۲ + ۲x + ۵} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin \pi x dx}{x^۲ + ۲x + ۵} &= ۲\pi i \text{Res} f(-۱ + ۲i)\\ &= \frac{\pi}{۲}e^{-۲\pi} - i\pi e^{-۲\pi}\end{aligned}$$

که از مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x dx}{x^۲ + ۲x + ۵} = \frac{\pi}{۲}e^{-۲\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x dx}{x^۲ + ۲x + ۵} = -\pi e^{-۲\pi}$$

۱۸ـ ثابت کنید

$$\text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax dx}{x} = \pi \quad , \quad \text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱ - \cos x}{x^۲} dx = \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{(iii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{a^۲ - x^۲} = \frac{\pi \sin a}{a} \quad , \quad \text{(iv)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x dx}{x(۱ - x^۲)} = \pi.$$

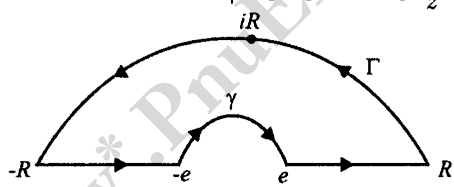
حل: (i) براحتی می‌توان نشان داد که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = ۲ \int_{۰}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

که $t = ax$ انتخاب شده است. حال نشان می‌دهیم

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{۲}.$$

برای این منظور انتگرال $\int_c \frac{e^{iz}}{z} dz$ را بررسی می‌کنیم که c در شکل زیر نشان داده شده است



تابع زیر انتگرال در $z = ۰$ نقطه تکین دارد چون خارج از c

$$\int_c \frac{e^{iz}}{z} dz = ۰$$

از طرفی

$$\int_c \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-e} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_e^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_c dz + \int_c \frac{e^{iz}}{z} dz$$

با جاگذاری $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ می‌گیریم

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = R \int_{۰}^{\pi} \frac{e^{R(i\cos\theta - \sin\theta)}}{R(\cos\theta + i\sin\theta)} (-\sin\theta + i\cos\theta) d\theta$$

که از آن

$$\left| \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \le \int_{۰}^{\pi} \left| \frac{e^{R(i\cos\theta - \sin\theta)}(-\sin\theta + i\cos\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} \right| d\theta$$
$$= \int_{۰}^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

با استفاده از لم جوردان می‌گیریم

$$\left|\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz\right| \leq \frac{\pi}{R}(1-e^{-R})$$

که بسمت صفر میل می‌کند وقتی $R \to \infty$.

همچنین مانده برای $\frac{e^{iz}}{z}$ در $z=0$ برابر یک است، از اینرو در همسایگی $z=0$ داریم

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$$

که $g(z)$ در $z=0$ تحلیلی است. پس، اگر ρ کوچک باشد می‌گیریم

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_\gamma g(z)dz$$

اما

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = -i\int_0^\pi d\theta = -\pi i$$

و از طرفی در همسایگی $z=0$ داریم $|g(z)dz| \leq M$ در نتیجه

$$\int_\gamma |g(z)dz| \leq M(\text{طول}\,\gamma) = M\pi\rho$$

که بسمت صفر میل می‌کند وقتی $\rho \to 0$. بنابراین

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz \to -\pi i.$$

به این ترتیب

$$\int_{-R}^{-e} \frac{e^{it}}{t}dt + \int_e^R \frac{e^{it}}{t} \to \pi i$$

وقتی که $\rho \to 0$ و $R \to \infty$.

با مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم

$$\int_{-R}^{-e} \frac{\sin t}{t}dt + \int_R^R \frac{\sin t}{t}dt \to \pi$$

و چون $\frac{\sin t}{t}$ تابعی زوج است پس

$$\int_e^R \frac{\sin t}{t}dt \to \frac{\pi}{2}$$

به عبارتی $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

(ii) با فرض $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2}$، در این صورت تابع f دارای قطب دوگانه رفع شدنی در $z=0$ است. از شکل قسمت (i) استفاده می‌کنیم. داریم

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{1}{2}Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz\right)$$

امّا

$$\int_c \frac{1-e^{iz}}{z^2}dz=\int_{-R}^{-e}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz+\int_e^R\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz+\int_\Gamma\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz+\int_\gamma\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz=0$$

زیرا تابع $f(z)=\dfrac{1-e^{iz}}{z^2}$ درون دو منحنی تحلیلی است.
همانند قسمت (i) می‌توان نشان داد که

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\leq\frac{\pi}{R}$$

که وقتی $R\to\infty$ حاصل انتگرال بسمت صفر می‌رود. همچنین روی γ داریم

$$\int_\gamma f(z)dz=-\pi$$

وقتی $\rho\to 0$. در نتیجه

$$\int_{-R}^{-e}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz+\int_e^R\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz-\pi=0$$
$$\Rightarrow\int_{-R}^{R}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz=\pi$$

پس

$$\int_0^\infty\frac{1-\cos 2x}{x^2}dx=\frac{1}{2}Re\left(\int_{-R}^{R}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz\right)=\frac{\pi}{2}$$

وقتی که $R\to\infty$.

(iii) صورت مسئله را با استفاده از تجزیه کسرها به صورت زیر دوباره نویسی می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos x dx}{x^2-a^2}=\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos x dx}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos x}{x-a}dx-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos x}{x+a}dx$$

در انتگرال اولی تعویض متغیر $z=x-a$ و در دومی $z=x+a$ را اعمال می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos x dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos z\cos a-\sin z\sin a}{z}dz$$
$$-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos z\cos a+\sin z\sin a}{z}dz$$

$$= \frac{\sin a}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz = \frac{\pi \sin a}{a}$$

زیرا از قسمت (i) داریم $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \pi$.

(iv) با تعویض متغیر $z = \pi x$ می‌گیریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin \pi x dx}{x(1-x^2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi^2 \sin z dz}{z(\pi^2 - z^2)}$$

برای تابع زیر انتگرال از تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin \pi x dx}{x(1-x^2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z dz}{\pi - z}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{\pi + z}dz dz$$
$$= \pi + \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{\pi - z}dz - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{\pi + z}dz\right)$$

امّا با تعویض $z = -t$ براحتی می‌توان نشان داد که دو انتگرال یکی‌اند یعنی

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{\pi - z}dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{\pi + z}dz$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin \pi x dx}{x(1-x^2)} = \pi$$

۱۹ـ (قضیه روشه): اگر توابع $f(z)$ و $g(z)$ در داخل و روی منحنی ساده بسته c تحلیلی و روی c، داشته باشیم $|f(z)| > |g(z)|$، در این صورت $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ دارای تعداد صفرهای یکسانی درون c هستند.

(i) با انتخاب $f(z) = z^4$ و $g(z) = z^3 + 1$، نشان دهید ریشه‌های معادله $z^4 + z^3 + 1 = 0$ داخل دایره $|z| = \frac{3}{2}$ قرار دارند.

(ii) با انتخاب $f(z) = z^3 + 1$ و $g(z) = z^4$ نشان دهید ریشه‌های معادله فوق خارج دایره $|z| = \frac{3}{4}$ واقعند.

حل: (i) کافی است نشان دهیم $|f(z)| > |g(z)|$. داریم

$$|f(z)| = |z^4| = |z|^4 \le \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$
$$|g(z)| = |z^3 + 1| \le |z^3| + 1 = |z|^3 + 1 \le \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1 = \frac{35}{8}$$

که بدیهی است $\frac{81}{16} > \frac{35}{8}$ یعنی $|f(z)| > |g(z)|$.

به این ترتیب از آنجائیکه ریشه‌های معادله $f(z) = 0$ داخل دایره $|z| = \frac{3}{2}$ قرار دارند پس ریشه‌های معادله $f(z) + g(z)$ هم باید داخل این دایره واقع باشند.

(ii) داریم

$$|f(z)| = |z^۳ + ۱| \le |z^۳| + ۱ = |z|^۳ + ۱ \le \left(\frac{۳}{۴}\right)^۳ + ۱ = \frac{۱۰۱}{۶۴}$$
$$|g(z)| = |z^۴| = |z|^۴ = \left(\frac{۳}{۴}\right)^۴ = \frac{۸۱}{۲۵۶}$$

یعنی $|g(z)| < |f(z)|$. حال از آنجائیکه ریشه‌های معادله $f(z) = ۰$ خارج دایره $|z| = \frac{۳}{۴}$ واقعند پس ریشه‌های معادله $f(z) + g(z)$ هم خارج این دایره قرار دارند.

اینکه ریشه‌های معادله $f(z) = ۰$ خارج دایره‌اند بدیهی است زیرا طول آنها یک است.

۲۰ـ با استفاده از قضیه روشه ثابت کنید دو ریشه معادله $e^z = ۳z^۲$ داخل دایره $|z| = ۱$ قرار دارند.

حل: با فرض $f(z) = ۳z^۲$ و $g(z) = -e^z$ داریم

$$|f(z)| = |۳z^۲| = ۳|z|^۲ < ۳$$
$$|g(z)| = |-e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x||e^{iy}| = |e^x| < e$$

یعنی $|g(z)| < |f(z)|$. از طرفی ریشه‌های معادله $f(z) = ۰$ داخل دایره $|z| = ۱$ واقعند پس ریشه‌های معادله $f(z) + g(z) = ۰$ هم در این دایره‌اند.

یادداشت: با استفاده از قضیه روشه نشان می‌دهیم معادله $\tan z = z$ ریشه‌های مختلط ندارد. زیرا اگر فرض کنیم حداقل یک ریشه مختلط در $z_۰$ دارد که در داخل دایره $|z - z_۰| < r$ واقع باشد. داریم

$$|f(z)|^۲ = |z|^۲$$
$$|g(z)|^۲ = |\tan z|^۲ = \frac{|\sin z|^۲}{|\cos z|^۲} = \frac{\sin^۲ x + \operatorname{sh}^۲ y}{\cos^۲ x + \operatorname{sh}^۲ y}$$
$$= \frac{۱ - \cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x + \operatorname{sh}^۲ y} = ۱ - \frac{\cos ۲x}{\cos^۲ x + \operatorname{sh}^۲ y}$$

به این ترتیب $|f(z) \ne g(z)|$. اگر $|g(z)| < |f(z)|$ در نظر گرفته شود باید تعداد جوابهای معادلات $f(z) = ۰$ و $f(z) + g(z) = ۰$ برابر باشند. اما بدیهی است که معادله $f(z) = ۰$ در دایره داده شده ریشه‌ای ندارد در صورتیکه معادله $f(z) + g(z) = ۰$ با فرض‌مان یک ریشه در این دایره دارد. (تناقض) پس معادله $f(z) + g(z) = ۰$ که همان معادله $z = \tan z$ است نمی‌تواند ریشه مختلط داشته باشد.

پاسخ آزمونهای چهار جوابی ۵

۱. دنباله $\left\{\frac{in - ۱}{n + i}\right\}_۰^\infty$ به کدامیک از نقاط زیر همگرا است

الف) ۱ ب) i ج) ۰ د) ∞

حل: داریم

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{in-۱}{n+i}\right) = i$$

پس پاسخ (ب) درست است

۲. سری مربوط به تابع $\ln(۱-z)$ همگراست اگر

الف) $|z| > ۱$ ب) $|z| = ۱$ ج) $|z| < ۱$ د) $|z| < \infty$

حل: (ج) درست است کافی است بسط لوران تابع $f(z) = \ln(۱-z)$ را بنویسیم

۳. دامنه همگرایی مربوط به تابع e^z عبارت است از

الف) $|z| \geq ۱$ ب) $|z| \leq ۱$ ج) $|z| \geq \frac{۱}{۲}$ د) $|z| < \infty$

حل: (د) درست است زیر $a_n = \sum \frac{z^n}{n!}$ که باید $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| < ۱$ یعنی $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z}{n+۱}\right| < ۱$ امّا برای هر $|z| < \infty$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+۱} = ۰ < ۱$$

۴. حاصل $\oint_c \frac{\cos z dz}{z^۳}$ که c مرز دایره $|z| = ۱$ است برابر است با

الف) $\frac{i}{۲}$ ب) $-\pi i$ ج) $۲\pi i$ د) $\frac{\pi}{۲}$

حل: داریم

$$\oint_c \frac{\cos z}{z^۳}dz = ۲\pi i \mathrm{Res}_{z=۰}\left(\frac{\cos z}{z^۳}\right)$$
$$= ۲\pi i \frac{۱}{۲i}(\cos z)''_{z=۰} = -\pi i$$

پس جواب (ب) درست است

۵. تابع $e^{\frac{۱}{z}}$ در $z = ۰$ دارای نقطه تکین

الف) ساده است ب) برداشتنی است ج) اساسی است د) دوگانه است

حل: جواب (ج) درست است به متن درس مراجعه شود

۶. انتگرال $\oint_c \frac{(z^۳+۱)dz}{z^۲(z^۲+۱)}$ با $c: |z| = ۲$، دارای

الف) یک قطب ساده است ب) یک قطب دوگانه است

ج) چهار قطب ساده است د) دو قطب ساده است

حل: در اینجا سه قطب در $z = \pm i$ و $z = ۰$ داریم که دو تا ساده و یکی ساده نیست پس جواب (د) درست است.

۷. انتگرال $\oint \frac{z^{۲}+۲}{z^{۲}-۴}dz$ با $c:|z|=۱$ دارای

الف) قطبی نیست

ب) یک قطب ساده است

ج) دو قطب ساده است

د) دو قطب دوگانه است

حل: تابع زیر انتگرال در $z=\pm ۲$ تعریف نمی‌شود امّا این دو نقطه خارج دایره واقع‌اند پس جواب (الف) درست است.

۸. مقدار انتگرال کوشی از انتگرال $\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}$ برابر است با

الف) $\frac{\pi}{۴}$

ب) $\frac{\pi}{۴}$

ج) $۲\pi i$

د) ۰

حل: $Q(z)=(۱+z^{۲})^{۲}$ در $z=\pm i$ قطب دوگانه دارد که تنها $z=i$ بالای محور x هاست در نتیجه داریم

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{(۱+x^{۲})^{۲}} = \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(۱+x^{۲})^{۲}} = \frac{۱}{۲}((z+i))'$$

$$= \frac{۱}{۲}(۲\pi i)\lim_{z\to i}\left(\frac{۱}{(z+i)^{۲}}\right)'$$

$$= \pi i \lim_{z\to i}\left(\frac{-۲}{(z+i)^{۳}}\right) = \pi i\left(\frac{-۲}{-۸i}\right) = \frac{\pi}{۴}$$

پس گزینه (ب) درست است

۹. مانده $\csc^{۲} z$ در $z=۰$ برابر است با

الف) π

ب) ۱

ج) πi

د) ۰

حل: داریم

$$\csc^{۲} z = \left(\frac{۱}{z}+\frac{z}{۶}+\frac{۷z^{۳}}{۳۶۰}+\cdots\right)^{۲} = \frac{۱}{z^{۲}}+\frac{۱}{۳}+\frac{۷z^{۲}}{۱۸۰}+\cdots$$

پس مانده برابر صفر می‌شود، یعنی گزینه (د) درست است

۱۰. مقدار $\oint \frac{dz}{z^{۳}(z+۵)}$ برای $c:|z+۲|=۱$ برابر است با

الف) ۰

ب) ۵π

ج) $-۵\pi i$

د) $۲+۳\pi i$

حل: گزینه الف صحیح است زیرا نقاط تکین بیرون دایره قرار دارند.

یادداشت: (حل تمرین شماره ۲۰ از فصل ۴)

صورت حل زیر را برای این تمرین به‌خاطر جالب بودن مسئله درج می‌کنیم. به نظر شما آیا ایرادی در این استدلال وجود دارد یا خیر. می‌توانید نقاط غیرتحلیلی را بیابید و نشان دهید که تعداد نقاط نامتناهی است. داریم

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_{c} z^{۲}\ln\left(\frac{z+۱}{z-۱}\right)dz = \frac{۱}{۲\pi i}\cdot ۲\pi i Res\left(z^{۲}\ln\left(\frac{z+۱}{z-۱}\right)\right) = Res\left(z^{۲}\ln\left(\frac{z+۱}{z-۱}\right)\right)$$

اما برای $|z| > ۱$ داریم

$$z^۲ \ln\left(\frac{z+۱}{z-۱}\right) = z^۲\left[\ln(z+۱) - \ln(z-۱)\right] = z^۲\left[\ln z\left(۱+\frac{۱}{z}\right) - \ln z\left(۱-\frac{۱}{z}\right)\right]$$
$$= z^۲\left[\ln z + \ln\left(۱+\frac{۱}{z}\right) - \ln z - \ln\left(۱-\frac{۱}{z}\right)\right] = z^۲\left[\ln\left(۱+\frac{۱}{z}\right) - \ln\left(۱-\frac{۱}{z}\right)\right]$$
$$= z^۲\left[\left(\frac{۱}{z} - \frac{۱}{۲z^۲} + \frac{۱}{۳z^۳} - \frac{۱}{۴z^۴} + \cdots\right) - \left(-\frac{۱}{z} - \frac{۱}{۲z^۲} - \frac{۱}{۳z^۳} - \frac{۱}{۴z^۴} - \cdots\right)\right]$$
$$= z^۲\left[\frac{۲}{z} + \frac{۲}{۳z^۳} + \frac{۲}{۵z^۵} + \cdots\right] = ۲z + \frac{۲}{۳z} + \frac{۲}{۵z^۳} + \cdots$$

بنابراین مانده مورد نظر که ضریب $\frac{۱}{z}$ است برابر $\frac{۲}{۳}$ خواهد بود.

حل تمرین‌های خودآزمایی ۶

۱ـ نشان دهید تبدیل $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$ نیمه فوقانی صفحه z را به نوار افقی $0 \leq v \leq \pi$ می‌نگارد.

حل: تابع $w = f(z)$ ترکیبی از تبدیل دو خطی $Z = \frac{z-1}{z+1}$ و تبدیل لگاریتمی $w = \ln Z$ است. تصویر نیمه‌فوقانی صفحه z یعنی $y \geq 0$ تحت نگاشت $Z = \frac{z-1}{z+1}$ را می‌توان با نوشتن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$ بدست آورد. براحتی مشخص می‌شود که $y \geq 0$ تحت این تبدیل بروی $Y \geq 0$ نگاشته می‌شود زیرا

$$Y = ImZ = Im\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2y}{|z+1|^2}$$

حال تبدیل $w = \ln Z$ را بررسی می‌کنیم با $Y \geq 0$. از $w = \ln Z$ داریم $e^w = Z$ یعنی $e^{u+iv} = X + iY$ که از آن

$$e^u \cos v + ie^u \sin v = X + iY$$

حاصل می‌شود. بدیهی است که برای $0 \leq v \leq \pi$ داریم $Y \geq 0$ بنابراین تحت ترکیب این دو نگاشت نیمه فوقانی صفحه z به $0 \leq v \leq \pi$ نگاشته می‌شود

۲ـ ثابت کنید $w = z + \frac{1}{z}$ ناحیه $1 \leq |z|$ و $y > 0$ را به $v \leq 0$ می‌نگارد

حل: داریم

$$w = z + \frac{1}{z} = z + z^{-1} = 2\cos\theta = u + iv$$

از طرفی چون برای $y > 0$ و $|z| \leq 1$ نیمه بالایی صفحه z مورد نظر است پس $0 \leq \theta \leq \pi$ که با مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم $-2 \leq u \leq 2$ و $v = 0$ اما وجود z در مخرج نشان می‌دهد که وقتی $z \to 0$ آنگاه $w \to \infty$ و برای z های موهومی محض منحنی همیشه مقدار w یک موهومی محض منحنی می‌شود مثلاً فرض کنید $z = -\frac{i}{2}$ یا $z = -\frac{i}{3}$ که به ترتیب می‌گیریم $w = -\frac{3i}{2}$ و $w = -\frac{10i}{3}$ یعنی $v < 0$ که با نتیجه قسمت اول خواهیم داشت $v \leq 0$.

۳ـ تبدیل دو خطی‌ای را بیابید که نقاط i، ۱ و ∞ را به ۱ و $-i$ و i می‌نگارد.

حل: با توجه به قضیه ۲ این فصل داریم

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

نقاط داده شده را در این رابطه قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$\frac{(w-1)(-i-1)}{(w-i)(-i-1)} = \frac{(z-i)(1-\frac{1}{t})}{(z-\frac{1}{t})(1-i)} = \frac{(z-i)(t-1)}{(tz-1)(1-i)}$$

حال قرار دهید $t = 0$ در نتیجه

$$\frac{(w-1)(2i)}{(w-i)(1+i)} = \frac{z-i}{1-i}$$

که از ساده کردن آن می رسیم به

$$w = \frac{1-iz}{2+i-z}.$$

۴ـ یک نقطه ثابت z از یک تبدیل دو خطی، نقطه‌ای است که تصویرش عدد یکسان $w = z$ است. ثابت کنید هر تبدیل دو خطی حداکثر دو نقطه ثابت در صفحه توسعه یافته دارد.

حل: با قرار دادن $w = z$ در تبدیل دو خطی $w = \frac{az+b}{cz+d}$ می‌گیریم

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \to cz^2 - (c-d)z - b = 0$$

که یک معادله درجه دو است و می‌دانیم هر معادله درجه دو حداکثر دو جواب می‌تواند داشته باشد.

۵ـ آیا تبدیل دو خطی وجود دارد که

(الف) شامل یک نقطه ثابت باشد (ب) یا اصلاً نقطه ثابت نداشته باشد

نقطه یا نقاط ثابت مربوط به تبدیل $w = \frac{3z-1}{z+1}$ را بیابید.

حل: (الف): جواب مثبت است زیرا ممکن است معادله درجه دو دارای دو جواب یکسان باشد به عبارتی دیگر ریشه‌های آن تکراری باشند.

(ب): خیر. زیرا هر معادله از درجه دو حتماً دو جواب دارد ممکن است جواب حقیقی نداشته باشد اما از آنجائیکه حوزه جواب ما اعداد مختلط است پس دو جواب داریم.

قرار می‌دهیم $w = z$، در اینصورت $z = \dfrac{3z - 1}{z + 1}$. یعنی $z^2 - 2z + 1 = 0$ که با نوشتن آن به صورت $(z - 1)^2 = 0$ جواب $z = 1$ را خواهیم داشت. پس این تبدیل دارای یک نقطه ثابت است.

۶ـ نشان دهید $w = \dfrac{\overline{\lambda} z - \lambda e^{i\alpha}}{z - e^{i\alpha}}$ که در آن α عددی حقیقی و $Im\lambda > 0$، ناحیه $|z| < 1$ را برروی نیم صفحه فوقانی صفحه $w-$ می‌نگارد.

حل: در بخش ۶ـ۳ کتاب دانستیم که $w = e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$ نیم صفحه $y \geq 0$ را برروی $|w| \leq 1$ می‌نگارد. براحتی می‌توان مشاهده نمود که معکوس این تبدیل عبارت است از

$$z = \frac{w\overline{z}_0 - e^{i\alpha} z_0}{w - e^{i\alpha}}$$

که اگر قرار دهیم $\lambda = z_0$ با فرض $Im\lambda > 0$ و تعویض z با w می‌گیریم

$$w = \frac{\overline{\lambda} z - \lambda e^{i\alpha}}{z - e^{i\alpha}}$$

و چون معکوس تبدیل قبلی است پس دایره واحد $|z| \leq 1$ را برروی $Imw \geq 0$ می‌نگارد که همان نیم صفحه فوقانی صفحه $w-$ است.

۷ـ ثابت کنید که بوسیله تبدیل $w = \left[\dfrac{z - i\alpha}{z + i\alpha}\right]^2$ نیم دایره سمت راست محور y ها به نیم صفحه فوقانی صفحه $w-$ نگاشت می‌شود

حل: نگاشت داده شده ترکیبی از دو نگاشت است که اولی یک تبدیل دو خطی و دیگری تبدیل تابع توانی است. با فرض $Z = \dfrac{z - i\alpha}{z + i\alpha}$ بعنوان اولین تبدیل، تبدیل دوم با $w = Z^2$ داده می‌شود. برای تبدیل اولی چون دو خطی است می‌دانیم تصویر هر دایره تحت این تبدیل یک دایره و یا یک خط است.

از $Z = \dfrac{z - i\alpha}{z + i\alpha} = X + iY$ می‌گیریم

$$x + iy = \frac{-2\alpha Y}{(X - 1)^2 + Y^2} - \frac{i\alpha(X^2 + Y^2 - 1)}{(X - 1)^2 + Y^2}$$

برای $x \geq 0$ با فرض $\alpha > 0$ باید $Y \geq 0$ پس قسمت بالای محور X ها مورد نظر است از طرفی اگر $x = y = 0$ مورد نظر باشد باید $Y = 0$ و $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ باشد یعنی $Y = 0$ و $X = \pm 1$ که چون قسمت بالای محور مورد نظر است پس ربع اول محورهای مختصات می‌تواند جواب ما تحت این تبدیل باشد.

برای تبدیل دومی به راحتی می‌توان نشان داد که تحت نگاشت $w = Z^2$ این ناحیه به نیم صفحه فوقانی صفحه $w-$ نگاشته می‌شود زیرا

$$w = (X+iY)^۲ = X^۲ - Y^۲ + ۲iXY = u + iv$$

از $XY \geq ۰$ می‌گیریم $v \geq ۰$.

۸ـ نمودار اسمیت وسیله‌ای ترسیمی است که در مهندس الکترونیک برای تحلیل فرکانس بالا از خطوط جریان مورد استفاده قرار می‌گیرد که $(|x| < \infty$، $z = r + ix$ پاگیری (امپدانی) نرمال شده و $\Gamma = a + ib$ ضریب انعکاس است. نگاشت $\Gamma(z) = \frac{z-۱}{z+۱}$ برای یک شبکه از خطوط عمودی نامتناهی و افقی نیمه نامتناهی در نیم راست از صفحه $z-$ بکار می‌رود. تصویر این شبکه در صفحه Γ نمودار اسمیت است. نشان دهید ناحیه $Rez \geq ۰$ تحت چنین نگاشتی قرص $|\Gamma| \leq ۱$ می‌باشد.

حل: چون تبدیل دو خطی یک دایره و یا یک خط را بروی دایره یا خط می‌نگارد همانند مثال ۲ فصل ۶ عمل می‌کنیم. فرض کنید

$$\Gamma(z) = \frac{z-۱}{z+۱} = u + iv$$

در این صورت $z = \frac{۱+u+iv}{۱-u-iv}$ یعنی

$$z = x + iy = \frac{(۱+u+iv)(۱-u+iv)}{(۱-u)^۲ + v^۲} = \frac{۱-u^۲-v^۲}{(۱-u^۲)+v^۲} + \frac{۲vi}{(۱-u)^۲+v^۲}$$

از $x \geq ۰$ می‌گیریم $۱ - u^۲ - v^۲ \geq ۰$ یعنی $u^۲ + v^۲ \leq ۱$. اما $|\Gamma(z)| = u^۲ + v^۲$ پس $|\Gamma(z)| \leq ۱$ به این ترتیب درستی نگاشت فوق ثابت می‌شود.

۹ـ ثابت کنید $w = -\frac{۱}{۲}(z + \frac{۱}{z})$ قسمت فوقانی دایره $|z| < ۱$ را بروی قسمت فوقانی صفحه $w-$ نگاشت می‌کند. در چه نقاطی از صفحه $z-$ انبساط خطی برابر $\frac{۱}{۲}$ است

حل: همانند تمرین ۲ حل می‌شود. داریم

$$w = -\frac{۱}{۲}(z + \frac{۱}{z}) = -\frac{۱}{۲}(z + z^{-۱}) = -\cos\theta = u + iv$$

یعنی $u = -\cos\theta$ و $v = ۰$. چون $\theta \geq ۰$ پس $u \geq ۱$ و $u \leq -۱$.

یک نقطه دلخواه در روی نیم دایره انتخاب می‌کنیم. مثلاً $z = \frac{i}{۳}$ در نتیجه $w = \frac{۸i}{۳}$ پس قسمت فوقانی صفحه $w-$ جواب می‌باشد. اگر بجای $-\frac{۱}{۲}$ عدد $\frac{۱}{۲}$ می‌بود در این صورت $u \geq ۱$ و $u \leq -۱$ به $-۱ \leq u \leq ۱$ عوض می‌شد.

۱۰ـ ثابت کنید شرط اینکه تحت نگاشت $w = \frac{az+b}{cz+d}$ نیم صفحه فوقانی از صفحه $z-$ به روی نیم صفحه فوقانی از صفحه $w-$ نگاشته شود، این است که $ad > bc$.

حل: داریم

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} = \frac{acz\bar{z} + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^۲} = u + iv$$

با جاگذاری $z = x + iv$ و مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم $v = \frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^۲}$. اگر $y \geq ۰$ باشد بدیهی است که $v \geq ۰$ است اگر $ad - bc \leq ۰$ یعنی $ad \geq bc$.

۱۱ـ نقش دامنه $|z| > ۱$ را تحت نگاشت ژوکوفسکی بیابید.

حل: همانند تمرین ۲ عمل می‌کنیم. داریم

$$w = z + \frac{۱}{z} = z + z^{-۱} = ۲\cos\theta$$

این تبدیل دایره $|z| = ۱$ را به روی $-۲ \leq u \leq ۲$ و $v = ۰$ می‌نگارد. همچنین هر نقطه نظیر $z = \frac{i}{۳}$ در قسمت تحتانی صفحه نقطه $z = -\frac{i}{۳}$ در قسمت فوقانی این صفحه نگاشته می‌شود پس تمام صفحه $w-$ می‌تواند باشد. امّا چون $|z| \neq ۱$ پس تحت این نگاشت تمام صفحه $w-$ مورد قبول است جز $-۲ \leq u \leq ۲$ و $v = ۰$.

۱۲ـ در نظریه الاستیسیته معادله

$$\nabla^۴\phi = \nabla^۲(\nabla^۲\phi) = \frac{\partial^۴\phi}{\partial x^۴} + ۲\frac{\partial^۴\phi}{\partial x^۲\partial y^۲} + \frac{\partial^۴\phi}{\partial y^۴}$$

معادله همساز دوگانه نامیده می‌شود که اهمیت بنیادی دارد. جوابهای این معادله را همساز دوگانه گویند. نشان دهید اگر $F(z)$ و $G(z)$ در ناحیه‌ای تحلیلی باشند آنگاه قسمت حقیقی $\overline{z}F(z) + G(z)$ در این ناحیه همساز دوگانه خواهد بود.

حل: با توجه به مطالب گفته شده در بخش ۲ـ۷ صفحه ۳۵ کتاب داریم

$$\nabla^۲ = \nabla.\nabla = Re(\overline{\nabla}.\nabla)$$
$$Re\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right] = \frac{۴\partial^۲}{\partial z\partial\overline{z}}$$

حال اگر قرار دهیم $\phi = \overline{z}F(z) + G(z)$، می‌گیریم

$$\nabla^۲\phi = ۴\frac{\partial^۲\phi}{\partial z\partial\overline{z}} = ۴\frac{\partial}{\partial z}F(z) = ۴F'(z)$$

در نتیجه

$$\nabla^۴\,\phi = \nabla^۲\,\nabla^۲\,\phi = \nabla^۲(۴F'(z))$$
$$= ۱۶\frac{\partial^۲}{\partial z\partial\overline{z}}(F'(z)) = ۰$$

زیرا $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(F'(z)) = ۰$.

۱۳ـ تبدیل شوارتز ـ کریستوفل، تبدیلی که نقاط داخلی یک چند ضلعی از صفحه $w-$ را به نیمه فوقانی از صفحه $z-$ می‌نگارد طوری که مرز چند ضلعی بروی محور x ها نگاشته می‌شود بوسیله تابع

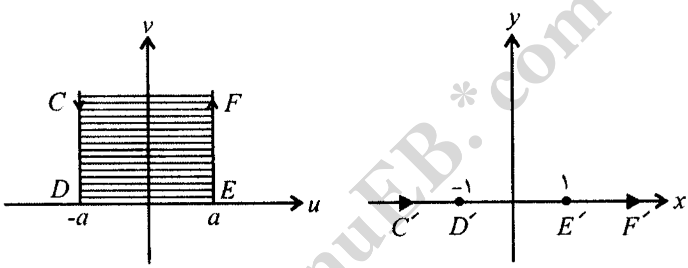
$$\frac{dw}{dz} = A(z-x_۱)^{\frac{\alpha_۱}{\pi}-۱}(z-x_۲)^{\frac{\alpha_۲}{\pi}-۱}\cdots(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}},$$

یا

$$w = A\int (z-z_۱)^{\frac{\alpha_۱}{\pi}-۱}(z-x_۲)^{\frac{\alpha_۲}{\pi}-۱}\cdots(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-۱}dz = B$$

صورت می‌گیرد که A و B اعداد ثابت مختلط و $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n زوایای داخلی چند ضلعی‌اند. تصویر ناحیه محدود به $u = a$ و $u = -a$ و $v = ۰$ را تحت این نگاشت بیابید.

حل: فرض کنید نقاط C و D و E و F به ترتیب به روی نقاط C' و D' و E' و F' نگاشته شوند (شکل ۱)



شکل ۱:

می‌توانیم $CDEF$ را بعنوان حالت محدود شده‌ای از یک چند جمله‌ای (مثلث) با دو رأس D و E و رأس سوم C یا F در بی‌نهایت بررسی کنیم.

با استفاده از تبدیل شوارتز ـ کریستوفل، و اینکه در D و E زوایا برابر $\frac{\pi}{۲}$ اند داریم

$$\frac{dw}{dz} = A(z+۱)^{\frac{\pi}{۲\pi}-۱}(z-۱)^{\frac{\pi}{۲\pi}} = \frac{A}{\sqrt{z^۲-۱}}$$

که با انتگرال گیری از طرفین تساوی می‌گیریم

$$w = B + Ach^{-۱}z = B + A\ln\left(z+\sqrt{z^۲-۱}\right)$$

از آنجائیکه $w = a$ وقتی که $z = ۱$، در اینصورت

$$a = B + Ach^{-۱}(۱) = B + A\ln(۱+۰) \Rightarrow B = a$$

و از طرفی $w = -a$ وقتی که $z = ۱$، در نتیجه

$$-a = B + Ach^{-۱}(-۱) = a + A\ln(-۱)۰) \rightarrow A = \frac{-۲ia}{\pi}$$

از اینرو نگاشت مورد نظر به صورت زیر خواهد بود

$$w = a\left(۱ - \frac{۲i}{\pi}\ln\left(z + \sqrt{z^۲ - ۱}\right)\right)$$

یا بعبارتی دیگر

$$z = ch\left[\frac{\pi i(w-a)}{۲a}\right].$$

۱۴ـ ثابت کنید ترکیب دو تبدیل کسری خطی یک تبدیل کسری خطی است

حل: دو تبدیل خطی زیر را در نظر می‌گیریم

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad w' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

در اینصورت

$$w(w'(z)) = \frac{aw'+b}{cw'+d} = \frac{a'\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)+b'}{c'\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)+d'}$$
$$= \frac{(aa'+cb')z + a'b + db'}{(ac'+cd')z + c'b + dd'} = \frac{Az+B}{Cz+D}$$

که خود یک تبدیل کسری است.

۱۵ـ همدیسی نگاشتهای $w = \cos z$، $w = \sin z$، $w = chz$ و $w = e^{z-۲}$ را بررسی کیند.

حل: توابع داده شده همگی توابعی تام هستند در تمام نقاط از صفحه $z-$ مشتق پذیراند نقاطی را که مشتق صفر می‌شوند، نقاطی‌اند که تابع همدیس نیست. داریم

$$w = \cos z \to w' = -\sin z = ۰ \to z = k\pi$$

پس این تابع همه جا همدیس است غیر از نقاط $z = k\pi$. همچنین

$$w = \sin z \to w' = \cos z = ۰ \to z = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

یعنی نقاطی که تابع $w = \sin z$ همدیس نیست نقاط مذکوراند.

برای $w = chz$ داریم $w' = shz$ که در نقاط $z = k\pi i$ صفر می‌شود یعنی همه جا همدیس است غیر از نقاط $z = k\pi i$.

برای $w = e^{z-۲}$ چون $w' = e^{z-۲} \neq ۰$ پس همه جا همدیس است.

۱۶ـ نشان دهید که $\int \frac{ds}{y}$ تحت نگاشت $w = \frac{az+b}{cz+d}$ بدون تغییر باقی می‌ماند که در آن a، b، c و d اعداد ثابت حقیقی‌اند به طوریکه $ad - bc = ۱$ و $ds = \sqrt{dx^۲ + dy^۲}$.

حل: داریم $dz = dx + idy$ در نتیجه $|dz| = \sqrt{dx^۲ + dy^۲} = ds$. از طرفی از $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ داریم $z = \dfrac{dw-b}{-cw+a}$ که از آن $dz = \dfrac{dw}{(a-cw)^۲}$ بعبارتی $ds = |dz| = \dfrac{|dw|}{|a-cw|^۲}$. همچنین

$$z = x + iy = \frac{dw-b}{-cw+a} = \frac{adu - cdu^۲ - ab + bcu}{|a-cw|^۲} + \frac{i(ad-bc)}{|a-cw|^۲}$$

و چون $ad - bc = ۱$ پس $y = \dfrac{v}{|a-cw|^۲}$. در نتیجه

$$\int \frac{ds}{y} = \int \frac{|dz|}{y} = \int \frac{|dw|}{y} = \int \frac{ds}{v}.$$

یعنی با تبدیل مورد نظر انتگرال بدون تغییر باقی می‌ماند.

۱۷ـ ثابت کنید $w = \dfrac{۱}{(z+i)^۲}$ ناحیه $|z| < ۱$ را به ناحیه بیرونی سهمی می‌نگارد. این همان تمرین ۱۷ از فصل ۳ است که اینجا دوباره تکرار شده است

۱۸ـ با استفاده از تبدیل $w = i\dfrac{۱-z}{۱+z}$ تابع همساز $\phi(x,y)$ را برای ناحیه $|z| \leq ۱$ با این شرط که $\phi(۱,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} ۱, & ۰ < \theta < \pi \\ ۰, & \pi < \theta < ۲\pi \end{cases}$ است، بیابید.

حل: این مسئله دریکله است برای دایره واحد بگونه‌ایکه تابع مورد نظر که در داخل دایره $|z| = ۱$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند و روی کمان نیمه پایینی دایره مقدار صفر را برمی‌گزیند و روی کمان نیمه بالایی دایره مقدار یک را دربر دارد.

با استفاده از فرمول پواسن داریم

$$\phi(r,\theta) = \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} \frac{f(\phi)d\phi}{۱ - ۲r\cos(\theta-\phi) + r^۲}$$
$$= \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{\pi} \frac{d\phi}{۱ - ۲r\cos(\theta-\phi) + r^۲} = ۱ - \frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}\left(\frac{۱-r^۲}{۲r\sin\theta}\right)$$

که می‌توان آن‌را براحتی برحسب x و y نوشت.

روش دیگری برای محاسبه تابع مورد نظر از نگاشت $w = i\left(\dfrac{۱-z}{۱+z}\right)$ استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $\phi = ۱ - \dfrac{۱}{\pi}\tan^{-۱}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ و از آنجائیکه $u = \dfrac{۲y}{(۱+x)^۲+y^۲}$ و $v = \dfrac{۱-(x^۲+y^۲)}{(۱+x)^۲+y^۲}$، با جاگذاری در این رابطه بگیریم

$$\phi = ۱ - \frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}\left(\frac{۱-(x^۲+y^۲)}{۲y}\right)$$

که اگر برحسب r و θ نوشته شود دقیقاً همان رابطه روش اول حاصل می‌شود.

۱۹ـ معادله با شرایط مرزی داده شده زیر را با استفاده از فرمول انتگرال پواسن حل نمایید.

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad y > 0$$

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} T_0, & x < -1 \\ T_1, & -1 < x < 1 \\ T_2, & x > 1. \end{cases}$$

حل: با استفاده از فرمول پواسن داریم

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yg(t)dt}{y^2+(x-t)^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1}\frac{yT_0dt}{y^2+(x-t)^2} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{yT_1dt}{y^2(x-t)^2} + \frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{yT_2dt}{y^2+(x-t)^2} \\
&= \frac{T_0}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{t-x}{y}\right)\Big|_{-\infty}^{-1} + \frac{T_1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{t-x}{y}\right)\Big|_{-1}^{1}\frac{T_2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{t-x}{y}\right)\Big|_{1}^{\infty} \\
&= \frac{T_0-T_1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+1}\right) + \frac{T_1-T_2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right) + T_2
\end{aligned}$$

که در آن $\phi(x, 0) = g(t)$.

۲۰ـ با انتخاب تابع تبدیل $w = \ln z$، نشان دهید، توزیع دما با حالت پایدار در ربع اول صفحه z که در طول مثبت محور x ها $T = 100$ و در طول مثبت محور y ها $T = 0$ است به صورت $T(x,y) = 100\left(1 - \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ می‌باشد.

حل: باید معادله لاپلاس $T_{xx} + T_{yy} = 0$ حل شود طوریکه $T(0,y) = 0$ و $T(x,0) = 100$.
تحت نگاشت $w = \ln z$ معادله تبدیل می‌شود به معادله لاپلاس $T_{uu} + T_{vv} = 0$ که از حل آن با شرایط داده شده می‌رسیم به

$$T(x,y) = 100\left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arg}z\right) = 100\left(1 - \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right).$$

حل آزمونهای چهار جوابی ۶

۱. کدامیک از نگاشتهای زیر در تمام صفحه $-z$ همدیس است؟

الف) $w = e^{z^2}$ ب) $w = z^2$ ج) $w = 2e^{-3z}$ د) $w = \frac{1}{z}$

حل: گزینه (ج) درست است زیرا داریم $w' = -6e^{-3z} \neq 0$.

۲. هر تبدیل دو خطی حداکثر چند نقطه ثابت در صفحه توسعه یافته دارد؟

الف) یک نقطه ب) دو نقطه ج) سه نقطه د) بیشمار نقطه

حل: گزینه (ب) درست است به مسئله ۴ مراجعه شود

۳. کدامیک از نگاشتهای زیر در تمام صفحه $-z$ همدیس نیست

الف) $w = \sin z$ ب) $w = \cos z$ ج) $w = chz$ د) هر سه

حل: گزینه (د) درست است تمرین ۱۵ را ببینید

۴. کدامیک از نگاشتهای زیر نگاشت ژوکوفسکی است

الف) $w = \dfrac{z^۲+۱}{۲z}$ ب) $w = z^۲ + ۱$ ج) $w = \tan z$ د) $w = \dfrac{۱}{z^۲}$

حل: گزینه (الف) درست است زیرا داریم

$$w = \frac{z^۲+۱}{۲z} = \frac{۱}{۲}\left(z + \frac{۱}{z}\right)$$

۵. نگاشت $w = \dfrac{z+b}{cz+۱}$ به یک نگاشت ثابت تبدیل می‌شود اگر

الف) $bc = ۰$ ب) $b \neq c$ ج) $bc = ۱$ د) $bc \neq ۱$

حل: برای $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ داریم $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c^۲\left(z+\dfrac{d}{c}\right)}$

حال فرض کنید باید صورت کسر صفر باشد تا w ثابت شود. یعنی $bc - ad = ۰$. چون $a = d = ۱$ پس $bc = ۱$. به این ترتیب گزینه (ج) درست است

۶. نگاشت دو خطی $w = \dfrac{۲z-۳}{cz+۴}$ نگاشتی خطی خواهد بود اگر

الف) $c = ۱$ ب) $c = ۲$ ج) $c = \dfrac{۳}{۲}$ د) $c = ۰$

حل: بدیهی است که اگر z در مخرج کسر حذف شود یا c طوری انتخاب شود که صورت بر مخرج عددی ثابت شود نگاشت خطی خواهد بود که $c = ۰$ یکی از این حالتهاست پس جواب (د) درست است

۷. تبدیل دو خطی که نقاط ۰، ۱، ∞ را به ترتیب به روی ∞، ۱، ۰ می‌نگارد عبارت است از

الف) $w = \dfrac{z+۱}{z}$ ب) $w = \dfrac{z+۱}{z-۱}$ ج) $w = \dfrac{۱}{z}$ د) $w = \dfrac{z}{z-۱}$

حل: داریم $\dfrac{(z-z_۱)(z_۲-z_۳)}{(z-z_۳)(z_۲-z_۱)} = \dfrac{(w-w_۱)(w_۲-w_۳)}{(w-w_۳)(w_۲-w_۱)}$ که با جاگذاری نقاط داده شده می‌گیریم

$$\frac{(w-۱)(۱-۰)}{(w-۰)(۱-\frac{۱}{t})} = \frac{(z-۰)(۱-\frac{۱}{t})}{(z-\frac{۱}{t})(۱-۰)} \Rightarrow \frac{۱}{w} = z \to w = \frac{۱}{z}$$

گزینه (ج) درست است

۸. تبدیل دو خطی که نقاط ۰، ۱−، ۱ را به ترتیب به روی ۱− و ۱ و ۰ می‌نگارد کدام است؟

الف) $w = \dfrac{۱}{z}$ ب) $w = \dfrac{z+۱}{z-۱}$ ج) $w = \dfrac{z}{z+۱}$ د) هیچکدام

حل: همانند آزمون ۷ عمل می‌کنیم. می‌گیریم $w = \frac{z-۱}{۳z+۱}$ پس گزینه (د) صحیح است

۹. کدام یک از معادله‌های زیر همساز دوگانه است؟

الف) $\nabla^۴ u = ۰$

ب) $\nabla^۲ u = ۰$

ج) $\nabla^۲ u + \nabla^۴ u = ۰$

د) $\nabla^۴ u = \nabla^۲ u$

حل: براحتی می‌توان با استفاده از آنچه در متن آمده است گزینه (الف) را برگزید.

۱۰. کدامیک از نگاشتهای زیر نیم صفحه $y \geq ۰$ را بروی $|w| \geq ۱$ می‌نگارد

الف) $w = \frac{۱}{z}$

ب) $w = e^۲ \left(\frac{z-i}{z+i}\right)$

ج) $w = e^z$

د) $w = \tan z$

حل: بدیهی است با توجه به بخش ۶ـ۳ نتیجه می‌گیریم که گزینه (د) صحیح است.

حل تمرین‌های خودآزمایی ۷

۱ـ سری فوریه توابع زیر را بنویسید

$$\text{(i)}\quad f(x)=\begin{cases}۱ & ,-۱\leq x<۰\\ ۰ & ,۰<x\leq ۱\end{cases}\qquad ,\quad f(x+۲)=f(x)$$

$$\text{(ii)}\quad f(x)=\sinh x,\quad -\pi<x<\pi,\quad f(x+۲\pi)=f(x)$$

$$\text{(iii)}\quad f(x)=\sin^{۲}x,\quad -\pi<x<\pi,\quad f(x=۲\pi)=f(x)$$

$$\text{(iv)}\quad f(x)=\cos\left(\frac{x}{۲}\right),\quad -\pi<x<\pi\quad ,f(x+۲\pi)=f(x).$$

حل: (i) داریم $l=۱$ و

$$a_۱=\int_{-۱}^{۱}f(x)dx=\int_{-۱}^{۰}dx=x|_{-۱}^{۰}=۱$$

$$a_n=\int_{-۱}^{۱}f(x)\cos n\pi x dx=\int_{-۱}^{۰}\cos n\pi dx=\frac{۱}{n\pi}\sin n\pi x|_{-۱}^{۰}=۰$$

$$b_n=\int_{-۱}^{۱}f(x)\sin n\pi x dx=\int_{-۱}^{۰}\sin n\pi x dx=-\frac{۱}{n\pi\cos n\pi x}|_{-۱}^{۰}=-\frac{۱}{n\pi}(۱-\cos n\pi)$$

بدیهی است که $b_n = \circ$ وقتی n زوج است. در نتیجه

$$f(x) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{۱}^{\infty}(a_n \cos n\pi + b_n \sin n\pi x)$$
$$= \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{\pi}\sum_{۱}^{\infty}\frac{۱}{۲k-۱}\sin(۲k-۱)\pi x$$

(ii) تابع داده شده تابعی فرد است پس $a_\circ = a_n = \circ$ و چون $l = \pi$، از اینرو

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi \sinh x \sin nx dx = \frac{-۲n\cos n\pi \sinh\pi}{\pi(n^۲+۱)} = \frac{-۲n(-۱)^n \sinh\pi}{\pi(n^۲+۱)}$$
$$f(x) = \frac{۲\sinh\pi}{\pi}\sum_{۱}^{\infty}\frac{n(-۱)^{n+۱}\sin nx}{n^۲+۱}$$

(ii) تابع $f(x)$ زوج است پس $b_n = \circ$. چون $l = \pi$ داریم

$$a_\circ = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi \sin^۲ x dx = ۱, \quad a_n = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi \sin^۲ x \cos nx dx$$
$$= \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\pi (۱-\cos ۲x)\cos nx dx$$
$$= \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\pi \cos nx dx - \frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^\pi [\cos(۲+n)x + \cos(۲-n)x]dx = \circ, n \neq ۲$$

زیرا جواب انتگرالها برحسب توابع سینوسی می‌شوند که در فاصله داده شده صفر می‌شوند مگر $n = ۲$ باشد زیرا برای $n = ۲$ در مخرج بعد از انتگرالگیری $(۲-n)$ خواهیم داشت که جواب $\frac{\circ}{\circ}$ حاصل می‌شود.
پس برای $n = ۲$ جداگانه $a_۲$ را بدست می‌آوریم. داریم

$$a_۲ = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi \sin^۲ x\cos ۲x dx = \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\pi (۱-\cos ۲x)\cos ۲x dx$$
$$= \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\pi \cos ۲x dx - \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\pi \cos^۲ ۲x dx = \circ - \frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^\pi (\cos ۴x + ۱)dx$$
$$= -\frac{۱}{۲\pi}\left[\frac{\sin ۴x}{۴} + x\right]_\circ^\pi = -\frac{۱}{۲}$$

از اینرو

$$f(x) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۲x$$

توجه شود می‌توانستیم با نوشتن $\sin^۲ x = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۲x$ چنین جوابی را مستقیماً بدست آوریم.
(iv) مجدداً تابعی زوج داریم با $l = \pi$، در نتیجه $b_n = \circ$ و

$$a_\circ = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi \cos\frac{x}{۲}dx = \frac{۴}{\pi}\sin\frac{x}{۲}|_\circ^\pi = \frac{۴}{\pi}$$

$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi \cos\frac{x}{۲}\cos nx dx = \frac{۱}{\pi}\left[\cos\left(\frac{۱}{۲}+n\right)x + \cos\left(\frac{۱}{۲}-x\right)x\right]dx$$

$$= \frac{۱}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{۱}{۲}+n\right)x}{\frac{۱}{۲}+n} + \frac{\sin\left(\frac{۱}{۲}-n\right)x}{\frac{۱}{۲}-n}\right]_۰^\pi = \frac{۴\cos n\pi}{\pi(۱-۴n^۲)} = \frac{۴(-۱)^n}{\pi(۱-۴n^۲)}$$

پس

$$f(x) = \frac{۲}{\pi} + \frac{۴}{\pi}\sum_۱^\pi \frac{(-۱)^n \cos nx}{۱-۴n^۲}.$$

۲ـ سری فوریه سینوسی توابع متناوب زیر را بنویسید

$$\text{(i)}\quad f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) \quad , \quad ۰ \le x \le \pi$$

$$\text{(ii)}\quad f(x) = \pi - x \quad , \quad ۰ < x < \pi$$

$$\text{(iii)}\quad f(x) = \cos x \quad , \quad ۰ < x < \pi$$

$$\text{(iv)}\quad f(x) = \begin{cases} ۰ & , ۰ < x < ۱ \\ ۱ & , ۱ < x < ۲ \end{cases} \quad , \quad ۰ < x < ۲$$

حل: (i) داریم $a_۰ = a_n = ۰$ و $l = \pi$ پس

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi \sin\left(\frac{x}{۲}\right)\sin x dx = -\frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi \left[\cos\left(\frac{۱}{۲}+n\right)x - \cos\left(\frac{۱}{۲}-n\right)x\right]dx$$

$$= -\frac{۱}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{۱}{۲}+n\right)x}{\frac{۱}{۲}+n} - \frac{\sin\left(\frac{۱}{۲}-n\right)}{\frac{۱}{۲}-n}\right]_۰^\pi = \frac{۸n\cos n\pi}{\pi(۱-۴n^۲)} = \frac{۸n(-۱)^n}{\pi(۱-۴n^۲)}$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{۸}{\pi}\sum_۱^\infty \frac{n(-۱)^n \sin nx}{۱-۴n^۲}$$

(ii) به دلیلی مشابه $a_۰ = a_n = ۰$ و همچنین $l = \pi$ پس

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi (\pi - x)\sin nx dx = \frac{۲}{\pi}\left[\frac{(\pi-x)\cos x}{-n}\Big|_۰^\pi - \frac{۱}{n}\int_۰^\pi \cos nx dx\right.$$

$$= \frac{۲}{\pi}\left[۰ + \frac{\pi}{n} - \frac{۱}{n^۲}\sin nx\right]_۰^\pi = \frac{۲}{n}$$

در نتیجه

$$f(x) = ۲\sum_۱^\infty \frac{\sin nx}{n}$$

(iii) چون سری فوریه سینوسی مورد نظر است مهم نیست که تابع داده شده زوج است پس $a_\circ = a_n = \circ$ و

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi \cos x \sin nx dx = \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\pi [\sin(۱+n)x - \sin(۱-n)x]dx$$
$$= \frac{۱}{\pi}\left[-\frac{\cos(۱+n)x}{۱+n} - \frac{\cos(۱-n)x}{۱-n}\right]_\circ^\pi = \begin{cases} \dfrac{۴n}{\pi(n^۲-۱)} & ,n = ۲k \\ \circ & ,n = ۲k+۱ \end{cases}$$

چون b_n در $n = ۱$ تعریف نمی‌شود پس $b_۱$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم داریم

$$b_۱ = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi \cos x \sin x dx = \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\pi = -\frac{۱}{۲\pi}\cos ۲x|_\circ^\pi = \circ$$

پس

$$f(x) = \frac{۴}{\pi}\sum_۱^\pi \frac{۲k\sin ۲kx}{(۴k^۲-۱)} = \frac{۸}{\pi}\sum_۱^\infty \frac{k\sin ۲kx}{۴k^۲-۱}.$$

(iv) در اینجا $l = ۲$. از اینرو

$$b_n = \frac{۲}{۲}\int_\circ^۲ f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{۲}\right)dx = \left[\int_\circ^۱ \circ + \int_۱^۲ \sin\left(\frac{n\pi x}{۲}\right)\right]dx$$
$$= -\frac{۲}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{۲}\right)|_۱^۲ = \frac{۲}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{۲}\right) - \cos n\pi\right)$$
$$= \frac{۲}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{۲}\right) - (-۱)^n\right)$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{۲}{\pi}\sum_۱^\infty \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{۲}\right) - (-۱)^n}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{۲}\right).$$

۳ـ سری فوریه کسینوسی توابع متناوب زیر را بنویسید

$$\text{(i)}\quad f(x) = \begin{cases} x, & \circ < x < ۱ \\ ۲-x, & ۱ < x < ۲ \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad f(x) = (x-۱)^۲,\quad \circ < x < ۱$$

$$\text{(iii)}\quad f(x) = \sin ۲x,\quad \circ < x < \pi$$

$$\text{(iv)}\quad f(x) = e^{-x},\quad \circ < x < \pi.$$

حل: (i) چون سری فوریه کسینوسی مورد نظر است پس $b_n = \circ$. داریم $l = ۲$ در نتیجه

$$a_\circ = \frac{۲}{۲}\int_\circ^۲ f(x)dx = \int_\circ^۱ xdx + \int_۱^۲ (۲-x)dx = \frac{x^۲}{۲}|_\circ^۱ - \frac{(۲-x)^۲}{۲}|_۱^۲ = ۱$$

$$a_n = \frac{۲}{۲}\int_۰^۲ f(x)\cos nxdx = \int_۰^۱ x\cos nxdx + \int_۱^۲ (۲-x)\cos nxdx$$
$$= \frac{x\sin nx}{n}\Big|_۰^۱ - \frac{۱}{n}\int_۰^۱ \sin xdx + \frac{(۲-x)\sin nx}{n}\Big|_۱^۲ + \frac{۱}{n}\int_۱^۲ \sin nxdx$$
$$= \frac{۴}{\pi^۲ n^۲}(۲\cos\frac{n\pi}{۲} - (\cos\pi - ۱)) =$$
$$\begin{cases} ۰ & \text{برای } n \text{ های زوج تقسیم پذیر بر ۴ و برای } n \text{ های فرد} \\ \dfrac{-۱۶}{\pi^۲ n^۲} & \text{برای } n \text{ های زوج غیر تقسیم پذیر بر ۴} \end{cases}$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱۶}{\pi^۲}\sum_۱^\infty \frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{۲}\right)}{n^۲}$$

(ii) در اینجا $l = ۱$ است. از اینرو

$$a_۰ = ۲\int_۰^۱ (x-۱)^۲dx = \frac{۳}{۲}(x-۱)^۳\Big|_۰^۱ = \frac{۲}{۳}$$
$$a_n = ۲\int_۰^۱ (x-۱)^۲\cos n\pi xdx = \frac{۲}{\pi n}(x-۱)^۲\sin n\pi x\Big|_۰^۱ - \frac{۴}{\pi n}\int_۰^۱ (x-۱)\sin n\pi xdx$$
$$= -\frac{۴}{n\pi}\left[-\frac{(x-۱)\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_۰^۱ + \int_۰^۱ \frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx\right] = \frac{۴}{\pi^۲ n^۲}$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{۱}{۳} + \frac{۴}{\pi^۲}\sum_۱^\infty \frac{\cos n\pi x}{n^۲}.$$

(iii) در اینجا $l = \pi$ ، $b_n = ۰$ از اینرو

$$a_۰ = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi \sin ۲xdx = -\frac{۱}{\pi}\cos ۲x\Big|_۰^\pi = ۰$$
$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi \sin ۲x\cos xdx = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi [\sin(۲+n)x + \sin(۲-n)x]dx$$
$$= \frac{۱}{\pi}\left[\frac{-\cos(۲+n)x}{۲+n} + \frac{-\cos(۲-n)x}{۲-n}\right]_۰^\pi =$$
$$\begin{cases} ۰ & n \text{ های زوج،} \\ \dfrac{۸}{\pi(۴-n^۲)} & n \text{ های فرد،} \end{cases}$$

چون a_n در $n = ۲$ تعریف نمی‌شود باید $a_۲$ را جداگانه بدست آوریم. داریم

$$a_۲ = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi \sin ۲x\cos ۲xdx = \frac{\sin^۲ ۲x}{۲\pi}\Big|_۰^\pi = ۰$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{۸}{\pi} \sum_{۲}^{\infty} \frac{\cos ۲kx}{۴ - ۴k^۲} = \frac{۲}{\pi} \sum_{۲}^{\infty} \frac{\cos ۲kx}{۱ - k^۲}$$

(iv) همانند قبلی داریم $l = \pi$ و $b_n = ۰$. از اینرو

$$a_۱ = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\pi} e^{-x} dx = -\frac{۲}{\pi} e^{-x} |_۰^{\pi} = \frac{۲}{\pi} (۱ - e^{-\pi})$$

$$a_n = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\pi} e^{-x} \cos nx dx = \frac{۲e^{-x} \sin nx}{\pi n} |_۰^{\pi} + \frac{۲}{\pi n} \int_۰^{\pi} e^{-x} \sin nx dx$$

حال اگر مجدداً با روش جزء به جزء انتگرال گیری کنیم می‌توان نشان داد که

$$a_n = \frac{۲}{\pi(n^۲ + ۱)} (۱ - e^{-\pi} \cos n\pi)$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{۱ - e^{-\pi}}{\pi} + \frac{۲}{\pi} \sum_{۱}^{\infty} \frac{(۱ - e^{-\pi} \cos n\pi) \cos nx}{n^۲ + ۱}.$$

۴ـ درستی روابط (۹) موجود در بخش ۱ـ۲ را تحقیق نمائید

حل: همانطوریکه در متن کتاب آمده است کافی است طرفین رابطه

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{۱}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

را به ترتیب در $\cos \frac{m\pi x}{l}$ و $\sin \frac{m\pi x}{l}$ ضرب کرده و از $-l$ تا l جمله به جمله انتگرال بگیریم. با این فرض که جای $\sum$ و علامت انتگرال را بتوانیم عوض نمائیم، در اینصورت خواهیم داشت

$$\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{a_۰}{۲} \int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx + \sum_{۱}^{\infty} [a_n \int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx$$
$$+ b_n \int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx]$$

چون دنباله توابع $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{l} \right\}_{۱}^{\infty}$ متعامدند و در انتگرال مربوط به b_n تابع انتگرالهای فرد است می‌گیریم

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} = ۰ \,, \quad m \neq n$$

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = ۰$$

امّا برای $m = n$ در انتگرال اولی داریم

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \cos^۲ \frac{n\pi x}{l} dx = ۲ \int_۰^{l} \cos^۲ \frac{n\pi x}{l} dx$$

۸. سری فوریه سینوسی تابع $f(x) = \sin 3x$ برای فاصله $0 < x < \pi$ عبارت است از

الف) $\sin 3x$ ب) $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$ ج) $\sum_1^\infty \frac{\sin 3x}{n}$ د) $3\sin x$

حل: براحتی می‌توان گزینه (الف) را انتخاب نمود. زیرا بخاطر وجود ۳ داریم $b_n = 0$ وقتی $n \neq 3$ و $b_3 = 1$. بدیهی است که $a_0 = a_n = 0$.

۹. سری فوریه تابع $f(x) = \sin^2 x$ برای فاصله $-\pi < x < \pi$ عبارت است از

الف) $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$ ب) $\sum \frac{\cos nx}{n}$ ج) $2 + \cos^2 x$ د) $\frac{1 - \cos 2x}{2}$

حل: گزینه (د) صحیح است زیرا کافی است بنویسیم $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
با محاسبه ضرایب فوریه هم این نتیجه بدست می‌آید.

۱۰. توابع x^2 و x^4 روی فاصله $[-1, 1]$ متعامداند اگر تابع وزن برابر باشد با

الف) ۱ ب) x ج) x^2 د) x^6

حل: باید $\int_{-1}^{1} x^2.x^4 w(x)dx = 0$ باشد. بدیهی است اگر $w(x)$ تابعی فرد انتخاب شود این تساوی برقرار است پس گزینه (ب) صحیح است.

حل تمرین‌های خودآزمایی ۸

۱ـ تابع $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ را به صورت انتگرال فوریه بنویسید و با استفاده از آن نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\cos x + x\sin x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{e}.$$

حل: داریم

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\infty}^{0} f(t) + \int_0^\infty f(t)\right]\cos\alpha t dt = \frac{1}{\pi(1+\alpha^2)} \\ B(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\infty}^{0} f(t) + \int_0^\infty f(t)\right]\sin\alpha t dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\sin\alpha t dt = \frac{\alpha}{\pi(1+\alpha^2)} \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$f(x) = \int_۰^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha$$
$$= \frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x}{۱+\alpha^۲}d\alpha$$

اگر $x = ۱$ انتخاب شود داریم $f(۱) = e^{-۱}$، در نتیجه

$$e^{-۱} = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha + \alpha\sin\alpha}{۱+\alpha^۲}d\alpha$$

کافی است $x = \alpha$ اختیار شود تا نتیجه مورد نظر بدست آید.

۲ـ تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x, & ۰ \le x \le \pi \\ ۰, & \text{برای } x \text{ های دیگر} \end{cases}$ را به صورت انتگرال فوریه بنویسید و با استفاده از آن ثابت کنید که

$$\int_۰^\infty \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{۲}\right)dx}{۱-x^۲} = \frac{\pi}{۲}.$$

حل: داریم

$$A(\alpha) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha t dt = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi \sin t\cos\alpha t dt$$
$$= \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^\pi [\sin(۱+\alpha)t + \sin(۱-\alpha)t]dt$$
$$= -\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\cos(۱+\alpha)t}{۱+\alpha} + \frac{\cos(۱-\alpha)t}{۱-\alpha}\right)\Big|_۰^\pi = \frac{۱+\cos\alpha\pi}{(۱-\alpha^۲)\pi}$$
$$B(\alpha) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\alpha t dt = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi \sin t\sin\alpha t dt$$
$$= -\frac{۱}{۲\pi}\int_۰^\pi [\cos(۱+\alpha)t - \cos(۱-\alpha)t]dt$$
$$= -\frac{۱}{۲\pi}\left[\frac{\sin(۱+\alpha)t}{۱+\alpha} - \frac{\sin(۱-\alpha)t}{۱-\alpha}\right] = \frac{\sin\alpha\pi}{(۱-\alpha^۲)\pi}$$

بنابراین نتایج می‌گیریم

$$f(x) = \int_۰^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha$$
$$= \frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty \frac{(۱+\cos\alpha\pi)\cos\alpha x + \sin\alpha\pi\sin\alpha x}{۱-\alpha^۲}d\alpha$$
$$= \frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha x + (\cos\alpha\pi\cos\alpha x + \sin\alpha\pi\sin\alpha x)}{۱-\alpha^۲}d\alpha$$

$$= \frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha x + \cos(\pi - x)\alpha}{۱-\alpha^۲}d\alpha$$

با انتخاب $x = \frac{\pi}{۲}$ می‌گیریم

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \sin\frac{\pi}{۲} = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty \frac{۲\cos\frac{\pi}{۲}\alpha}{۱-\alpha^۲}d\alpha \Rightarrow \frac{\pi}{۲} = \int_۰^\infty \frac{\cos\frac{\pi}{۲}\alpha}{۱-\alpha^۲}d\alpha$$

کافی است $x = \alpha$ اختیار شود تا نتیجه مورد نظر بدست آید.

۳ـ با استفاده از انتگرال فوریه کسینوسی درستی روابط زیر را تحقیق نمایید

$$\text{i) } e^{-x}\cos x = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\alpha^۲+۲}{\alpha^۴+۴}\cos\alpha x d\alpha,$$

$$\text{ii) } e^{-kx} = \frac{۲k}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha x d\alpha}{\alpha^۲+k^۲},$$

$$\text{iii) } (۱+x)e^{-x} = \frac{۴}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha x d\alpha}{(\alpha^۲+۱)^۲}.$$

حل: (i) داریم $B(\alpha) = ۰$ و

$$A(\alpha) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty f(t)\cos\alpha t dt$$
$$= \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty e^{-t}\cos t\cos\alpha t dt = \frac{۲}{\pi}\left(\frac{\alpha^۲+۲}{\alpha^۴+۴}\right)$$

به این ترتیب

$$f(x) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\alpha^۲+۲}{\alpha^۴+۴}\cos\alpha x d\alpha$$

چون $f(x) = e^{-x}\cos x$ انتخاب شده است درستی یک ثابت می‌شود.
(ii) مجدداً داریم $B(\alpha) = ۰$ و

$$A(\alpha) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty f(t)\cos\alpha t dt$$
$$= \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty e^{-kt}\cos\alpha t dt = \frac{۲k}{\pi(\alpha^۲+k^۲)}$$

در نتیجه

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{۲k}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha x d\alpha}{\alpha^۲+k^۳}$$

(iii) داریم $B(\alpha) = ۰$ و

$$A(\alpha) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty (۱+t)e^{-t}\cos\alpha t dt = \frac{۴}{\pi(\alpha^۲+۱)}$$

در نتیجه

$$f(x) = (۱ + x)e^{-x} = \frac{۴}{\pi}\int_{۰}^{\infty} \frac{\cos\alpha x d\alpha}{(\alpha^{۲} + ۱)^{۲}}.$$

۴ـ تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ - x^{۲}, & |x| < ۱ \\ ۰, & |x| > ۱ \end{cases}$ را بدست آورید و با استفاده از اتحاد پارسوال نشان دهید که

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{(x\cos x - \sin x)^{۲}}{x^{۶}} dx = \frac{\pi}{۱۵}$$

حل: داریم

$$\mathcal{F}_c\{f\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt = F_c(\alpha)$$
$$= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{۱}(۱ - t^{۲})\cos\alpha t dt = ۲\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(\frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^{۳}}\right)$$

با استفاده از رابطه ۳۰ و این فرض که $f(x) = g(x)$ باشد می‌گیریم

$$\int_{۰}^{\infty} f^{۲} dt = \int_{۰}^{\infty} F_c^{۲} d\alpha$$

در نتیجه

$$\int_{۰}^{۱}(۱ - t^{۲})^{۲} dt = \frac{۸}{۱۵} = \frac{۸}{\pi}\int_{۰}^{\infty} \frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^{۶}} d\alpha$$
$$\to \int_{۰}^{\infty} \frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^{۶}} d\alpha = \frac{\pi}{۱۵}.$$

برای حل قسمت اول می‌توانید از مثال ۷ متن کتاب هم استفاده نمائید

۵ـ معادله انتگرالی $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) = (۱ + |x|)e^{-|x|}$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم $g(x) = e^{-|x|}$ در این صورت

$$\mathcal{F}\{g\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-i\alpha t} dt$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۰} e^{t}e^{-i\alpha t} dt + \int_{۰}^{\infty} e^{-t}e^{-i\alpha t} dt\right]$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\frac{e^{(۱-i\alpha)t}}{۱ - i\alpha}\Big|_{-\infty}^{۰} \frac{e^{-(۱+i\alpha)t}}{۱ + i\alpha}\Big|_{۰}^{\infty}\right] = \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}(۱ + \alpha^{۲})}$$

همچنین

$$\mathcal{F}(|x|g(x)) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۰} -te^{t}e^{-i\alpha t} dt + \int_{۰}^{\infty} te^{-t}e^{-i\alpha t} dt\right]$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} te^{(1-i\alpha)t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} te^{-(1+i\alpha)t} dt$$
$$= \frac{2(1-\alpha^2)}{\sqrt{2\pi}(1+\alpha^2)^2}$$

حال اگر از طرفین معادله داده شده تبدیل فوریه بگیریم، بنابر قضیه کنولوشن خواهیم داشت

$$F(\alpha)G(\alpha) = \mathcal{F}[(1+|x|)g(x)] = \mathcal{F}\{g(x)\} + \mathcal{F}\{|x|g(x)\}$$

یعنی

$$F(\alpha)\frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\alpha^2)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\alpha^2)} + \frac{2(1-\alpha^2)}{\sqrt{2\pi}(1+\alpha^2)^2}$$

که بعد از ساده کردن می‌گیریم

$$F(\alpha) = \frac{2}{1+\alpha^2}$$

در نتیجه

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{1+\alpha^2}\right\}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+\alpha^2} d\alpha$$

که این انتگرال یک انتگرال مختلط است و همانند روشهای گفته شده در فصل ۵ حل می‌شود.

تابع زیر انتگرال دو نقطه تکین $\pm i$ دارد که تنها $\alpha = i$ در نیمه فوقانی صفحه مختلط واقع است. بنابر قضیه مانده‌ها داریم

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \left(\frac{e^{-x}}{2i}\right) = \sqrt{2\pi} e^{-x}$$

بخاطر همگرایی در تبدیل فوریه چون باید x عدد مثبتی باشد پس بهتر است بجای x بنویسیم $|x|$ در نتیجه

$$f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-|x|}.$$

۶ـ اگر $f(t)$ تابع پالس مستطیلی به شرح زیر باشد، تبدیل فوریه آن را بدست آورید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & , |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

حل: داریم

$$\mathcal{F}\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\alpha t} dt$$

$$= \frac{۱}{-i\sqrt{۲\pi}\alpha} e^{-i\alpha t}\Big|_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} = \frac{۱}{-i\sqrt{۲\pi}\alpha}\left(e^{-i\alpha\frac{T}{۲}} - e^{i\alpha\frac{T}{۲}}\right)$$
$$= \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}\alpha}\sin\left(\alpha\frac{T}{۲}\right).$$

۷ـ تبدیل فوریه تابع نمایی دو طرفه $f(t) = exp(-k|t|)$ را برای $k > ۰$ بیابید.

حل: داریم

$$\mathcal{F}\{f\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۰} f(t) + \int_{۰}^{\infty} f(t)\right] e^{-i\alpha t}dt$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۰} e^{kt}e^{-i\alpha t}dt + \int_{۰}^{\infty} e^{-kt}e^{-i\alpha t}dt\right]$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۰} e^{(k-i\alpha)t}dt + \int_{۰}^{\infty} e^{-(k+i\alpha)t}dt\right]$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\frac{e^{(k-i\alpha)t}}{k-i\alpha}\Big|_{-\infty}^{۰} - \frac{e^{-(k+i\alpha)t}}{k+i\alpha}\Big|_{۰}^{\infty}\right]$$
$$= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{k}{k^۲+\alpha^۲}.$$

۸ـ (قضیه پارسوال) ثابت کنید اگر $F(\alpha)$ تبدیل فوریه $f(t)$ باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|^۲ dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F|^۲ d\alpha$$

سپس با استفاده از آن نشان دهید انرژی سیگنال $f(t) = e^{-kt}h(t)$ برای $k > ۰$ برابر $\frac{۱}{۲k}$ است.

حل: داریم

$$f(\alpha) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt$$
$$g(t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha$$

از رابطه دومی می‌گیریم

$$\overline{g}(t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\alpha)e^{-i\alpha t}d\alpha$$

که با ضرب طرفین در $f(t)$ و انتگرال گیری از $-\infty$ تا $+\infty$ خواهیم داشت

$$f(t)\overline{g}(t)dt = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{G}(\alpha)e^{-i\alpha t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\alpha) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt\right] d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\alpha)F(\alpha)d\alpha$$

حال اگر $f = g$ اختیار شود می‌گیریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F|^2 d\alpha.$$

داریم $f(t) = e^{-kt}h(t)$ که $h(t)$ تابع پله‌ای یکه تعریف شده در متن درس است یعنی

$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. در نتیجه

$$\mathcal{F}\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt}h(t)e^{-i\alpha t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(k+i\alpha)t}dt$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(k+i\alpha)t}}{k+i\alpha}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\alpha)} = F(\alpha)$$

به این ترتیب خواهیم داشت

$$\text{انرژی سیگنال} = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F|^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{|k+i\alpha|^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{k^2+\alpha^2} = \frac{1}{2\pi k} \tan^{-1} \frac{\alpha}{k}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2k}.$$

۹ـ تمرین ۸ را با فرض $f(t) = \dfrac{2k}{t^2+k^2}$ حل کنید و جواب $\dfrac{2\pi}{k}$ را نتیجه گیری نمائید

حل: داریم

$$\mathcal{F}\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt = \frac{2k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha t}dt}{t^2+k^2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha t - i\sin\alpha t}{t^2+k^2}dt$$
$$= \frac{2k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha t dt}{t^2+k^2} - \frac{2ki}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha t}{k^2+t^2}dt$$
$$= \frac{2k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha t dt}{t^2+k^2}$$

زیرا با توجه به تمرین ($17i$) فصل ۵ حاصل قسمت موهومی انتگرال صفر می‌شود.

می‌توان با استفاده از فصل ۵ براحتی نشان داد که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha t dt}{t^2+k^2} = \frac{\pi}{k}e^{-\alpha k}$$

در نتیجه

$$\mathcal{F}\{f\} = \frac{۲k}{\sqrt{۲\pi}}.\frac{\pi}{k}e^{-\alpha k} = \sqrt{۲\pi}e^{-\alpha k} = F(\alpha)$$

پس

$$\text{انرژی سیگنال} = \int_{-\infty}^{\infty} |F|^۲ d\alpha = ۲\int_{۰}^{\infty} |F|^۲ d\alpha = ۴\pi\int_{۰}^{\infty} e^{-۲k\alpha}d\alpha = \frac{۲\pi}{k}.$$

توجه شود که چون تبدیل مورد نظر یک تبدیل فوریه کسینوسی بوده است بخاطر همین نوشتیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F|^۲ d\alpha = ۲\int_{۰}^{\infty} |F|^۲ d\alpha.$$

۱۰ـ ثابت کنید:

$$\text{(i)}\quad \mathcal{F}\{(sgnx)e^{-kx}\} = \frac{-i\alpha}{\alpha^۲ + k^۲},$$

$$\text{(ii)}\quad \mathcal{F}\{e^{-k|t-t_۰|}\} = \frac{۲k}{k^۲+\alpha^۲}e^{-i\alpha t},$$

$$\text{(iii)}\quad \mathcal{F}\left\{\frac{\sin kx}{x}\right\} = \begin{cases}\pi, & |\alpha| < k \\ ۰, & |\alpha| > k\end{cases},$$

$$\text{(iv)}\quad \mathcal{F}^{-۱}\{e^{-۲|\alpha-۳|}\} = \frac{۲e^{۳ix}}{\pi(x^۲+۴)}$$

حل: (i) داریم

$$\mathcal{F}\{(\text{sgn}\, x)e^{-kx}\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}\, te^{-k|t|}e^{-i\alpha t}dt$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۰} \text{sgn}\, te^{kt}e^{-i\alpha t}dt + \int_{۰}^{\infty} \text{sgn}\, te^{-kt}e^{-i\alpha t}dt\right]$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۰} -e^{k-i\alpha t}dt + \int_{۰}^{\infty} e^{-(k+i\alpha)t}dt\right]$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\frac{-۱}{k-i\alpha}e^{(k-i\alpha)t}\Big|_{-\infty}^{۰} - \frac{۱}{k+i\alpha}e^{-(k+i\alpha)t}\Big|_{۰}^{\infty}\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{i\alpha}{k^۲+\alpha^۲}.$$

(ii) داریم

$$\mathcal{F}\{e^{-k|x|}\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|t|}e^{-i\alpha t}dt$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۰} e^{kt}.e^{-i\alpha t}dt + \int_{۰}^{\infty} e^{-kt}.e^{-i\alpha t}dt\right]$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۰} e^{(k-i\alpha)t}dt + \int_{۰}^{\infty} e^{-k+i\alpha t}dt\right]$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\frac{e^{(k-i\alpha)t}}{k-i\alpha}|_{-\infty}^{۰} - \frac{e^{(k+i\alpha)t}}{k+i\alpha}|_{۰}^{\infty}\right] = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{k}{k^۲+\alpha^۲}.$$

با استفاده از ویژگی (ii) از ویژگیهای تبدیل فوریه در متن داریم

$$\mathcal{F}\{f(t-c)\} = e^{-ic\alpha}\mathcal{F}\{f\}$$

در نتیجه

$$\mathcal{F}\{e^{-k|t-t_۰|}\} = e^{-it_۰\alpha}\mathcal{F}\{e^{-k|t|}\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}e^{-it_۰\alpha}\frac{k}{k^۲+\alpha}.$$

(iii) داریم

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin kx}{x}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kt}{t}e^{-i\alpha t}dt$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kt}{t}(\cos\alpha t - i\sin\alpha t)dt$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kt\cos\alpha t - i\sin kt\sin\alpha t}{t}dt$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kt\cos\alpha t}{t}dt - \frac{i}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kt\sin\alpha t}{t}dt$$

تابع زیر انتگرال اولی زوج و زیر انتگرال دومی تابعی فرد است در نتیجه

$$= \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin kt\cos\alpha t}{t}dt = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin(k+\alpha)t+\sin(k-\alpha)t}{t}dt$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin(k+\alpha)t}{t}dt + \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin(k-\alpha)t}{t}dt.$$

می‌دانیم $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{۲}$ پس دو حالت اتفاق می‌افتد. اگر دو تابع زیر انتگرال هم علامت باشند آنگاه خواهیم داشت

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{۲}}$$

و اگر هم علامت نباشند

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲}\right] = ۰$$

(iv) داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{-۲|\alpha-۳|}) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۲|\alpha-۳|}e^{i\alpha t}d\alpha \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۳} e^{۲(\alpha-۳)}e^{i\alpha t}d\alpha + \int_{۳}^{\infty} e^{-۲(\alpha-۳)}.e^{i\alpha t}d\alpha\right] \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{۳} e^{-۶}e^{(۲+it)\alpha}d\alpha + \int_{۳}^{\infty} e^{۶}e^{-(۲-it)\alpha}d\alpha\right] \\
&= \frac{e^{-۶}}{\sqrt{۲\pi}}\frac{e^{(۲+it)\alpha}}{۲+it}\Big|_{-\infty}^{۳} - \frac{e^{۶}}{\sqrt{۲\pi}}\frac{e^{-(۲-it)\alpha}}{۲-it}\Big|_{۳}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-۶}.e^{-۳(۲-it)}}{\sqrt{۲\pi}(۲-it)} = \frac{۴e^{۳it}}{(۴+t^۲)}\sqrt{۲\pi}.
\end{aligned}$$

۱۱ـ تبدیل فوریه دارای خاصیتی است بنام خاصیت دوگانگی. به این صورت که اگر $F(\alpha)$ تبدیل فوریه تابع $f(x)$ باشد آنگاه $\mathcal{F}\{F(x)\} = ۲\pi f(-\alpha)$. با توجه به این رابطه تبدیل فوریه تابع $f(x) = \frac{۲\alpha}{\alpha^۲+x^۲}$ را بیابید.

حل: با استفاده از تمرین ۱۰ داریم

$$\mathcal{F}\{e^{-a|x|}\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{a}{a^۲+\alpha^۲} = F(\alpha)$$

از اینرو

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{a}{a^۲+x^۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\frac{۲a}{a^۲+x^۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}f(x) \\
&\Rightarrow f(x) = \sqrt{۲\pi}F(x)
\end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \sqrt{۲\pi}\mathcal{F}\{F(x)\}$$

امّا $\mathcal{F}\{f(x)\} = f(-\alpha)$ در نتیجه

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \sqrt{۲\pi}f(-\alpha) = \sqrt{۲\pi}e^{-a|\alpha|}.$$

توجه شود که $f(\alpha) = e^{-a|\alpha|}$ می‌باشد.

۱۲ـ ثابت کنید

$$\text{(i)}\ \ \mathcal{F}\{\sin x^۲\} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos\left[\frac{\alpha^۲+\pi}{۴}\right],$$
$$\text{(ii)}\ \ \mathcal{F}\{\cos x^۲\} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin\left[\frac{\alpha^۲+\pi}{۴}\right].$$

حل: داریم

$$\mathcal{F}\{e^{-ax^۲}\} = \frac{۱}{\sqrt{۲a}} e^{-\alpha^۲/۴a}$$

که اگر $a = i$ انتخاب شود، در این‌صورت

$$\mathcal{F}\{e^{-ix^۲}\} = \frac{۱}{\sqrt{۲i}} e^{-\alpha^۲/۴i} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} (i)^{-\frac{۱}{۲}} e^{i\alpha^۲/۴}$$

اما

$$\begin{aligned} e^{-ix^۲} &= \cos x^۲ - i \sin x^۲ \\ e^{i\alpha^۲/۴} &= \cos \frac{\alpha^۲}{۴} + i \sin \frac{\alpha^۲}{۴} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (i)^{-\frac{۱}{۲}} &= \left[\cos\left(۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\right) + i \sin\left(۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\right)\right]^{\frac{۱}{۲}} \\ &= \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{۴}\right) - i \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{۴}\right) \quad , \quad k = ۰, ۱ \end{aligned}$$

برای $k = ۰$ می‌گیریم $(i)^{-\frac{۱}{۲}} = \cos \frac{\pi}{۴} - i \sin \frac{\pi}{۴}$، در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{-ix^۲}\} = \cos x^۲ - i \sin x^۲ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \left(\cos \frac{\pi}{۴} - i \sin \frac{\pi}{۴}\right) \left(\cos \frac{\alpha^۲}{۴} + i \sin \frac{\alpha^۲}{۴}\right) \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \left[\left(\cos \frac{\pi}{۴} \cos \frac{\alpha^۲}{۴} + \sin \frac{\pi}{۴} \sin \frac{\alpha^۲}{۴}\right)\right. \\ &\quad \left. + i \left(\cos \frac{\pi}{۴} \sin \frac{\alpha^۲}{۴} - \cos \frac{\alpha^۲}{۴} \sin \frac{\pi}{۴}\right)\right] \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \left[\cos\left(\frac{\alpha^۲ - \pi}{۴}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha^۲ - \pi}{۴}\right)\right] \end{aligned}$$

که با مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos x^۲\} &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \cos\left(\frac{\alpha^۲ - \pi}{۴}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \sin\left(\frac{\alpha^۲ + \pi}{۴}\right) \\ \mathcal{F}\{\sin x^۲\} &= -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \sin\left(\frac{\alpha^۲ - \pi}{۴}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \cos\left(\frac{\alpha^۲ + \pi}{۴}\right) \end{aligned}$$

اگر $k = ۱$ اختیار شود نتایج قرینه نتایج بالا خواهند بود پس صورت مسئله برای $k = ۰$ مورد نظر است که در شاخه اصلی است.

۱۳ـ تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \pi \\ \circ, & |x| > \pi \end{cases}$ را بنویسید و با استفاده از آن نشان دهید که

$$\int_\circ^\infty \frac{x \sin \pi x \cos \alpha x dx}{x^\text{۲} - \text{۱}} = \begin{cases} \circ, & |\alpha| < \pi \\ -\frac{\pi}{\text{۴}}, & |\alpha| = \pi \\ \frac{\pi}{\text{۲}}, & |\alpha| < \pi \end{cases}.$$

حل: تابع داده شده تابعی زوج است در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\} &= \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}} \int_\circ^\infty f(t) \cos \alpha t dt = \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}} \cos t \alpha t dt \\ &= \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}} \int_\circ^\pi [\cos(\alpha - \text{۱})t + \cos(\alpha + \text{۱})t] dt \\ &= \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}} \left[\frac{\sin(\alpha - \text{۱})t}{\alpha - \text{۱}} + \frac{\sin(\alpha + \text{۱})}{\alpha + \text{۱}} \right]_\circ^\pi = -\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}} \frac{\alpha \sin \alpha \pi}{\alpha^\text{۲} - \text{۱}} \end{aligned}$$

که از آن

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-\text{۱}} \left\{ -\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}} \frac{\alpha \sin \alpha \pi}{\alpha^\text{۲} - \text{۱}} \right\} \\ &= -\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}} \int_\circ^\infty \frac{\alpha \sin \alpha \pi}{\alpha^\text{۲} - \text{۱}} \cos \alpha x d\alpha \\ &= -\frac{\text{۲}}{\pi} \int_\circ^\pi \frac{\alpha \sin \alpha \pi \cos \alpha x}{\alpha^\text{۲} - \text{۱}} d\alpha \end{aligned}$$

حال اگر جای α را با x عوض کنیم می‌گیریم

$$\begin{aligned} &\int_\circ^\infty \frac{x \sin \pi x \cos \alpha x dx}{x^\text{۲} - \text{۱}} = -\frac{\pi}{\text{۲}} f(\alpha) \\ &= -\frac{\pi}{\text{۲}} \begin{cases} \cos \alpha & , |\alpha| < \pi \\ \circ & , |\alpha| > \pi \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\pi}{\text{۲}} \cos \alpha & , |\alpha| < \pi \\ \circ & , |\alpha| > \pi \end{cases} \end{aligned}$$

در $\alpha = \pm\pi$ چون تابع ناپیوسته است حاصل برابر میانگین حد چپ و راست است که برابر است با $-\frac{\text{۱}}{\text{۲}} = \frac{\cos(\pm\pi) + \circ}{\text{۲}}$. در نتیجه

$$\int_\circ^\infty \frac{x \sin \pi x \cos \alpha x}{x^\text{۲} - \text{۱}} dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{\text{۲}} \cos \alpha, & |\alpha| < \pi \\ \circ, & |\alpha| > \pi \\ \frac{\pi}{\text{۴}}, & |\alpha| = \pi \end{cases}$$

۱۴ـ تابع تک پالس یا تابع دیراک که با نماد $\delta(t)$ نمایش داده می‌شود تابعی با ویژگیهای زیر است

$$\text{(i)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)dt=۱\ ,\quad \text{(ii)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)f(t)dt=f(a),$$

جایی که $f(t)$ تابعی پیوسته است. تبدیل فوریه این تابع را بدست آورید.

حل: تابع دیراک به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta(t)=\begin{cases}\frac{۱}{\varepsilon}, & ۰\le t\le\varepsilon\\ ۰, & t>\varepsilon\end{cases}.$$

تبدیل فوریه این تابع چنین می‌شود

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i\alpha t}dt=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\varepsilon}\frac{۱}{\varepsilon}e^{-i\alpha t}dt$$
$$=\frac{-۱}{i\alpha\varepsilon\sqrt{۴\pi}}e^{-i\alpha t}|_{۰}^{\varepsilon}=\frac{-۱}{i\alpha\varepsilon\sqrt{۲\pi}}(e^{-i\alpha\varepsilon}-۱)=\frac{i(e^{-i\alpha\varepsilon}-۱)}{\alpha\varepsilon\sqrt{۲\pi}}$$

بدیهی است که $\lim\limits_{\varepsilon\to ۰^+}\mathcal{F}\{\sigma(t)\}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}$.

۱۵ـ مسئله زیر را حل کنید.

$$u_t+u_{xx}=\delta(x)\delta(t)$$
$$u(x,۰)=\delta(x)$$
$$\lim_{|x|\to\infty}u(x,t)=۰.$$

حل: از طرفین نسبت به x تبدیل فوریه می‌گیریم. خواهیم داشت

$$\mathcal{F}\{u_t\}+\mathcal{F}\{u_{xx}\}=\mathcal{F}\{\delta(x)\delta(t)\}$$
$$U_t+\alpha^۲U=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\delta(t)$$

اگر از تساوی $u(x,۰)=\delta(x)$ هم تبدیل فوریه بگیریم، نتیجه چنین می‌شود

$$U(\alpha,۰)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}$$

بدیهی است که از شرط $\lim\limits_{|x|\to۰}u(x,t)=۰$ می‌توان با تبدیل فوریه گرفتن از طرفین تساوی به رابطه $\lim\limits_{|\alpha|\to\infty}|U(\alpha,۰)|=۰$ رسید.

اول معادله مرتبه یک برحسب $U(t)$ را حل می‌کنیم. با انتخاب عامل انتگرال ساز یعنی $F = e^{\alpha^۲ t}$ و ضرب آن در طرفین معادله و سپس انتگرال گیری از رابطه بدست آمده خواهیم داشت

$$U(\alpha, t) = f(\alpha)e^{-\alpha^۲ t} + \int \frac{e^{-\alpha^۲ t}}{\sqrt{۲\pi}} e^{\alpha^۲ t}\delta(t)dt$$

توجه شود چون U برحسب α و t است پس بجای ثابت c تابع $f(\alpha)$ نوشتیم. حال شرایط داده شده را اعمال می‌کنیم. داریم

$$U(\alpha, ۰) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \to \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} = f(\alpha) + \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int e^{\alpha^۲ t}\delta(t)dt$$

که از آن $f(\alpha) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} - \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int e^{\alpha^۲ t}\delta(t)dt$ به این ترتیب

$$U(\alpha, t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\alpha^۲ t}$$

که شرط $\lim_{|\alpha \to \infty|} |U(\alpha, t)| = ۰$ را در بر دارد. حال از طرفین تبدیل معکوس می‌گیریم تا $u(x, t)$ مشخص شود. یعنی

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-۱}\{U\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \mathcal{F}^{-۱}\{e^{-\alpha^۲ t}\} = \frac{۱}{۲\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^۲}{۴t}}.$$

۱۶ـ معادله لاپلاس را برای $y > ۰$، $|x| < \infty$ و با شرط $u(x, ۰) = f(x)$ حل کنید با این شرط که u و $\frac{\partial u}{\partial x}$ بسمت صفر میل می‌کنند وقتی $|x| \to \infty$.

حل: معادله زیر مورد نظر است

$$u_{xx} + u_{yy} = ۰ \quad , \quad y > ۰, \quad |x| < \infty$$

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x, y) = \lim_{|x| \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

$$u(x, ۰) = f(x).$$

حل: از طرفین معادله لاپلاس تبدیل فوریه می‌گیریم. خواهیم داشت

$$U_{yy} - \alpha^۲ U = ۰$$

که از آن $U(\alpha, y) = A(\alpha)e^{\alpha y} + B(\alpha)e^{-\alpha y}$.

توجه شود که تبدیل فوریه برحسب x صورت گرفته است. چون U باید کراندار باشد وقتی $y \to \infty$ در نتیجه $A = ۰$ باید باشد پس

$$U(\alpha, y) = B(\alpha)e^{\alpha y}$$

از طرفی از شرط $u(x,\circ) = f(x)$ می‌گیریم $U(\alpha,\circ) = F(\alpha)$ در نتیجه

$B(\alpha) = U(\alpha,\circ) = F(\alpha)$ که $F(\alpha)$ تبدیل فوریه $f(x)$ است. به این ترتیب

$$U(\alpha,y) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-|\alpha|y}e^{-i\alpha t}dt$$

حال از طرفین تبدیل معکوس می‌گیریم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha,y)e^{i\alpha x}d\alpha \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} = \{\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)e^{-|\alpha|y}e^{-i\alpha t}]dt\}e^{i\alpha x}d\alpha \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-t)-|\alpha|y}d\alpha \end{aligned}$$

از آنجائیکه

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-t)-|\alpha|y}d\alpha = \frac{۲y}{(x-t)^۲+y^۲}$$

در نتیجه

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(x-t)^۲+y^۲}.$$

۱۷ـ معادله تمرین ۱۶ را با این شرط حل کنید که $u_y(x,\circ) = f(x)$ بجای شرط $u(x,\circ) = f(x)$ قرار گیرد.

حل: فرض می‌کنیم $u_y(x,y) = z(x,y)$ در نتیجه $(u_y)_{yy} = (z)_{yy}$ و $(u_y)_{xx} = (z)_{xx}$ یعنی

$$(u_y)_{yy} + (u_y)_{xx} = z_{yy} + z_{xx}$$

پس

$$z_{xx} + z_{yy} = (u_{xx})_y + (u_{yy})_y = (u_{xx}+u_{yy})_y = \circ$$

زیرا $u_{xx}+u_{yy} = \circ$ پس معادله لاپلاس زیر را خواهیم داشت

$$z_{xx} + z_{yy} = \circ$$

از فرض $z(x,y) = u_y(x,y)$ می‌گیریم $z(x,\circ) = u_y(x,\circ) = f(x)$ پس معادله بالا تبدیل می‌شود به

$$z_{xx} + z_{yy} = \circ$$
$$z(x,\circ) = f(x)$$

که همان تمرین قبلی است و از حل آن می‌گیریم

$$z(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{2}+y^{2}}.$$

چون جواب $u(x,y)$ مورد نظر است کافی است از رابطه $u_y(x,y)=z(x,y)$ بر حساب y انتگرال گیری نمائیم. می‌گیریم

$$u(x,y)=\int_{0}^{y}z(x,y)dy+F(x)$$

که از آن $F(x)=u(x,0)$ پس

$$u(x,y)=\int_{0}^{y}[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{2}+s^{2}}]ds+u(x,0)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\ln\frac{(x-t)^{2}+y^{2}}{(x-t)^{2}}dt+u(x,0).$$

۱۸ـ با استفاده از تبدیل فوریه برای معادله $u''-k^{2}u=f(x)$ با این شرط که u و u' به سمت صفر میل می‌کنند وقتی که $|x|\to\infty$ نشان دهید

$$u(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-k|x-t|}dt.$$

حل: از طرفین معادله داده شده تبدیل فوریه می‌گیریم. خواهیم داشت

$$-\alpha^{2}U-k^{2}U=F(\alpha)$$

که U تبدیل فوریه u و F تبدیل فوریه f است. از این رابطه می‌گیریم

$$U(\alpha)=-\frac{F(\alpha)}{\alpha^{2}+k^{2}}$$

از طرفین تبدیل معکوس می‌گیریم. نتیجه چنین می‌شود

$$u(x)=-\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F(\alpha)}{\alpha^{2}+k^{2}}\right\}$$

حال اگر از قضیه کنولوشن استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$u(x)=-\mathcal{F}^{-1}\{f(\alpha)\}-\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\alpha^{2}+k^{2}}\right\}=-\frac{f(\alpha)}{\sqrt{2\pi}}-\frac{\sqrt{2\pi}}{2k}e^{-k|x|}$$
$$=-\frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-k|x-t|}dt.$$

۱۹ـ معادله $u'''' + u = w(x)$ را با استفاده از تبدیل فوریه بررسی کرده و نتیجه گیری نمائید که

$$u(x) = \sqrt{\frac{\pi}{۲}}\int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{\frac{-|x-t|}{\sqrt{۲}}}\sin\left[\frac{|x-t|}{\sqrt{۲}} + \frac{\pi}{۴}\right]dt.$$

حل: از طرفین معادله داده شده تبدیل فوریه می‌گیریم خواهیم داشت

$$(i\alpha)^{۴}U + U = W(\alpha)$$

که $W(\alpha)$ تبدیل فوریه $w(\alpha)$ و U تبدیل فوریه u است. از این معادله می‌گیریم

$$U = \frac{W(\alpha)}{\alpha^{۴}+۱}$$

بنابراین

$$u(x) = \mathcal{F}^{-۱}\left\{\frac{W(\alpha)}{\alpha^{۴}+۱}\right\}$$

چون جواب مسئله برحسب $w(x)$ است برای سمت راست تساوی از قضیه کنولوشن استفاده می‌کنیم. داریم

$$u(x) = \mathcal{F}^{-۱}\left\{\frac{W(\alpha)}{\alpha^{۴}+۱}\right\} = \mathcal{F}^{-۱}\{W(\alpha)\} \star \mathcal{F}^{-۱}\left\{\frac{۱}{\alpha^{۴}+۱}\right\}$$

$$= \mathcal{F}^{-۱}\{W\} \star \sqrt{\frac{\pi}{۲}}e^{-x\sqrt{\frac{۲}{۲}}}\sin\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x + \frac{\pi}{۴}\right)$$

زیرا می‌توان با استفاده از انتگرال مختلط درستی

$$\mathcal{F}^{-۱}\left\{\frac{۱}{\alpha^{۴}+۱}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{۲}}e^{-x\sqrt{\frac{۲}{۲}}}\sin\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x + \frac{\pi}{۴}\right)$$

را ثابت نمود. در نتیجه با استفاده از تمرین قبلی

$$u(x) = \sqrt{\frac{\pi}{۲}}\int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{\frac{-|x-t|}{\sqrt{۲}}}\sin\left(\frac{|x-t|}{\sqrt{۲}} + \frac{\pi}{۴}\right)dt.$$

توجه شود بخاطر فاصله $(-\infty,\infty)$ از علامت قدر مطلق استفاده شده است تا همگرایی موجود باشد.

۲۰ـ معادله لاپلاس را با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی برای ناحیه $x > ۰$، $y > ۰$ با این شرط که $u \to ۰$ وقتی $x \to \infty$ و $y \to \infty$ بعلاوه $u_x(۰,y) = ۰$، $u(x,۰) = e^{-x}$ برحسب x بررسی کنید.

حل: از طرفین معادله نسبت به x تبدیل فوریه کسینوسی می‌گیریم. خواهیم داشت،

$$-\alpha^{۲}U_c + (U_c)_{yy} = ۰$$

زیرا

$$\mathcal{F}_c\{u_{xx}\} = -\sqrt{\frac{۲}{\pi}}u_x(\circ, y) - \alpha^۲ U_c = -\alpha^۲ U_c$$

و $\mathcal{F}_c\{u_{yy}\} = (U_c)_{yy}$. همچنین چون $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = \circ$ در نتیجه $\lim_{y\to\infty} U_c(\alpha, y) = \circ$. بعلاوه

$$U_c(\alpha, \circ) = \mathcal{F}\{u(x, \circ)\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_\circ^\infty e^{-t}\cos\alpha t dt = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{۱}{\alpha^۲ + ۱}$$

پس باید معادله

$$(U_c)_{yy} - \alpha^۲ U_c = \circ$$

$$\lim_{y\to\infty} U_c(\alpha, y) = \circ$$

$$U_c(\alpha, \circ) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{۱}{\alpha^۲ + ۱}$$

را حل کنیم.

جواب عمومی عبارت است از

$$U_c = A(\alpha)e^{\alpha y} + B(\alpha)e^{-\alpha u}$$

شرط اول ایجاب می‌کند که $A(\alpha) = \circ$. بنابراین

$$U_c = B(\alpha)e^{-\alpha y}$$

از شرط دوم می‌گیریم

$$U_c(\alpha, \circ) = B(\alpha) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{۱}{\alpha^۲ + ۱}$$

به این ترتیب

$$U_c(\alpha, y) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{e^{-\alpha y}}{\alpha^۲ + ۱}$$

حال کافی است از طرفین تبدیل فوریه کسینوسی معکوس بگیریم. خواهیم داشت

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-۱}(U_c(\alpha, y)) = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\infty \frac{\cos\alpha x . e^{-\alpha y}}{\alpha^۲ + ۱}d\alpha.$$

پاسخ آزمونهای چهار جوابی ۸

۱. کدامیک از شرایط زیر برای قضیه انتگرال فوریه بکار می‌رود؟

الف) f در هر فاصله $(-l,l)$ تکه‌ای ـ هموار باشد

ب) f در $(-\infty,\infty)$ تکه‌ای ـ هموار باشد

ج) هر دو

د) هیچکدام

حل: پاسخ (ج) درست است. به متن درس مراجعه شود

۲. حاصل $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ برابر است با

الف) $\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{\pi}{3}$ ج) $\frac{\pi}{4}$ د) π

حل: پاسخ (الف) درست است. تمرین ۱۸ از فصل (۵) را ببینید

۳. تبدیل فوریه کسینوسی تابع نمایی e^{-x} عبارت است از

الف) $\frac{\pi}{1+\alpha^2}$ ب) $\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}}$ ج) $\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{2\pi}}$ د) $\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\alpha^2+1}$

حل: داریم

$$\mathcal{F}_c\{e^{-x}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}\cos\alpha t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha^2+1}$$

پس جواب (د) درست است.

۴. تبدیل فوریه کسینوسی مشتق تابع f کدام است؟

الف) $\mathcal{F}_c\{f\}$ ب) $\alpha^2\mathcal{F}_c\{f\}$ ج) $-\alpha\mathcal{F}_c\{f\}$ د) $\frac{1}{\alpha}\mathcal{F}_c\{f\}$

حل: داریم

$$\mathcal{F}_c\{f'\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(t)\sin\alpha t dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(f(t)\sin\alpha t|_0^\infty - \alpha\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t dt\right)$$

$$= -\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha t dt\right) = -\alpha\mathcal{F}_c\{f\}$$

پس گزینه (ج) صحیح است.

۵. تبدیل فوریه مشتق دوم تابع f عبارت است از

الف) $-\alpha^2\mathcal{F}\{f\}$ ب) $\alpha\mathcal{F}\{f\}$ ج) $\frac{1}{\alpha}\mathcal{F}\{f\}$ د) $i\alpha\mathcal{F}\{f\}$

حل: با توجه به متن گزینه (الف) درست است

۶. تبدل فوریه کدامیک از توابع زیر وجود ندارد؟

الف) $f(x) = e^{-x}$ ب) $f(x) = e^{۲x}$ ج) هر دو د) $\cos x^۲$

حل: در متن گفته شد که تبدیل فوریه عدد ثابت و تابع e^x موجود نیست پس گزینه (ب) درست است.

۷. کدامیک از توابع زیر تابع هوی‌ساید است؟

الف) $f(x) = \begin{cases} ۱, & x > ۰ \\ -x, & x < ۰ \end{cases}$ ب) $f(x) = \begin{cases} ۱, & x \geq ۰ \\ ۰, & x < ۰ \end{cases}$

ج) $f(x) = \begin{cases} ۱, & x \geq ۰ \\ -۱, x < ۰ \end{cases}$ د) $f(x) = \begin{cases} ۰, & x \geq ۰ \\ -۱, & x < ۰ \end{cases}$

حل: با مراجعه به متن گزینه (ب) درست است.

۸. ضرایب فوریه برای تابع $f(x) = \begin{cases} ۱, & |x| < ۱ \\ ۰, & |x| > ۱ \end{cases}$ عبارتند از

الف) $۰, \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ب) $۰, \frac{\pi}{\alpha}$ ج) $\frac{\sin \alpha\pi}{\alpha}, \frac{\cos \alpha\pi}{\alpha}$ د) $۰, \frac{۲\sin \alpha\pi}{\pi\alpha}$

حل: چون تابع فرد است پس $A(\alpha) = ۰$ و

$$B(\alpha) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty f(t)\sin \alpha t dt = \frac{۲}{\pi}\int_۰^۱ \sin \alpha t dt = -\frac{۲}{\pi\alpha}\cos \alpha^۲|_۰^۱$$
$$= \frac{۲}{\pi\alpha}(۱ - \cos \alpha)$$

پس هیچکدام از جوابها درست نیست.

۹. کدام گزاره درست است؟ انتگرال فوریه را وقتی بجای سری فوریه بکار می‌بریم که:

الف)زمان یا فاصله تناوب بی‌نهایت شود ب) تابع $f(x)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد

ج) تابع $f(x)$ تابع خطای مکمل باشد د) تابع $f(x)$ در $(-l, l)$ بی‌نهایت شود.

حل: با مراجعه به متن براحتی می‌توان دریافت که گزینه (الف) صحیح است.

۱۰. اگر $f(x)$ تابعی زوج یا فرد باشد آنگاه ضرایب انتگرال فوریه

الف)صفر می‌شوند ب) یکی از آنها صفر می‌شود

ج) یکی مضربی از دیگری می‌شود د) برابر میانگین $f(x)$ در نقطه ناپیوسته می‌شود.

حل: بدیهی است اگر $f(x)$ زوج یا فرد باشد در سری یا انتگرال فوریه یکی ازضرایب صفر می‌شود پس گزینه (ب) درست است.

حل تمرین‌های خودآزمایی ۹

۱ـ نشان دهید توابع $\frac{۱}{\sqrt{t}}e^{\frac{-x^۲}{۴t}}$ و $\int_{\frac{x}{۲\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^۲}ds$ جواب معادله $u_t = u_{xx}$ هستند.

حل: با فرض $u = \frac{۱}{\sqrt{t}}e^{\frac{-x^۲}{۴t}}$ می‌گیریم

$$u_t = -\frac{۱}{۲t\sqrt{t}}e^{\frac{-x^۲}{۴t}} + \frac{x^۲}{۴t^۲\sqrt{t}}e^{\frac{-x^۲}{۴t}} = \frac{۱}{۲t\sqrt{t}}\left(\frac{x^۲}{۲t} - ۱\right)e^{\frac{-x^۲}{۴t}}$$

$$u_x = \frac{-xe^{\frac{-x^۲}{۴t}}}{۲t\sqrt{t}} \rightarrow u_{xx} = \frac{۱}{۲t\sqrt{t}}\left(-۱ + \frac{x^۲}{۲t}\right)e^{\frac{-x^۲}{۴t}}$$

با جاگذاری در معادله داده شده درستی تساوی $u_t = u_{xx}$ معلوم می‌شود.
برای تابع دوم باز فرض می‌کنیم $u = \int_{\frac{x}{۲\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^۲}ds$. از آنجائیکه داریم

$$\left(\int_{u_۱}^{u_۲} f(x)dx\right)' = u'_۲f(u_۲) - u'_۱f(u_۱)$$

بنابراین

$$u_t = \frac{xe^{\frac{-x^۲}{۴t}}}{۴t\sqrt{t}}$$

$$u_x = -\frac{۱}{۲\sqrt{t}} e^{\frac{-x^۲}{۴t}} \to u_{xx} = \frac{xe^{\frac{-x^۲}{۴t}}}{۴t\sqrt{t}}.$$

مجدداً با جاگذاری u_t و u_{xx} در معادله درستی تساوی داده شده تائید می‌شوند.

۲ـ با فرض $x = e^r \cos\theta$ و $y = e^r \sin\theta$ نشان دهید معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ به معادله $u_{rr} + u_{\theta\theta} = ۰$ تبدیل می‌شود.

حل: با استفاده از مشتق‌های زنجیره‌ای داریم

$$u_x = u_r u_x + u_\theta \theta_x$$

امّا $r = \ln\sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $\theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x}$ در نتیجه $r_x = e^{-r}\cos\theta$ و $\theta_x = e^{-r}\sin\theta$ یعنی

$$u_x = e^{-r}(u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta)$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x r_x + (u_x)_\theta \theta_x \\ &= [e^{-r}(\cos\theta - u_\theta \sin\theta)]_r e^{-r}\cos\theta - [e^{-r}(u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta)]_\theta e^{-r}\sin\theta \\ &= e^{-۲r}(\cos^۲\theta - \cos ۲\theta u_r + \sin ۲\theta u_\theta - \sin ۲\theta u_{r\theta} + \sin^۲\theta u_{\theta\theta}) \end{aligned}$$

بطریقی مشابه می‌توان نشان داد (یا حدس زد) که

$$u_{yy} = e^{-۲r}(\sin^۲\theta u_{rr} + \cos ۲\theta u_r - \sin ۲\theta u_\theta + \sin ۲\theta u_{r\theta} + \sin^۲\theta u_{\theta\theta})$$

از جمع این دو معادله، تساوی مورد نظر بدست می‌آید.

۳ـ معادلات زیر را حل کنید

$$\text{(i)}\ \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + u = ۰ \quad , \quad \text{(ii)}\ u_{xx} + u_x = ۰$$
$$\text{(iii)}\ u_{xxx} + ۱ = ۰ \quad , \quad \text{(iv)}\ u_{xy} - u_y = ۱$$

حل: در تمام معادلات داده شده فرض بر این باشد که $u = u(x,y)$ در این صورت در (i) می‌توانیم از $u = XY$ استفاده کنیم یا مستقیماً بنویسیم

$$m^۲ + ۱ = ۰ \to m = \pm i \to u(x,y) = f_۱(y)\cos x + f_۲(y)\sin x$$

(ii) فرض می‌کنیم $u_x = P$ در نتیجه معادله داده شده تبدیل می‌شود به

$$P_x + P = ۰$$

که از حل آن $P = f_۱(y)e^{-x}$. حال قرار دهید $P = u_x$ و از طرفین معادله حاصل یعنی $u_x = f_۱(y)e^{-x}$ برحسب x انتگرال بگیرید. خواهیم داشت

$$u(x,y) = -e^{-x}f_۱(y) + f_۲(y).$$

(iii) می‌نویسیم $u_{xxx} = -۱$ و سه بار متوالی برحسب x انتگرال می‌گیریم. نتیجه چنین می‌شود

$$u(x,y) = -\frac{x^۳}{۶} + \frac{x^۲}{۲}f_۱(y) + xf_۲(y) + f_۳(y)$$

(iv) همانند (ii) عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $u_y = P$. در نتیجه معادله $P_x - P = ۱$ را خواهیم داشت که یک معادله مرتبه یک خطی است. از حل آن می‌گیریم

$$P = e^x f_۱(y) - ۱$$

حال قرار دهید $P = u_y$ یعنی

$$u_y = e^x f_۱(y) - ۱$$

و از طرفین برحسب y انتگرال بگیرید. نتیجه چنین می‌شود

$$u(x,y) = e^x F_۱(y) - y + F_۲(x).$$

۴ـ معادله پخش گرما را برای یک میله نامتناهی با شرط اولیه $u(x,\circ) = e^{-x^۲}$ حل کنید. (ثابت فیزیکی را یک انتخاب کنید).

حل: باید معادله زیر را حل کنیم

$$u_t = u_{xx} \quad , |x| < \infty$$
$$u(x,\circ) = e^{-x^۲}$$

از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم، خواهیم داشت

$$U_t = -\alpha^۲ U$$

از طرفی $\mathcal{F}\{e^{-x^۲}\} = \frac{e^{\frac{-\alpha^۲}{۴}}}{\sqrt{۲}}$. در نتیجه $U(\alpha,\circ) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}e^{\frac{-\alpha^۲}{۴}}$.

از حل معادله حاصل می‌گیریم $U(\alpha,t) = c(\alpha)e^{\frac{-\alpha^۲}{۴}}$. شرط $U(\alpha,\circ) = \frac{e^{\frac{-\alpha^۲}{۴}}}{\sqrt{۲}}$ می‌دهد

$U(\alpha,t)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}e^{-\left(t+\frac{۱}{۴}\right)\alpha^۲}$. حال از طرفین تبدیل فوریه معکوس می‌گیریم. خواهیم داشت

$$u(x,t)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathcal{F}^{-۱}\{e^{-\left(t+\frac{۱}{۴}\right)\alpha^۲}\}=\frac{\mathcal{F}^{-۱}}{\sqrt{۲}}\{e^{-\alpha^۲\frac{(۱+۴t)}{۴}}\}$$
$$=\frac{e^{\frac{-x^۲}{(۴t+۱)}}}{\sqrt{۴t+۱}}$$

توجه شود که حل این تمرین در بخش ۸ـ۴ کتاب هم آمده است.

۵ـ دمای حالت دائمی از یک تیغه مستطیل شکل به طول دو و به عرض یک را طوری مشخص کنید که سه ضلع آن در دمای صفر و ضلع آخری در دمای $\sin\pi y$ (یعنی $u(۲,y)=\sin\pi y$) قرار دارد.

حل: همانند مثال حل شده کتاب است با این تفاوت که $u(۲,y)=\sin\pi y$ بجای فرض $u(x,۱)=k$ آمده است پس حل معادله زیر مورد نظر است

$$u_{xx}+u_{yy}=۰,\quad ۰<x<۲,\quad ۰<y<۱$$
$$u(x,۰)=u(x,۱)=u(۰,y)=۰$$
$$u(۲,y)=\sin\pi y$$

می‌نویسیم $u=XY$ در نتیجه $u_{xx}=X''Y$ و $u_{yy}=XY''$ یعنی

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda^۲$$

در اینجا بجای $-\lambda^۲$ مقدار $\lambda^۲$ درج شده است تا در محاسبه ضرایب فوریه به مشکل برخورد نکنیم. در نتیجه

$$X''-\lambda^۲X=۰\rightarrow X=A_۱ch\lambda x+B_۱sh\lambda x$$
$$Y''+\lambda^۲Y=۰\rightarrow Y=A_۲\cos\lambda y+B_۲\sin\lambda y$$

با اعمال شرایط داده شده خواهیم داشت

$$u(x,y)=\sum_{۱}^{\infty}b_n sh۲n\pi x\sin n\pi y$$

حال شرایط آخر را بکار می‌بریم. می‌گیریم

$$u(۲,y)=\sin\pi y=\sum_{۱}^{\infty}b_n sh۲n\pi\sin n\pi y$$

در نتیجه

$$b_n = \frac{۲}{sh۲n\pi}\int_۰^۱ \sin\pi y \sin n\pi y dy = \frac{۱}{sh۲\pi n}\int_۰^۱ [\cos(۱-n)\pi y - \cos(۱+n)\pi y]dy$$
$$= \frac{۱}{sh۲\pi n}\left[\frac{\sin(۱-n)\pi y}{۱-n} - \frac{\sin(۱+n)\pi y}{۱+n}\right]_۰^۱ = ۰$$

امّا b_n در $n = ۱$ تعریف نمی‌شود پس جداگانه $b_۱$ را بدست می‌آوریم. داریم

$$b_۱ = \frac{۲}{sh۲\pi}\int_۰^۱ \sin^۲ \pi y dy = \frac{۱}{sh۲\pi}\int_۰^۱ (۱-\cos ۲\pi y)dy = \frac{۱}{sh۲\pi}$$

در نتیجه

$$u(x,y) = \frac{sh۲\pi x \sin\pi y}{sh۲\pi}$$

۶ـ معادله زیر را با شرایط داده شده آن حل کنید

$$\frac{\partial^۲ x}{\partial t^۲} + \frac{\partial^۴ u}{\partial x^۴} = ۰ \quad , \quad -\infty < x < \infty \; , \; t > ۰$$
$$u(x,۰) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,۰) = ۰,$$

حل: با فرض $u = XT$ می‌گیریم $\frac{\partial^۴ u}{\partial x^۴} = \overset{(۴)}{X}T$ و $\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = XT''$ در نتیجه

$$XT'' + \overset{(۴)}{X}T = ۰ \Rightarrow \frac{T''}{T} = -\frac{\overset{(۴)}{X}}{X} = \lambda^۲$$

که از این دستگاه داریم

$$T'' + \lambda T = ۰ \rightarrow T = A_۱ \cos\lambda t + B_۱ \sin\lambda t$$
$$\overset{(۴)}{X} - \lambda^۲ X = ۰ \rightarrow A_۲ \cos\sqrt{\lambda}x + B_۲ \sin\sqrt{\lambda}x + A_۴ ch\sqrt{\lambda}x + B_۴ sh\sqrt{\lambda}x = ۰$$

چون u کراندار است وقتی $|x| \rightarrow \infty$ در نتیجه $A_۴ = B_۴ = ۰$ یعنی

$$u = (A_۱ \cos\lambda t + B_۱ \sin\lambda t)(A_۲ \cos\sqrt{\lambda}x + B_۲ \sin\sqrt{\lambda}x)$$

شرط $\frac{\partial u}{\partial t}(x,۰) = ۰$ منجر به $B_۱ = ۰$ می‌شود به این ترتیب

$$u = (A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x)\cos\lambda t$$

که $A = A_۱A_۲$ و $B = A_۱B_۲$. چون $|x| < \infty$ در نتیجه بجای سری فوریه، انتگرال فوریه را خواهیم داشت یعنی

$$u(x,t) = \int_۰^\infty (A(\lambda)\cos\sqrt{\lambda x} + B(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x)\cos\lambda t d\lambda$$

حال شرط $u(x,\circ)=f(x)$ را بکار می‌بریم. خواهیم داشت

$$f(x)=\int_\circ^\infty (A(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x+B(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x)d\lambda$$

که از آن

$$A(\lambda)=\frac{\text{۱}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\sqrt{\lambda}x dx$$
$$B(\lambda)=\frac{\text{۱}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\sqrt{\lambda}x dx$$

با معلوم بودن تابع $f(x)$ می‌توان $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ و آنگاه $u(x,t)$ را مشخص نمود

۷ـ جواب معادله زیر را بدست آورید

$$\frac{\partial^\text{۲} u}{\partial t^\text{۲}}=\frac{\partial^\text{۲} u}{\partial x^\text{۲}}+\text{۶}\quad,\quad \circ<x<\text{۱},t>\circ$$
$$u(\circ,t)=u(\text{۱},t)=u(x,\circ)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,\circ)=\circ,$$

حل: با توجه به مثال ۱۹ درکتاب می‌توانیم جواب $u(x,t)$ را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$u(x,t)=\sum_\text{۱}^\infty T_n\sin n\pi x$$

با محاسبه $\frac{\partial^\text{۲} u}{\partial t^\text{۲}}$ و $\frac{\partial^\text{۲} u}{\partial x^\text{۲}}$ و سپس جاگذاری در معادله، خواهیم داشت

$$\sum_\text{۱}^\infty [T_n''+n^\text{۲}\pi^\text{۲}T_n]\sin n\pi x=\text{۶}$$

که با نوشتن سری فوریه سینوسی $f(x)=\text{۶}$ می‌توانیم بنویسیم

$$T_n''+n^\text{۲}\pi^\text{۲}T_n=\text{۱۲}\int_\circ^\text{۱}\sin n\pi x dx=\frac{\text{۱۲}}{n\pi}(\text{۱}-\cos n\pi)=$$
$$\begin{cases}\frac{\text{۲۴}}{n\pi}, & n \text{ های فرد}\\ \circ, & n \text{ های زوج}\end{cases}$$

از حل این معادله می‌گیریم

$$T_n=A_n\cos n\pi t+B_n\sin n\pi t+\frac{\text{۲۴}}{n^\text{۳}\pi^\text{۳}}$$

توجه شود که جواب خصوصی معادله مرتبه دو $ay''+by'+cy=k$ که k عدد ثابتی است برابر است با $\frac{k}{c}$. بهمین علت جواب خصوصی این معادله $\frac{\text{۲۴}}{n^\text{۳}\pi^\text{۳}}$ می‌شود. به این ترتیب

$$u(x,t)=\sum_{n=\text{۱}}^\infty [A_n\cos n\pi t+B_n\sin n\pi t+\frac{\text{۲۴}}{n^\text{۳}\pi^\text{۳}}]\sin n\pi x.$$

اگر از شرط اولیه $u(x,\circ) = \circ$ استفاده کنیم می‌گیریم $A_n = \frac{۲۴}{n^۳\pi^۳}$ و اگر از شرط اولیه $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\circ) = \circ$ استفاده شود نتیجه $B_n = \circ$ حاصل می‌شود. بنابراین

$$u(x,t) = \frac{۲۴}{\pi^۳}\sum_{۱}^{\infty}(\cos n\pi t - ۱)\sin n\pi x.$$

۸ـ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^۲ t}{\partial x^۲} + tu, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > \circ$$
$$u(x,\circ) = f(x) \quad , \quad |u| < M.$$

حل: بخاطر اینکه $|x| < \infty$، از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت

$$U_t = -\alpha^۲ U + tU$$
$$U(\alpha,\circ) = F(\alpha)$$

که $F(\alpha) = \mathcal{F}\{f\}$. از حل معادله داده شده می‌گیریم

$$U(\alpha,t) = C(\alpha).e^{\frac{t^۲}{۲} - \alpha^۲ t}$$

چون $U(\alpha,\circ) = F(\alpha)$ پس $C(\alpha) = F(\alpha)$ در نتیجه

$$U(\alpha,t) = F(\alpha)e^{\frac{t^۲}{۲} - \alpha^۲ t}$$

حال از طرفین تبدیل فوریه معکوس می‌گیریم. خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-۱}\{U\} = \mathcal{F}^{-۱}\{F(\alpha)e^{\frac{t^۲}{۲} - \alpha^۲ t}\} \\ &= \mathcal{F}^{-۱}(F(\alpha)) \star \mathcal{F}^{-۱}\{e^{\frac{t^۲}{۲} - \alpha^۲ t}\} \\ &= f(x) \star \frac{۱}{۲\sqrt{\pi t}} e^{\frac{t^۲}{۲} - \frac{x^۲}{۴t}} = \frac{۱}{۲\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\lambda) e^{\frac{t^۲}{۲} - \frac{\lambda^۲}{۴t}} d\lambda. \end{aligned}$$

با معلوم بودن $f(x)$ تابع $u(x,t)$ مشخص می‌شود.

۹ـ معادله موج را با شرایط داده شده آن حل کنید

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \sinh x, \quad \circ < x < ۱$$
$$u(\circ,t) = ۵, \quad u(۱,t) = ۵$$
$$u(x,\circ) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,\circ) = \circ$$

حل: در این معادله شرایط مرزی همگن نیستند پس جوابی را به صورت $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ برای معادله در نظر می‌گیریم طوری که $v(\circ,t) = \circ$ و $v(\text{۱},t) = \circ$ و $w(x) = ax + b$.

داریم $a = \frac{\text{۱}}{l}(f_\text{۲} - f_\text{۱}) = \text{۵} - \text{۵} = \circ$ و $b = f_\text{۱} = \text{۵}$ در نتیجه $w = \text{۵}$، و معادله داده شده تبدیل می‌شود به

$$\frac{\partial^\text{۲} v}{\partial t^\text{۲}} = \frac{\partial^\text{۲} v}{\partial x^\text{۲}} + \sinh x$$

$$v(\circ,t) = v(\text{۱},t) = \circ$$

$$v(x,\circ) = -\text{۵}$$

حال یک معادله داریم با شرایط همگن اگر چه معادله داده شده غیر همگن است.

جوابی به صورت $v = \sum_\text{۱}^\infty T_n \sin n\pi x$ را امتحان می‌کنیم. با محاسبه $\frac{\partial^\text{۲} v}{\partial x^\text{۲}}$ و $\frac{\partial^\text{۲} v}{\partial t^\text{۲}}$ و جاگذاری در معادله می‌گیریم

$$\sum_\text{۱}^\infty (T_n'' + n^\text{۲}\pi^\text{۲} T_n) \sin n\pi x = \sinh x$$

که از آن

$$\begin{aligned} T_n'' + n^\text{۲}\pi^\text{۲} T_n &= \text{۲}\int_\circ^\text{۱} \sin n\pi x \sinh x dx \\ &= \int_\circ^\text{۱} e^x \sin n\pi x dx - \int_\circ^\text{۱} e^{-x} \sin n\pi x dx \\ &= \frac{(\text{۱} - e\cos n\pi)n\pi}{\text{۱} + n^\text{۲}\pi^\text{۲}} + \frac{(\text{۱} - e^{-\text{۱}}\cos n\pi)}{\text{۱} + n^\text{۲}\pi^\text{۲}} \\ &= \frac{\text{۲}(\text{۱} - \cos n\pi ch\text{۱})n\pi}{\text{۱} + n^\text{۲}\pi^\text{۲}} \end{aligned}$$

در نتیجه جواب عمومی T_n چنین می‌شود

$$T_n = A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t + \frac{\text{۲}(\text{۱} - \cos n\pi ch\text{۱})}{n\pi(\text{۱} + n^\text{۲}\pi^\text{۲})}$$

به این ترتیب

$$v(x,t) = \sum_\text{۱}^\infty \left[A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t + \frac{\text{۲}(\text{۱} - \cos n\pi ch\text{۱})}{n\pi(\text{۱} + n^\text{۲}\pi^\text{۲})}\right] \sin n\pi x$$

اگر از شرط اولیه $\frac{\partial v}{\partial t}(\circ,t) = \circ$ استفاده کنیم، خواهیم داشت $B_n = \circ$. پس

$$v(x,t) = \sum_\text{۱}^\infty \left[A_n \cos n\pi t + \frac{\text{۲}(\text{۱} - \cos n\pi ch\text{۱})}{n\pi(\text{۱} + n^\text{۲}\pi^\text{۲})}\right] \sin n\pi x$$

از شرط $v(x,\circ) = -۵$ می‌گیریم

$$-۵ = \sum_{۱}^{\infty} ۲A_n \frac{(۱-\cos n\pi ch۱)}{n\pi(۱+n^۲\pi^۲)} \sin n\pi x$$

که از آن

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{-۵n\pi(۱+n^۲\pi^۲)}{۲(۱-\cos n\pi ch۱)} \int_\circ^۱ \sin n\pi x dx \\ &= \frac{۵(۱+n^۲\pi^۲)}{۲(۱-\cos n\pi ch۱)} \cos n\pi x|_\circ^۱ = \\ &= \begin{cases} \dfrac{-۵(۱+n^۲\pi^۲)}{۱+ch۱}, & \text{های فرد } n \\ \circ, & \text{های زوج } n \end{cases} \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$v(x,t) = \sum_{۱}^{\infty} \left[\frac{-۵(۱+n^۲\pi^۲)}{۱+ch۱} \cos n\pi t + \frac{۲(۱+ch۱)}{n\pi(۱+n^۲\pi^۲)} \right] \sin n\pi x$$

حال کافی است با استفاده از $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ تابع $u(x,t)$ را مشخص کنیم.

۱۰ـ مسئله زیر را که بنام دریکله است با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^۲ u}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial \theta^۲} = \circ, \quad r < ۱, -\pi < \theta < \pi \\ &u(۱,\theta) = f(\theta), \quad -\pi < \theta < \pi \\ &r(r,-\pi) = u(r,\pi), \frac{\partial u}{\partial \theta}(r-\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi), \quad r < ۱ \end{aligned}$$

حل: با استفاده از مثال ۱۷ کتاب براحتی با نوشتن $u = R\theta$ می‌گیریم

$$\begin{aligned} \Theta &= A_۱ \cos \lambda\theta + B_۱ \sin \lambda\theta \\ R &= A_۲ r^{\lambda} + B_۲ r^{-\lambda} \end{aligned}$$

چون u باید دوره تناوب ۲π داشته باشد پس $\lambda = n$ و از طرفی باید u کراندار باشد پس $B_۲ = \circ$ و تابع u چنین می‌شود

$$u(r,\theta) = r^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta)$$

که $A = A_۱A_۲$ و $B = B_۱A_۲$. حال بنابراصل برهم نهی می‌نویسیم

$$u(r,\theta) = \frac{A_\circ}{۲} + \sum_{۱}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_۱ \sin n\theta)$$

که اگر شرط مرزی $u(۱,\circ) = f(\theta)$ را اعمال کنیم می‌گیریم

$$f(\theta) = \frac{A_\circ}{۲} + \sum_{۱}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

بدیهی است که $A_\circ$، A_n و B_n ضرایب فوریه تابع $f(\theta)$ اند و براحتی از روابط زیر با معلوم بودن $f(\theta)$ بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} A_\circ &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta \\ A_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta \\ B_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

۱۱ـ مسئله ۱۰ را برای $\circ < \theta < \pi$ و شرایط زیر حل کنید

$$\begin{aligned} &u(r,\circ) = \circ, \quad \circ < r < ۱ \\ &u(r,\pi) = \circ \quad , \circ \leq r \leq ۱ \\ &u(۱,\theta) = (\pi - \theta)\theta \end{aligned}$$

و نشان دهید که با این شرط

$$u(r,\theta) = \frac{۸}{\pi}\sum_{۱}^{\infty}\frac{۲^{۲n-۱}\sin(۲n-۱)\theta}{(۲n-۱)^۳}$$

حل: همانند مثال قبلی است که اگر شرایط داده شده را اعمال کنیم می‌گیریم

$$u(r,\theta) = \sum_{۱}^{\infty} B_n r^n \sin n\theta$$

حال اگر شرط $u(۱,\theta) = (\pi - \theta)\theta$ را بکار بریم، خواهیم داشت

$$(\pi - \theta)\theta = \sum_{۱}^{\infty} B_n \sin n\theta$$

بدیهی است که

$$B_n = \frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}(\pi - \theta)\theta \sin n\theta d\theta =$$

$$= \frac{۴}{\pi n^۳}(۱ - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{۸}{\pi n^۳} & \text{های فرد،} \ n \\ \circ & \text{های زوج،} \ n \end{cases}$$

در نتیجه

$$u(r,\theta) = \frac{۸}{\pi} \sum_{۱}^{\infty} \frac{r^n \sin n\theta}{n^۳}$$

که n عددی فرد است یا بعبارتی دیگر

$$u(r,\theta) = \frac{۸}{\pi} \sum_{۱}^{\infty} \frac{۲^{۲n-۱} \sin(۲n-۱)\theta}{(۲n-۱)^۳}$$

۱۲ـ ارتعاشات قائم آزاد و کوچک یک تیر یکنواخت با معادله

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} + c^۲ \frac{\partial^۴ u}{\partial x^۴} = ۰$$

داده می‌شود. معادله را با شرایط اولیه $u(x,۰) = x(l-x)$ و سرعت اولیه صفر و شرایط مرزی زیر حل کنید

$$u(۰,t) = u(l,t) = ۰$$
$$u_{xx}(۰,t) = u_{xx}(l,t) = ۰$$

حل: با فرض $u = XT$ می‌گیریم

$$XT'' + c^۲ \overset{(۴)}{X} T = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{c^۲ T} = \frac{-\overset{(۴)}{X}}{X} = -\lambda^۲$$

که از آن دستگاه معادلات زیر بدست می‌آیند

$$T'' + c^۲\lambda^۲ T = ۰$$
$$\overset{(۴)}{X} - \lambda^۲ X = ۰$$

به ترتیب از حل آنها خواهیم داشت

$$T = A_۱ \cos c\lambda t + B_۱ \sin c\lambda t$$
$$X = A_۲ \cos\sqrt{\lambda} + B_۲ \sin\sqrt{\lambda}x + A_۳ ch\sqrt{\lambda}x + B_۳ sh\sqrt{\lambda}x$$

در نتیجه

$$u = TX = (A_۱ \cos c\lambda t + B_۱ \sin c\lambda t)(A_۲ \cos\sqrt{\lambda}x$$
$$+ B_۲ \sin\sqrt{\lambda}x + A_۳ ch\sqrt{\lambda}x + B_۳ sh\sqrt{\lambda}x)$$

و شرایط داده شده را اعمال می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\begin{rcases} u(\circ,t)=\circ & \rightarrow & A_۲+A_۳=\circ \\ u_{xx}(\circ,t)=\circ & \rightarrow & -A_۲+A_۳=\circ \end{rcases} \Rightarrow A_۲=A_۳=\circ$$

در نتیجه

$$u=(A_۱\cos c\lambda t+B_۱\sin c\lambda t)(B_۲\sin\sqrt{\lambda}x+B_۳sh\sqrt{\lambda}x)$$

همچنین

$$u(l,t)=\circ \rightarrow B_۲\sin\sqrt{\lambda}k+B_۳sh\sqrt{\lambda}l=\circ$$
$$u_{xx}(l,t)=\circ \Rightarrow B_۲\sin\sqrt{\lambda}l+B_۳sh\sqrt{\lambda}l=\circ$$

که از حل این دستگاه $B_۳=\circ$ و $\lambda=\frac{n^۲\pi^۲}{l^۲}$. بنابراین

$$u(x,t)=(A_۱\cos c\frac{n^۲\pi^۲}{l^۲}t+B_۱\sin c\frac{n^۲\pi^۲}{l^۲}t)B_۲\sin\frac{n^۲\pi^۲}{l^۲}x$$
$$=(A\cos c\mu t+B\sin c\mu t)\sin\mu x$$

که $\mu=\frac{n^۲\pi^۲}{l^۲}$. با استفاده از اصل برهم نهی داریم

$$u(x,t)=\sum_{۱}^{\infty}(A_n\cos c\mu t+B_n\sin c\mu t)\sin\mu x$$

که اگر شرط آخری را مورد استفاده قرار دهیم می‌گیریم

$$x(l-x)=\sum_{۱}^{\infty}A_n\sin\mu x$$

که از آن

$$A_n=\frac{۲}{l}\int_{\circ}^{l}x(l-x)\sin\mu x dx=\frac{۴}{l\mu^۳}(\cos\mu l-۱)$$

و شرط $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\circ)=\circ$ منجر به $B_n=\circ$ می‌شود. به این ترتیب

$$u(x,t)=\frac{۴}{l}\sum_{۱}^{\infty}\frac{\cos\mu l-۱}{\mu^۳}\cos c\mu+\sin\mu x$$

۱۳ـ انحراف $u(x,y,t)$ غشاء مربعی شکل به طول یک را با فرض $c=۱$ در صورتی بیابید که سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه $f(x,y)=xy(۱+x^۲)(۱-y)$ باشد.

حل: در اینجا با سری فوریه دوگانه سر و کار خواهیم داشت. معادله

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}\ ,\quad \circ\le x,y\le ۱,\quad t>\circ$$

را با این شرایط که روی چهار ضلع مربع انحراف صفر باشد حل می‌کنیم. پس باید

$$u(0,y,t)=u(1,y,t)=u(x,0,t)=u(x,t,t)=0$$

توجه شود چون سرعت اولیه صفر است پس $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=0$.

فرض کنید $u=XYT$ که از آن $u_{tt}=XYT''$ و $u_{xx}=X''YT$ و $u_{yy}=XY''T$. در معادله قرار می‌دهیم و آنرا به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2$$

که از آن می‌توانیم دستگاه زیر را بنویسیم

$$T''+\lambda^2T=0$$
$$X''+\mu^2X=0$$
$$Y''+(\lambda^2-\mu^2)Y=0$$

که به ترتیب جوابهای عمومی زیر را خواهیم داشت

$$T=A_1\cos\lambda t+B_1\sin\lambda t$$
$$X=A_2\cos\mu x+B_2\sin\mu x$$
$$Y=A_3\cos\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y+B_3\sin\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y$$

در نتیجه

$$u(x,y,t)=(A_1\cos\lambda t+B_1\sin\lambda t)(A_2\cos\mu x+B_2\sin\mu x)$$
$$+(A_3\cos\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y+B_3\sin\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y)$$

حال شرایط را اعمال می‌کنیم.

$$u(0,y,t)=0\Rightarrow A_2=0$$
$$\Rightarrow u(x,y,t)=(A_1\cos\lambda t+B_1\sin\lambda t)$$
$$+(A_4\cos\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y+B_4\sin\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y)\sin\mu x$$

که $A_4=B_2A_3$ و $B_4=B_2B_3$.

$$u(x,0,t)=0\rightarrow A_4=0$$
$$u(x,y,t)=(A\cos\lambda t+B\sin\lambda t)\sin\mu x\sin\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y$$

که $A = A_۱B_۲$ و $B = B_۱B_۲$. شرط $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,۰) = ۰$ منتهی به جواب $B = ۰$ می‌شود. پس

$$u(x,y,t) = A\cos\lambda t \sin\mu x \sin\sqrt{\lambda^۲ - \mu^۲}y$$

از شرط $u(۱,y,t) = ۰$ می‌گیریم $\mu = n\pi$ و از شرط $u(x,۱,t) = ۰$ خواهیم داشت

$\lambda = \pi\sqrt{m^۲ + n^۲}$. به این ترتیب

$$u(x,y,t) = A\cos\pi\sqrt{m^۲+n^۲}t \sin n\pi x \sin m\pi y$$

بنابر اصل برهم نهی

$$u(x,y,t) = \sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} A_{mn}\cos\pi\sqrt{m^۲+n^۲}t \sin n\pi x \sin m\pi y$$

حال شرط $u(x,y,۰) = xy(۱+x^۲)(۱-y)$ را مورد استفاده قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$xy(۱+x^۲)(۱-y) = \sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty} A_{mn}\sin\pi x \sin n\pi y$$

که

$$A_{mn} = ۴\int_۰^۱\int_۰^۱ xy(۱+x^۲)(۱-y)\sin n\pi x \sin m\pi y\,dx\,dy$$

$$= \begin{cases} \frac{۱۶(-۱)^n}{n^۲m^۳\pi^۶}(۳ - n^۲\pi^۲) & \text{اگر } m \text{ زوج باشد,} \\ ۰ & \text{اگر } m \text{ فرد باشد,} \end{cases}$$

به این ترتیب $u(x,y,t)$ مشخص می‌شود.

۱۴ـ با نوشتن معادله‌های زیر به شکل متعارف، جواب عمومی آنها را بیابید

$$\text{(i)}\quad ۲u_{xx} - ۴u_{xy} + ۲u_{yy} + ۳u = ۰$$

$$\text{(ii)}\quad y^۲u_{xx} - ۲xyu_{xy} + x^۲u_{yy} = \frac{u^۲}{x}u_x + \frac{x^۲}{y}u_y.$$

حل: (i) معادله سهمی‌وار است زیرا $B^۲ - ۴AC = ۰$، بنابراین

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-۴}{۴} = -۱ \to y = -x + \alpha,\quad x = \beta$$

پس

$$u_x = u_\alpha\alpha_x + u_\beta\beta_x = u_\alpha + u_\beta$$

در نتیجه

$$u_{xx} = (u_x)_\alpha \alpha_x + (u_x)_\beta \beta_x = u_{\alpha\alpha} + ۲u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}$$

بطریقی مشابه

$$u_{xy} = (u_x)_\alpha \alpha_y + (u_x)_\beta \beta_y = u_{\alpha\alpha} + u_{\alpha\beta}$$

همچنین داریم

$$u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = u_\alpha \to u_{yy} = (u_y)_\alpha + (u_y)_\beta \beta_y = u_{\alpha\alpha}$$

که اگر در معادله جاگذاری نماییم، خواهیم داشت

$$۲u_{\beta\beta} + ۳u = ۰$$

براحتی می‌توان نشان داد که جواب عمومی این معادله به صورت زیر است

$$u = f_۱(\alpha)\cos\sqrt{\frac{۳}{۲}}\beta + f_۲(\alpha)\sin\sqrt{\frac{۳}{۲}}\beta$$

که حال اگر قرار دهیم $\alpha = x + y$ و $\beta = x$ می‌گیریم

$$u = f_۱(x+y)\cos\sqrt{\frac{۳}{۲}}x + f_۲(x+y)\sin\sqrt{\frac{۳}{۲}}x.$$

(ii) این معادله هم یک سهمی واراست. بنابراین

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{y} \to \frac{y^۲ + x^۲}{۲} = \alpha \ , \ x = \beta.$$

اگر قاعده زنجیره‌ای را برای u_x و u_{xx} و u_{xy} و u_y و u_{yy} بکار بگیریم، خواهیم داشت

$$u_x = \beta u_\alpha + u_\beta$$
$$u_{xx} = \beta^۲ u_{\alpha\alpha} + ۲\beta u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta} + u_\alpha$$
$$u_{xy} = \beta\sqrt{۲\alpha - \beta^۲}u_{\alpha\alpha} + \sqrt{۲\alpha - \beta^۲}u_{\alpha\beta}$$
$$u_y = \sqrt{۲\alpha - \beta^۲}u_\alpha$$
$$u_{yy} = u_\alpha + (۲\alpha - \beta^۲)u_{\alpha\alpha}$$

حال اگر این روابط را در معادله قرار دهیم می‌گیریم

$$u_{\beta\beta} - \frac{۱}{\beta}u_\beta = ۰$$

که از حل آن

$$u = f_۱(\alpha) + \frac{۱}{۲}\beta^۲ f_۲(\alpha)$$

حال با گذاردن $\alpha = \frac{x^2+y^2}{2}$ و $\beta = x$، خواهیم داشت

$$u(x,y) = f_1\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) + \frac{x^2}{2} f_2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right).$$

۱۵ـ معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad\qquad u(x,0) = 0,\ \ u(0,t) = 1.$$

حل: از طرفین معادله داده شده نسبت به t تبدیل لاپلاس می‌گیریم. خواهیم داشت

$$u_x + x(sU - u(x,0)) = 0 \rightarrow U_x + sxU = 0$$

اگر از شرط $u(0,t) = 1$ هم تبدیل لاپلاس گرفته شود نتیجه می‌شود که $U(0,s) = \frac{1}{s}$. حال معادله $U_x + sxU = 0$ را با شرط $U(0,s) = \frac{1}{s}$ حل می‌کنیم. براحتی از معادله حاصل جواب $U = c(s)e^{\frac{-sx^2}{2}}$ را خواهیم داشت که با استفاده از شرط موجود می‌گیریم $c(s) = \frac{1}{s}$. پس

$$U = \frac{1}{s}e^{\frac{-sx^2}{2}}$$

برای محاسبه $u(x,t)$ از طرفین این رابطه تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم. نتیجه چنین می‌شود

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{U\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{\frac{-sx^2}{2}}\right\} = u\left(t - \frac{x^2}{2}\right)$$

که u تابع پله‌ای واحدی است.

۱۶ـ مسئله نخ مرتعش را که سرعت اولیه برای آن صفر در نظر گرفته شود و انحراف اولیه آن

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3 - x, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

فرض شود حل کنید اگر طول نخ ۳ و شرایط مرزی صفر در نظر گرفته شوند.

حل: با توجه به تجربه حل معادله نخ نوسان داریم

$$u(x,t) = \sum_1^{\infty}(A_n \cos\lambda t + B_n \sin\lambda t)\sin\lambda x$$

که $\lambda = \frac{n\pi}{3}$. از شرط $u(x,0) = \sum_1^\infty A_n \sin\frac{n\pi}{3}x$ داریم

$$A_n = \frac{3}{2}\left[\int_0^1 \sin n\frac{\pi x}{3}dx + \int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{3}dx + \int_2^3 (3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]$$

$$= \frac{۶}{n^{۲}\pi^{۲}}\left(\sin\frac{n\pi}{۳}+\sin\frac{۲n\pi}{۳}\right)$$

همچنین از شرط $u_t(x,۰)=۰$ می‌توان دریافت که $B_n=۰$ در نتیجه

$$u(x,t)=\frac{۶}{\pi^{۲}}\sum\frac{(\sin\frac{n\pi}{۳}+\sin\frac{۲n\pi}{۳})}{n^{۲}}\sin\frac{n\pi}{۳}x\cos\frac{n\pi}{۳}t.$$

۱۷ـ مسئله نخ مرتعش را با این فرض که سرعت اولیه به صورت

$$u_t(x,۰)=\begin{cases}۰, & ۰<x<۱\\ x-۱, & ۱<x<۲\\ ۳-x, & ۲<x<۳\\ ۰, & ۳<x<۴\end{cases}$$

در نظر گرفته شود و طول نخ برابر ۴ و انحراف اولیه و شرایط مرزی صفر فرض شوند حل نمائید.

حل: در اینجا داریم

$$u(x,t)=\sum_{۱}^{\infty}(A_n\cos\lambda t+B_n\sin\lambda t)\sin\lambda x$$

که $\lambda=\frac{n\pi}{l}=\frac{n\pi}{۴}$. از شرط $u(x,۰)=۰$ می‌گیریم $A_n=۰$ و از شرط

$$u_t(x,۰)=\sum_{۱}^{\infty}\lambda B_n\sin\lambda x=\sum_{۱}^{\infty}\frac{n\pi}{۴}B_n\sin\frac{n\pi x}{۴}$$

که

$$B_n=\frac{۲}{n\pi}\left[\int_{۰}^{۱}۰+\int_{۱}^{۲}(x-۱)\sin\frac{n\pi x}{۴}dx+\int_{۲}^{۳}(۳-x)\sin\frac{n\pi x}{۴}dx+\int_{۳}^{۴}۰\right]$$
$$=\frac{۳۲}{n^{۳}\pi^{۳}}\left(۲\sin\frac{n\pi}{۲}-\sin\frac{n\pi}{۴}-\sin\frac{۳n\pi}{۴}\right)$$

در نتیجه

$$u(x,t)=\frac{۳۲}{\pi^{۳}}\sum_{۱}^{\infty}\frac{\left(۲\sin\frac{n\pi}{۲}-\sin\frac{n\pi}{۴}-\sin\frac{۳n\pi}{۴}\right)}{n^{۳}}\sin\frac{n\pi t}{۴}\sin\frac{n\pi x}{۴}.$$

۱۸ـ معادله زیر را حل کنید

$$u_{tt}=u_{xx}+x+t$$

$$u(x,\circ)=x,\ \ u_t(x,\circ)=\text{۲}x,\ \ u(\circ,t)=t$$
$$u(\text{۱},t)=\text{۲}t,\ \ \circ\leq x\leq \text{۱},\ \ t\geq \circ$$

حل: با فرض $w=ax+b$ که در آن $a=\frac{\text{۱}}{l}(f_\text{۲}-f_\text{۱})=t$ و $b=f_\text{۱}=t$ می‌گیریم $w=t(x+\text{۱})$. پس اگر

$$u(x,t)=v(x,t)+w$$

در نظر گرفته شود آنگاه

$$v(\circ,t)=v(\text{۱},t)=\circ$$

و $u_{tt}=v_{tt}$ و $u_{xx}=v_{xx}$. همچنین

$$u(x,\circ)=v(x,\circ)=x$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\circ)=\frac{\partial v}{\partial t}(x,\circ)+\frac{\partial w}{\partial t}(w,\circ)\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial t}(x,\circ)=x-\text{۱}$$

به این ترتیب حل معادله بالا معادل با حل معادله زیر خواهد بود

$$u_{tt}=v_{xx}+x+t$$
$$v(x,\circ)=v(x,\circ)=\circ,$$
$$v(x,\circ)=x,\ \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,\circ)=x-\text{۱}$$

جوابی به صورت $v=\sum_\text{۱}^\infty T_n\sin n\pi x$ را در نظر می‌گیریم و در معادله قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$\sum_\text{۱}^\infty(T_n''+n^\text{۲}\pi^\text{۲}T_n)\sin n\pi x=x+t$$
$$\Rightarrow T_n''+n^\text{۲}\pi^\text{۲}T_n=\text{۲}\int_\circ^\text{۱}(x+t)\sin n\pi x dx=\frac{\text{۲}}{n\pi}[(\text{۱}-\cos n\pi)t-\cos n\pi]$$

این یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دو خطی است با ضرایب ثابت که جواب مکمل آن عبارت است از

$$a_n\cos n\pi t+b_n\sin\pi t$$

و جواب خصوصی آن

$$\frac{\text{۲}}{n^\text{۳}\pi^\text{۳}}[(\text{۱}-\cos n\pi)t\cos n\pi]$$

در نتیجه جواب عمومی چنین می‌شود

$$T_n=a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t+\frac{\text{۲}}{n^\text{۳}\pi^\text{۳}}[(\text{۱}-\cos n\pi)t-\cos n\pi]$$

بنابراین

$$v(x,t)=\sum_{1}^{\infty}\left[(a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t)+\frac{2}{n^3\pi^3}[(1-\cos n\pi)t-\cos n\pi]\right]\sin n\pi x$$

از شرط $v(x,t)=x$ می‌گیریم

$$\sum_{1}^{\infty}\left[a_n\frac{2\cos n\pi}{n^2\pi^3}\right]\sin n\pi x=x$$

که با نوشتن سری فوریه سینوسی $f(x)=x$ و مقایسه حاصل با سمت چپ تساوی a_n مشخص می‌شود.
حال با معلوم بودن a_n و b_n تابع $v(x,t)$ مشخص می‌شود. از طرفی چون

$$u(x,t)=v(x,t)+t(x-1)$$

با جاگذاری $v(x,t)$ در این رابطه تابع $u(x,t)$ بدست می‌آید.

۱۹ـ جواب عمومی معادله $4u_{xx}+5u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=2$ را با نوشتن معادله برحسب α و β بدست آورید اگر $\alpha=y-x$ و $\beta=y-\frac{x}{4}$.

حل: داریم

$$u_x=u_\alpha\alpha_x+u_\beta\beta_x=u_\alpha-\frac{1}{4}u_\beta\Rightarrow u_{xx}=u_{\alpha\alpha}+\frac{1}{2}u_{\alpha\beta}+\frac{1}{16}u_{\beta\beta}$$
$$u_{xy}=(u_x)_\alpha\alpha_y+(u_x)_\beta\beta_y=-u_{\alpha\alpha}-\frac{5}{4}u_{\alpha\beta}-\frac{1}{4}u_{\beta\beta}$$
$$u_y=u_\alpha\alpha_y+u_\beta\beta_y=u_\alpha+u_\beta\Rightarrow u_{yy}=u_{\alpha\alpha}+2u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta}$$

این نتایج را در معادله جاگذاری و ساده می‌کنیم. خواهیم داشت

$$u_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}u_\beta=-\frac{8}{9}$$

با فرض $u_\beta=p$ می‌گیریم

$$p_\alpha-\frac{1}{3}p=-\frac{8}{9}$$

که یک معادله مرتبه یک خطی است. از حل آن می‌گیریم

$$pe^{\frac{-\alpha}{3}}=-\frac{8}{3}e^{\frac{-\alpha}{3}}+f(\beta)$$
$$\to p=-\frac{8}{3}+f(\beta)e^{\frac{\alpha}{3}}$$

حال با قرار دادن $p=u_\beta$ می‌نویسیم

$$u_\beta=-\frac{8}{3}+f(\beta)e^{\frac{\alpha}{3}}$$

و از طرفین برحسب β انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت

$$u = -\frac{۸}{۳}\beta + f_۱(\beta)e^{\frac{\alpha}{۳}} + f_۲(\alpha)$$

حال قرار دهید $\alpha = y - x$ و $\beta = y - \frac{\alpha}{۴}$.

۲۰ـ معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

$$\text{(i)}\ \ x^۲u_{xx} + ۲xyu_{xy} + y^۲u_{yy} = ۰\ ,\ \alpha = \frac{y}{x},\ \beta = y$$

$$\text{(ii)}\ \ xu_{xx} - yu_{xy} + u_x = ۰\ \ ,\ \alpha = y,\ \beta = xy.$$

حل: (i) داریم $x = \frac{\beta}{\alpha}$ و $\beta = y$ بنابراین

$$u_x = u_\alpha\alpha_x + u_\beta\beta_x = -\frac{\alpha^۲}{\beta}u_\alpha$$

$$u_{xx} = (u_x)_\alpha\alpha_x + (u_x)_\beta\beta_x = \frac{\alpha^۴}{\beta^۲}u_{\alpha\alpha} + \frac{۲\alpha^۳}{\beta^۲}u_\alpha$$

$$u_{xy} = (u_x)_\alpha\alpha_y + (u_x)_\beta\beta_y = -\frac{\alpha^۳}{\beta^۲}u_{\alpha\alpha} - \frac{\alpha^۲}{\beta}u_{\alpha\beta} - \frac{\alpha^۲}{\beta^۲}u_\alpha$$

$$u_y = u_\alpha\alpha_y + u_\beta\beta_y = \frac{\alpha}{\beta}u_\alpha u_\beta$$

$$u_{yy} = (u_y)_\alpha\alpha_y + (u_y)_\beta\beta_y = \frac{\alpha^۲}{\beta^۲} + \frac{۲\alpha}{\beta}u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}$$

که اگر در معادله جاگذاری شوند خواهیم داشت $\beta^۲u_{\beta\beta} = ۰$ که از آن $u_{\beta\beta} = ۰$.
با دو بار انتگرال گیری از طرفین می‌گیریم

$$u = \beta f_۱(\alpha) + f_۲(\alpha)$$

حال قرار می‌دهیم $\alpha = \frac{y}{x}$ و $\beta = y$.
(ii) داریم $x = \frac{\beta}{\alpha}$ و $y = \alpha$. در نتیجه

$$u_x = u_\alpha\alpha_x + u_\beta\beta_x = \alpha u_\beta$$

$$u_{xx} = (u_x)_\alpha\alpha_x + (u_x)_\beta\beta_x = \alpha^۲u_{\beta\beta}$$

$$u_{xy} = (u_x)_\alpha\alpha_y + (u_x)_\beta\beta_y = u_\beta + \alpha u_{\beta\alpha} + \beta u_{\beta\beta}$$

که اگر در معادله جاگذاری شوند می‌گیریم $\alpha^۲u_{\alpha\beta} = ۰$ پس $u_{\alpha\beta} = ۰$. با دو بار انتگرال گیری برحسب α و β خواهیم داشت

$$u = f_۱(\alpha) + f_۲(\beta)$$

کافی است حال قرار دهیم $\alpha = y$ و $\beta = xy$.

حل آزمونهای چهار جوابی ۹

۱. کدام معادله زیر شبه‌خطی از مرتبه دو است؟

الف) $uu_{xx}+u_{yy}=1$ ب) $u^2u_x=u_{xx}$ ج) $u^2+u_{xx}^2=1$ د) $u_x+u_{xx}^2=u$

حل: گزینه (ب) درست است

۲. کدامیک از جوابهای زیر جواب خصوصی معادله $u_x=u_y$ است؟

الف) $u=x+y$ ب) $y=\sinh(x+y)$ ج) $u=\sin(x+y)$ د) هر سه

حل: براحتی می‌توان مشاهده نمود که هر سه گزینه صحیح هستند. در حالت کلی هر تابع به صورت $u=f(x+y)$ جواب معادله داده شده است.

۳. معادله $u_{tt}+4u_{xx}$ یک معادله

الف) هذلولیگون است ب) سهمی‌وار است ج) بیضی‌وار است د) غیرخطی است

حل: داریم $B^2-4AC=1>0$ پس معادله هذلولیگون است. گزینه (الف) درست است.

۴. معادله $u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}=1$ یک معادلهٔ

الف) هذلولیگون است ب) سهمی واراست ج) بیضی واراست د) خطی همگن است

حل: داریم $B^2-4AC=1-24<0$ پس گزینه (ج) درست است. معادله بیضی واراست.

۵. جواب معادله $u_x=u_y$ با شرط $u(0,y)=e^y$ عبارت است از

الف) $u=e^{x+y}$ ب) $u=(x+1)e^y$ ج) $u=e^{y-x}$ د) $u=x+e^y$

حل: با فرض $u=XY$ می‌گیریم $u_x=X'Y$ و $u_y=XY'$. یعنی

$$\frac{X'}{X}=\frac{Y'}{Y}=k$$

در نتیجه

$$\begin{cases}\dfrac{X'}{X}=k\to X=Ae^{kx}\\ \dfrac{Y'}{Y}=k\to Y=Be^{ky}\end{cases}\Rightarrow u=XY=ce^{k(x+y)}$$

که $c=AB$.

با استفاده از شرط $u(0,y)=e^y$ می‌گیریم $c=k=1$ پس $u=e^{x+y}$. در نتیجه گزینه (الف) صحیح است.

۶. کدامیک از معادلات زیر معادله پخش گرمایی در حالت دو بعدی است؟

الف) $u_{xx}=u_{yy}+1$ ب) $2u_t-3u_{xx}=3u_{yy}$

ج) $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}$ د) $u_t=u_{xx}-u_{yy}$

حل: گزینه (ب) صحیح است زیرا معادله پخش گرمایی به صورت $u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$ می‌باشد.

۷. کدامیک از معادلات زیر معرف ارتعاشات قائم آزاد و کوچک یک تیر یکنواخت است.

الف) $u_{tt} = u_{xxxx}$ ب) $u_{tt} = u_{xx}$ ج) $u_{tt} + u_{xx} = 5$ د) $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$

حل: با توجه به اینکه صورت کلی معادله به شکل $u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0$ است پس گزینه (د) درست است.

۸. با فرض $x = e^r \cos\theta$ و $y = e^r \sin\theta$ معادله $u_{xx} + u_{yy} = 0$ به کدام معادله زیر تبدیل می‌شود

الف) $u_{rr} = u_{\theta\theta}$ ب) $u_{rr} + u_{\theta\theta} = 0$

ج) $u_{rr} + \frac{1}{r}u_\theta + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ د) $u_{r\theta} = u_{rr} + u_{\theta\theta}$

حل: گزینه (ب) صحیح است به حل تمرین ۲ از این فصل مراجعه شود.

۹. روش دالامبر برای حل کدام یک از معادلات زیر بکار می‌رود؟

الف) معادله موج یک بعدی ب) معادله بخش گرمایی

ج) معادله لاپلاس د) معادله تیر مرتعش

حل: گزینه (الف). به فصل ۹ مراجعه شود.

۱۰. یکی از جوابهای معادله $u_{xx} + u_{yy} - 6u_{yy} = 0$ عبارت است از

الف) $u = x^2 + 3y^2$ ب) $u = e^{x+3y}$ ج) $u = e^{y+2x}$ د) $u = e^{x+2y}$

حل: جواب $u = e^{mx+xy}$ را در نظر می‌گیریم. داریم $u_{xx} = m^2 e^{mx+ny}$ و $u_{yy} = n^2 e^{mx+ny}$ و $u_{xy} = mne^{mx+ny}$. در معادله قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$(m^2 + mn - 6n^2)e^{mx+ny} = 0 \Rightarrow m^2 + mn - 6n^2 = 0 \to (m+3n)(m-2n) = 0$$

$$\Rightarrow m = -3n, \quad m = 2n$$

یکی از جوابها با استفاده از $m = 2n$ بدست می‌آید یعنی

$$u = e^{mx+ny} = e^{2nx+ny} = e^{n(y+2x)}$$

که با انتخاب $n = 1$ جواب (ج) درست است.