کتابچه نمونه سوالات چیست:

سایت ما **افتخار** دارد برای اولین بار در ایران توانسته است کتابچه نمونه سوالات تمام دروس پیام نور که هر یک حاوی تمامی آزمون های برگزار شده پیام نور (تمامی نیمسالهای موجود حتی الامکان با جواب) را در یک فایل به نام کتابچه جمع آوری کند و هر ترم نیز آن را آپدیت نماید.

مراحل ساخت یک کتابچه نمونه سوال

(برای آشنایی با زحمت بسیار زیاد تولید آن در هر ترم) :

دسته بندی فایلها – سرچ بر اساس کد درس – چسباندن سوال و جواب – پیدا کردن یک درس در نیمسالهای مختلف و چسباندن به کتابچه همان درس – چسباندن نیمسالهای مختلف یک درس به یکدیگر – وارد کردن اطلاعات تک تک نیمسالها در سایت – آپلود کتابچه و خیلی موارد دیگر..

همچنین با توجه به تغییرات کدهای درسی دانشگاه استثنائات زیادی در ساخت کتابچه بوجود می آید که کار ساخت کتابچه را بسیار پیچیده می کند .

فهرست مطالب

تمرینات فصل اول

۱.۱) صورت‌های مبهم $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$

در تمرین‌های ۱ و ۲ مقدار c مربوط به کوشی را تعیین کنید.

۱) $f(x)=x^3-2x$ و $g(x)=x^2+x-1$ ؛ در بازه‌ی [۰ و ۱]

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$f(1)=-1,\ f(0)=0,\ g(1)=1,\ g(0)=-1$$

$$f'(x)=2x-2\rightarrow f'(c)=3c^2-2$$

$$g'(x)=2x+1\rightarrow g'(c)=2c+1$$

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{-1-0}{1-(-1)}=\frac{3c^2-2}{2c+1}\Rightarrow$$

$$6c^2-4=-2c-1\Rightarrow 6c^2+2c-3=0$$

$c_1=\dfrac{-1+\sqrt{19}}{6}\in[0,1]\rightarrow$ قابل قبول

$c_2=\dfrac{-1-\sqrt{19}}{6}\notin[0,1]\rightarrow$ غیرقابل قبول

---

۲) $f(x)=x^2$ و $g(x)=Lnx$ ؛ در بازه‌ی $[1,2]$

$$f(1)=1,f(2)=4,g(1)=0,g(2)=Ln2$$

$$f'(x)=2x\ ,\ g'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f'(-c)=2c\ ,\ g'(c)=\frac{1}{c}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{۴-۱}{Ln۲-Ln۱}=\frac{۲c}{\frac{۱}{c}} \Rightarrow ۲c^۲=\frac{۳}{Ln۲}$$

$$c^۲=\frac{۳}{۲ln۲} \Rightarrow c_۱=\sqrt{\frac{۳}{۲Ln۲}} \in[۱,۲]$$ قابل قبول

$$c_۲=-\sqrt{\frac{۳}{۲Ln۲}} \notin [۱,۲]$$ غیرقابل قبول

حدهای زیر را تعیین کنید (در صورت امکان از دستور هوپیتال استفاده کنید.)

۳) $\lim\limits_{x\to ۹} \frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}$

$\lim\limits_{x\to ۹} \frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

هوپیتال: $\lim\limits_{x\to ۹} \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱}=\lim\limits_{x\to ۹}\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۶}$

---

۴) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}$

$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

هوپیتال: $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}}{۱}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}=\frac{۱}{۲}$

---

۵) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{Sin۲x}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{Sin۲x}{\sqrt{x}}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

هوپیتال: $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۲Cos۲x}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to ۰} ۴\sqrt{x}\,.\cos۲x=۰$

---

۶) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{Sinx-x}{x^۳}$

$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{Sinx-x}{x^۳}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

هوپیتال: $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{Cosx-۱}{۳x^۲}=\frac{۱-۱}{۳}=۰$

---

۷) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱+Sinx}{۱+Cosx}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱+Sinx}{۱+Cosx}=\frac{۱+۱}{۱+۰}=۲$

۸) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{Lnx}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{Lnx}{x-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

هوپیتال: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{1} = 1$

---

۹) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-e^x+1}{Ln(1+x)-x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-e^x+1}{Ln(1+x)-x} = \frac{0}{0}$ مبهم

هوپیتال اول: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-e^x}{\frac{1}{1+x}-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

هوپیتال دوم: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)(-e^x)+(1-e^x)}{-1} = +1$

---

۱۰) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x-3^x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x-3^x}{x} = \frac{0}{0}$ مبهم

هوپیتال: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x Ln2 - 3^x Ln3}{1} = Ln2 - Ln3 = Ln\frac{2}{3}$

---

۱۱) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^{-1}x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^{-1}x}{x} = \frac{0}{0}$ مبهم

هوپیتال: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$

---

۱۲) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin^{-1}x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin^{-1}x}{x} = \frac{0}{0}$ مبهم

هوپیتال: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$

---

۱۳) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^4}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^4} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال اول: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{۴x^۳}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال دوم: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{۱۲x^۲}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم ، هوپیتال سوم: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{۲۴x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال چهارم: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{۲۴}=\infty$

---

۱۴) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Lnx}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Lnx}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{۱}{x}}{۱}=\dfrac{۱}{\infty}=۰$

---

۱۵) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Ln(۲+e^x)}{۳x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Ln(۲+e^x)}{۳x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال اول: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{e^x}{۲+e^x}}{۳}=\dfrac{e^x}{۶+۳e^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال دوم: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{۳e^x}=\dfrac{۱}{۳}$

---

۱۶) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{Sec^۲x}{Sec^۲۳x}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{Sec^۲x}{Sec^۲۳x}=\dfrac{۰}{۰}$

$\dfrac{Sec^۲x}{Sec^۲۳x}=\dfrac{\left(\frac{۱}{Cosx}\right)^۲}{\left(\frac{۱}{Cos۳x}\right)^۲}=\dfrac{Cos^۲۳x}{Cos^۲x}$

هوپیتال: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{-۶Cos(۳x).Sin(۳x)}{-۲Cos(x).Sin(x)}=۳\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{Cos۳x}{Cosx}.\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{Sin۳x}{Sinx}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{Sin۳x}{Sinx}=-۱$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{Cos۳x}{Cosx}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow$ هوپیتال: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{-۳Sin۳x}{-Sinx}=-۳$

$۳\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{Cos۳x}{Cosx}.\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}}\dfrac{Sin۳x}{Sinx}=۳(-۱)(-۳)=+۹$

۱۷) فرض کنید f به صورت $f(x)=\begin{cases} e^{-x^{-2}} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ تعریف شده باشد، $f'(0)$ را بیابید.

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-2}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{ex^{x^2}}}=\frac{1}{\infty}=0$$

---

۱۸) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} \frac{\operatorname{Sin}x}{x} & , x\neq 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$ نشان دهید که $f'(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{Sin}x}{x}-1}{x-0}=\frac{0}{0}$$ مبهم

هوپیتال اول: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Cos}x}{2x}=\frac{0}{0}$ مبهم

هوپیتال دوم: $\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{Sin}x}{2}=\frac{0}{2}=0$

۲.۱) صورت‌های مبهم دیگر

حدهای زیر را تعیین کنید:

۱) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{1-e^x}+\frac{1}{x})$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{1-e^x}+\frac{1}{x})=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{1-e^x}+\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-e^x}{x(1-e^x)}=\frac{0}{0}$$

هوپیتال اول: $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{(1-e^x)+x(-e^x)}=\frac{1-1}{(1-1)+0}=\frac{0}{0}$

هوپیتال دوم: $\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{-e^x+(-e^x)-xe^x}=\frac{1}{2}$

---

۲) $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{Sin}x})$

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{Sin}x})=\infty-\infty$$

$$\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\operatorname{Sin}x}=\frac{\operatorname{Sin}x-x}{x\operatorname{Sin}x}$$

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\operatorname{Sin}x-x}{x\operatorname{Sin}x}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال اول: $$\lim_{x\to ۰}\frac{\operatorname{Cos}x-۱}{\operatorname{Sin}x-x\operatorname{Cos}x}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال دوم: $$\lim_{x\to ۰}\frac{-\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x-\operatorname{Cos}x+x\operatorname{Sin}x}=۰$$

---

۳) $\lim_{x\to ۰}(\sqrt{x})^x$

$$\lim_{x\to ۰}(\sqrt{x})^x=۰^۰$$

$$(\sqrt{x})^x=x^{\frac{۱}{۲}x}\to$$ Ln می‌گیریم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۲}\operatorname{Ln}x=\lim_{x\to ۰}\frac{\operatorname{Ln}x}{\frac{۲}{x}}=\frac{۰}{۰}$$

هوپیتال: $$\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{x}}{-\frac{۲}{x^۲}}=۰$$

$$\lim_{x\to ۰}\operatorname{Ln}(\sqrt{x})^x=۰\Rightarrow \operatorname{Ln}\lim_{x\to ۰}(\sqrt{x})^x=۰$$

$$\lim(\sqrt{x})^x=e^۰=۱$$

---

۴) $\lim_{x\to ۱}x^{\frac{۱}{۱-x}}$

$$\lim_{x\to ۱}x^{\frac{۱}{۱-x}}=\lim ۱^\infty=\infty$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{۱-x}\operatorname{Ln}x=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال: $$\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{x}}{-۱}=-۱$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{۱-x}\operatorname{Ln}x=-۱\Rightarrow \operatorname{Ln}\lim_{x\to ۱}x^{\frac{۱}{۱-x}}=-۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱}x^{\frac{۱}{۱-x}}=e^{-۱}$$

---

۵) $\lim_{x\to\infty}(x^۲-۱)e^{-x^۲}$

$$\lim_{x\to\infty}(x^۲-۱)e^{-x^۲}=\infty.۰$$

$$(x^{۲}-۱)e^{-x^{۲}}=\frac{x^{۲}-۱}{e^{x^{۲}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}-۱}{e^{x^{۲}}}=\frac{\infty}{\infty}$$

هوپیتال: $\lim_{x\to\infty}\frac{۲x}{۲x\,e^{x^{۲}}}=۰$

---

۶) $\lim_{x\to۰}\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{Sinx}$

$$\lim_{x\to۰}\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{Sinx}=\infty^{۰}$$

$$\lim Ln\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{Sinx}=\lim_{x\to۰} Sinx\,.Ln\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{Ln\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)}{\frac{۱}{Sinx}}=\frac{\infty}{\infty}$$

هوپیتال: $\lim_{x\to۰}\frac{-\frac{۲}{x}}{-\frac{Cosx}{Sin^{۲}x}}\xrightarrow{Sinx\sim x}\lim_{x\to۰}\frac{۲x}{Cosx}=۰$

$$\lim Ln\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)Sinx=۰$$

$$Ln\lim_{x\to۰}\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{Sin\,x}=۰\Rightarrow\lim_{x\to۰}Ln\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{Sinx}=e^{۰}=۱$$

---

۷) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(Sin\,x)^{tanx}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(Sin\,x)^{tanx}=۱^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}Ln(Sin\,x)^{tanx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}tanx\,.Ln\,(Sinx)$$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{Ln(Sin\,x)}{Cotx}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

هوپیتال: $=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\frac{Cosx}{Sinx}}{-۱(۱+Cot^{۲}x)}=۰\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}Ln\,(Sin\,x)^{tanx}=۰$

$$Ln\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(Sin\,x)^{tanx}=۰$$

$$Ln\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(Sin\,x)^{tanx}=e^{۰}=۱$$

۸) $\lim\limits_{x\to ۰} (۱+\operatorname{Sin}x)^{\frac{۱}{x}}$

$$\lim_{x\to ۰} (۱+\operatorname{Sin}x)^{\frac{۱}{x}} = ۱^{\infty}$$

$$\lim_{x\to ۰} \operatorname{Ln}(۱+\operatorname{Sin}x)^{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to ۰} \frac{\operatorname{Ln}(۱+\operatorname{Sin}x)}{x} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال: $= \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\frac{\operatorname{Cos}x}{۱+\operatorname{Sin}x}}{۱} = ۱$

$$= \lim_{x\to ۰} \operatorname{Ln}(۱+\operatorname{Sin}x)^{\frac{۱}{x}} = ۱ \to \operatorname{Ln}\lim_{x\to ۰} (۱+\operatorname{Sin}x)^{\frac{۱}{x}} = ۱$$

$$\lim_{x\to ۰} (۱+\operatorname{Sin}x)^{\frac{۱}{x}} = e$$

---

۹) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{۳^{x^{۲}}}{۲^{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۳^{x^{۲}}}{۲^{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

هوپیتال: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{۲}\operatorname{Ln}۳}{x\operatorname{Ln}۲} = x^{۲}\operatorname{Ln}۳ - x\operatorname{Ln}۲$

$$\lim_{x\to\infty} x^{۲}(\operatorname{Ln}۳ - \frac{\operatorname{Ln}۲}{x}) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{Ln}\frac{۳^{x^{۲}}}{۲^{x}} = \infty \Rightarrow \operatorname{Ln}\lim_{x\to\infty} \frac{۳^{x^{۲}}}{۲^{x}} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۳^{x^{۲}}}{۲^{x}} = e^{\infty} = \infty$$

---

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} x^{\operatorname{Ln}x}$

$$\lim_{x\to ۰^{+}} x^{\operatorname{Ln}x} = ۰^{\infty}$$

$$\lim_{x\to ۰^{+}} \operatorname{Ln}x^{\operatorname{Ln}x} = \lim_{x\to ۰^{+}} \operatorname{Ln}x . \operatorname{Ln}x$$

$$= \lim_{x\to ۰^{+}} \operatorname{Ln}x^{۲} = \infty$$

$$\lim_{x\to ۰^{+}} \operatorname{Ln}x^{\operatorname{Ln}x} = \infty$$

$$\operatorname{Ln}\lim_{x\to ۰^{+}} x^{\operatorname{Ln}x} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to ۰^{+}} x^{\operatorname{Ln}x} = e^{\infty} = \infty$$

۳.۱) انتگرال‌های ناسره (با حدود نامتناهی)

همگرایی یا واگرایی هر یک از انتگرال‌های ۱ تا ۱۲ را بررسی کنید. به صورت همگرایی، مقدار انتگرال را تعیین کنید.

۱) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big]_1^{\infty} = \infty$$ واگرا

۲) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \int_2^{\infty} x^{-3} dx = \frac{-1}{2} x^{-2} \Big]_2^{\infty} = \frac{-1}{2x^2}\Big]_2^{\infty} = \frac{1}{8}$$ همگرا

۳) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

$$1+x^2 = u \rightarrow 2xdx = du$$

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{2(u)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} u^{-2} du = -\frac{1}{2} u^{-1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$ همگرا

۴) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1} = Ln(x+1)\Big]_1^{\infty} = \infty$$ واگرا

۵) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big]_0^{\infty} = +1$$ همگرا

۶) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$

$$-x^2 = u \rightarrow -2x\,dx = du$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} -\frac{1}{2} e^u du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{(-x^2)}$$

$$lilm \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$ همگرا

۷) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+۱)^{۲}+۴} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+۱}{۲}\right)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{۲}$$ همگرا

۸) $\int_{۱}^{\infty} x^{-\frac{۲}{۳}} dx$

$$\int_{۱}^{\infty} x^{-\frac{۲}{۳}} dx = \int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} dx = +۳x^{+\frac{۱}{۳}}\Big]_{۱}^{\infty} = \infty$$ واگرا

۹) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^{۲}-۲x+۱۰}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^{۲}-۲x+۱۰} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-۱)^{۲}+۹} = \frac{۱}{۳}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-۱}{۳}\right)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{۳}$$ همگرا

۱۰) $\int_{۰}^{\infty} xe^{-x} dx$

$$\begin{cases} -e^{-x} = v \Rightarrow e^{-x} dx = dv \\ dx = du \Rightarrow x = u \end{cases}$$

$$\int_{۰}^{\infty} xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_{۰}^{\infty} - \int_{۰}^{\infty} -e^{-x} dx = \left[(-xe^{-x} - e^{-x})\right]_{۰}^{\infty} = ۱$$ همگرا

۱۱) $\int_{۱}^{\infty} \frac{Lnx}{x} dx$

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{Lnx}{x} dx = \frac{۱}{۲}(Lnx)^{۲}\Big]_{۱}^{\infty} = \infty$$ واگرا

۱۲) $\int_{۰}^{\infty} e^{-x} Cosx.dx$

$$\begin{cases} u = Cosx \rightarrow du = -Sinx.dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-x} Cosx\, dx = -e^{-x} Cosx - \int_{۰}^{\infty} +e^{-x} Sinx\, dx$$

$$\begin{cases} u = -Sinx \rightarrow du = -Cosx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-x} Cosx\, dx = -e^{-x} Cosx - e^{-x} Sinx - \int_{۰}^{\infty} +e^{-x} Cosx\, dx$$

$$۲\int_{۰}^{\infty} e^{-x} Cosx\, dx = (-e^{-x} Cosx - e^{-x} Sinx)\Big]_{۰}^{\infty} = \frac{۱}{۲}$$ همگرا

۱۳) مقادیر n را به قسمی بیابید که انتگرال $\int_{1}^{\infty} x^n\,dx$

الف) همگرا باشد. ب) واگرا باشد.

الف)

$$\int_{1}^{\infty} x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{1}^{\infty} \Rightarrow$$

حد زمانی همگراست که $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ همگرا باشد یعنی:

$$n+1 \leq 0 \Rightarrow n \leq -1$$

ب) واگرا باشد.

حد زمانی واگراست که $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ واگرا باشد یعنی:

$$n+1 > 0 \Rightarrow n > -1$$

---

۱۴) مقادیر n را به قسمی بیابید که انتگرال $\int_{-\infty}^{-1} x^n dx$

الف) همگرا باشد. ب) واگرا باشد.

الف)

$$\int_{-\infty}^{-1} x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-\infty}^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(t)^{n+1}}{n+1}$$

برای اینکه همگرا باشد، باید $\frac{-t^{n+1}}{n+1}$ همگرا باشد.

$$n+1 \leq 0 \Rightarrow n \leq -1$$

ب) برای واگرا بودن باید داشته باشیم:

$$n+1 > 0 \Rightarrow n > -1$$

---

۱۵) تابعی چون f مثال بزنید به‌طوری که $\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{+t} f(x)\,dx$ وجود داشته ولی $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا باشد.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\left.\frac{1}{x}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\left.\frac{1}{x}\right]_{-\infty}^{0} + \left.\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_{0}^{+\infty} = \infty$$

۱۶) ثابت کنید که اگر $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = L$ و $\int_{a}^{-\infty} f(x)\,dx = k$ آنگاه به ازای هر عدد حقیقی b:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx = L+k$$

فرض اول: $a>b$

$$(۱)\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx - \int_{b}^{a} f(x)\,dx = L - \int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

$$(۲)\ \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{b}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{b}^{a} f(x)\,dx + k$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx = L+k$$

فرض دوم: $a \le b$

$$(۱)\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} f(x)\,dx = L + \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$(۲)\ \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = k - \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx = L+k$$

۴.۱) انتگرال‌های ناسره (با انتگرالده بی‌کران)

همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را تعیین کنید. در صورت همگرایی، مقدار انتگرال را بیابید.

۱) $\int_{۰}^{۴} \frac{dx}{(۴-x)^{\frac{۳}{۲}}}$

$$\int_{۰}^{۴} \frac{dx}{(۴-x)^{\frac{۳}{۲}}} = \int_{۰}^{۴} (۴-x)^{-\frac{۳}{۲}} dx = ۲(۴-x)^{-\frac{۱}{۲}}\Big]_{۰}^{۴} = \infty$$ واگرا

---

۲) $\int_{۰}^{۴} \frac{dx}{(۴-x)^{\frac{۲}{۳}}}$

$$\int_{۰}^{۴} \frac{dx}{(۴-x)^{\frac{۲}{۳}}} = \int_{۰}^{۴} (۴-x)^{\frac{۲}{۳}} = (-۳)(۴-x)^{-\frac{۱}{۳}}\Big]_{۰}^{۴} = -۳\sqrt[۳]{۴}$$ همگرا

۳) $\int_{۲}^{۳} \frac{dx}{\sqrt{x-۲}}$

$$\int_{۲}^{۳} \frac{dx}{\sqrt{x-۲}} = \int_{۲}^{۳} (x-۲)^{-\frac{۱}{۲}} dx$$

$$= ۲(x-۲)^{+\frac{۱}{۲}}\Big]_{۲}^{۳} = ۲$$ همگرا

---

۴) $\int_{۰}^{۲} \frac{dx}{\sqrt{۴-x^۲}}$

$$\int_{۰}^{۲} \frac{dx}{\sqrt{۴-x^۲}} = \mathrm{Arc\,Sin}\frac{x}{۲}\Big]_{۰}^{۲} = \mathrm{Arc\,Sin}(۱) - \mathrm{Arc\,Sin}(۰) = \frac{\pi}{۲}$$

---

۵) $\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}} \mathrm{Sec}\,x\,dx$

$$\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}} \mathrm{Sec}\,x\,dx = \mathrm{Ln}\,|\tan(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})|\Big]_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}} = \infty$$ واگرا

---

۶) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \tan x\,dx$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \tan x\,dx = -\mathrm{Ln}\,|\mathrm{Cos}\,x|\,\Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \infty$$ واگرا

---

۷) $\int_{۰}^{۴} \frac{۱}{(x-۳)^۲} dx$

در $x=۳$ ناپیوسته است.

$$\int_{۰}^{۴} \frac{۱}{(x-۳)^۲} dx = \int_{۰}^{۳} \frac{۱}{(x-۳)^۲} dx + \int_{۳}^{۴} \frac{۱}{(x-۳)^۲} dx$$

$$= (x-۳)^{-۱}\Big]_{۰}^{۳} - (x-۳)^{-۱}\Big]_{۳}^{۴} = \infty$$ واگرا

---

۸) $\int_{-۲}^{+۲} \frac{dx}{-۲(x+۱)^۳}$

در $x=-۱$ ناپیوسته است.

$$\int_{-۲}^{+۲} \frac{dx}{-۲(x+۱)^۳} = \int_{-۲}^{-۱} \frac{dx}{-۲(x+۱)} + \int_{-۱}^{+۲} \frac{dx}{-۲(x+۱)} = \infty + \text{عدد} = \infty$$ واگرا

---

۹) $\int_{۰}^{۴} \frac{dx}{x^۲-x-۲}$

در $x=۲$ ناپیوسته است.

$$\int_{\circ}^{۴}\frac{dx}{x^۲-x-۲}=\int_{\circ}^{۲}\frac{dx}{x^۲-x-۲}+\int_{۲}^{۴}\frac{dx}{x^۲-x-۲}=\infty$$ واگرا

---

۱۰) $\int_{\circ}^{۲}\frac{x\,dx}{(x^۲-۱)^۲}$

در $x=+۱$ ناپیوسته است.

$$\int_{\circ}^{۲}\frac{x\,dx}{(x^۲-۱)^۲}=\int_{\circ}^{۱}\frac{x\,dx}{(x^۲-۱)^۲}+\int_{+۱}^{۲}\frac{x\,dx}{(x^۲-۱)^۲}=\infty+\text{عدد}=\infty$$ واگرا

۵.۱) فرمول تیلر

در تمرین‌های ۱ تا ۸، فرمول تیلر با باقیمانده را برای تابع داده شده به ازای مقادیر مشخص شده برای n و a تعیین کنید.

۱) $n=۳,\ a=۴\ ;\ f(x)=\sqrt{x}$

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\ f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\ ,\ f''(x)=\frac{-۱}{۴\sqrt[۲]{x^۳}}\ ,\ f'''(x)=\frac{۳}{۸\sqrt[۲]{x^۵}}$$

$$f(x)=f(۴)+\frac{f'(۴)(x-۴)}{۱!}+\frac{f''(۴)(x-۴)^۲}{۲!}+\ldots$$

$$f(x)=۲+\frac{۱}{۲}(x-۴)-\frac{۱}{۳۲\times۲!}(x-۴)^۲+\ldots$$

---

۲) $a=\circ\ ,\ n=۳\ ,\ f(x)=\operatorname{Sin}x^۲$

$$f(x)=\operatorname{Sin}x^۲\ ,\ f'(x)=۲x\operatorname{Cos}x^۲\ ,\ f''=۲\operatorname{Cos}x^۲-۴x^۲\operatorname{Sin}x^۲$$

$$f(x)=f(\circ)+\frac{f'(\circ)(x-\circ)}{۱!}+\frac{f''(\circ)(x-\circ)^۲}{۲!}$$

$$f(x)=\circ+\circ+\frac{۲(x-\circ)^۲}{۲!}=x^۲$$

---

۳) $a=۱\ ,\ n=۳\ ,\ f(x)=e^{-x^۲}$

$$f(x)=e^{-x^۲}\ ,\ f'(x)=-۲x\,e^{-x^۲}\ ,\ f''=-۲e^{-x^۲}+۴x^۲e^{-x^۲}$$

$$f(x)=f(۱)+\frac{f'(۱)(x-۱)}{۱!}+\frac{f''(۱)(x-۱)^۲}{۲!}$$

$$f(x)=e^{-۱}-۲(x-۱)e^{-۱}+\frac{۲e^{-۱}(x-۱)^۲}{۲!}$$

۴) $f(x)=\tan x \quad , \quad a=\frac{\pi}{3} \quad , \quad n=4$

$$f(x)=\tan x \quad , \quad f'(x)=1+\tan^2 x^1 \quad , \quad f''=2\tan x(1+\tan^2 x)$$

$$f'''(x)=2(1+\tan^2 x)(1+3\tan^2 x)$$

$$f(x)=f(\tfrac{\pi}{4})+\frac{f'(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})}{1!}+\frac{f''(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!}+\frac{f'''(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\dots$$

$$f(x)=1+2(x-\tfrac{\pi}{4})+\frac{4(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!}+\frac{16(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\dots$$

---

۵) $f(x)=e^{2x} \quad , \quad a=1 \quad , \quad n=5$

$$f(x)=e^{2x} \quad , \quad f'(x)=2e^{2x} \quad , \quad f''=4e^{2x} \quad , \quad f'''(x)=8e^{2x} \quad , \quad f^{(4)}=16x^2$$

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)(x-1)}{1!}+\frac{f''(1)(x-1)^2}{2!}+\frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(1)(x-1)^3}{4!}+\dots$$

$$f(x)=e^2+\frac{2e^2(x-1)}{1!}+\frac{4e^2(x-1)^2}{2!}+\frac{8e^2(x-1)^3}{3!}+\frac{16e^2(x-1)^4}{4!}+\dots$$

---

۶) $f(x)=\mathrm{Ln}(\mathrm{Cos}x) \quad , \quad a=0 \quad , \quad n=2$

$$f(x)=\mathrm{Ln}(\mathrm{Cos}x) \quad , \quad f'(x)=-\frac{\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}x}=-\tan x$$

$$f(x)=-(1+\tan^2 x)$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\dots$$

$$f(x)=0+0+\frac{(x-0)^2}{2!}=\frac{x^2}{2}$$

---

۷) $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x \quad , \quad a=0 \quad , \quad n=2$

$$f(x)=\mathrm{Arc\,Sin}x \quad , \quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad f''=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2)^3}}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(1)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}$$

$$f(x)=1+0+\frac{x^2}{2!}=1+\frac{x^2}{2}$$

۸) $f(x)=\operatorname{Sec} x$, $a=۰$, $n=۳$

$$f(x)=\operatorname{Sec}x \quad , \quad f'(x)=\operatorname{Sec}x.\tan x$$

$$f(x)=\operatorname{Sec}x\,(۱+۲\tan^۲ x)+f'''=\operatorname{Sec}x.\tan(۵+۶\tan^۲ x)$$

$$f(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)x}{۱!}+\frac{f''(۰)x^۲}{۲!}+\frac{f'''(۰)x^۳}{۳!}+\dots$$

$$f(x)=۱+\frac{x^۲}{۲!}=۰=۱+\frac{x^۲}{۲}$$

در تمرین‌های ۹ و ۱۰، دومین چند جمله‌ای تیلور در ۰ را برای تابع داده شده پیدا کنید.

۹) $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$

$$P_۲(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)x}{۱!}+\frac{f''(۰)}{۲!}x^۲$$

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\operatorname{Sin}x}{x}-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\operatorname{Sin}x-x}{x^۲}=\frac{۰}{۰}$$

هوپیتال اول: $\lim_{x\to ۰}\frac{\operatorname{Cos}x-۱}{۲x}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

هوپیتال دوم: $\lim_{x\to ۰}\frac{-\operatorname{Sin}x}{۲}=۰\Rightarrow f'(۰)=۰$

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f'(x)-f'(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x\operatorname{Cos}x-\operatorname{Sin}x}{x^۳}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال اول: $\lim_{x\to ۰}\frac{-x.\operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x-\operatorname{Cos}x}{۳x^۲}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

هوپیتال دوم: $\lim_{x\to ۰}\frac{-x\operatorname{Cos}x-\operatorname{Sin}x}{۶x}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

هوپیتال سوم: $\lim_{x\to ۰}\frac{x.\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x-\operatorname{Cos}x}{۶}=\frac{-۱}{۳}\Rightarrow f''(۰)=-\frac{۱}{۳}$

$$P_۲(x)=۱+\frac{۰(x)}{۱!}+\frac{-\frac{۱}{۳}(x-۰)^۲}{۲!}=۱-\frac{۱}{۶}x^۲$$

۱۰) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$$P_2(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0}=\frac{0}{0}$$

هوپیتال اول: $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال دوم: $\lim_{x\to 0}\frac{-6x^{-4}}{-2x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}}}=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال سوم: $\lim_{x\to 0}\frac{-3x^{-2}}{-2x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}}}=0\Rightarrow f'(0)=0$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{\frac{-1}{x^2}}-0}{x-0}=\frac{0}{0}$$ مبهم

هوپیتال اول: $\lim_{x\to 0}\frac{-8x^{-5}}{-2x^{-3}e^{+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال دوم: $\lim_{x\to 0}\frac{-8x^{-3}}{-2x^{-3}e^{+\frac{1}{x^2}}}=0\Rightarrow f''(0)=0$

$$P_2(x)=0+\frac{0(x)}{1!}+\frac{0(x)^2}{2!}=0$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۹، nامین چند جمله‌ای تیلور در ۰ (یعنی در nامین چند جمله‌ای مک لورن) را برای تابع پیدا کنید.

۱۱) $f(x)=x^2-x-2$

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$$

$$f'(x)=2x-1,\ f''(x)=2,\ f'''(x)=0$$

$$P_n(x)=-2+\frac{-x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+0+\dots$$

۱۲) $F(x)=x^{۵}+۳x+۴$

$$f'(x)=۵x^{۴}+۳,\ f''(x)=۲۰x^{۳}\quad ,\ f'''(x)=۶۰x^{۲}$$

$$P_n(x)=۴+\frac{۳x}{۱!}+۰+۰+۰+\frac{۱۲۰x^{۵}}{۵!}$$

---

۱۳) $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$

$$f'(x)=\frac{-۱}{(x+۱)^{۲}}\quad ,\ f''(x)=\frac{۲}{(x+۱)^{۳}}\quad ,\ f'''(x)=\frac{-۶}{(x+۱)^{۴}}$$

$$P_n(x)=۱+\frac{-x}{۱!}+\frac{۲!x^{۲}}{۲!}+\dots+\frac{n!x^{n}}{n!}$$

---

۱۴) $f(x)=\frac{۱}{۱+۲x}$

$$f'(x)=\frac{-۲}{(۱+۲x)^{۲}}\quad ,\ f''(x)=\frac{۸}{(۱+۲x)^{۳}}\quad ,\ f'''(x)=\frac{-۴۸}{(۱+۲x)^{۴}}$$

$$P_n(x)=۱+\frac{-۲x}{۱!}+\frac{۸x^{۲}}{۲!}+\dots+\frac{n!(-۲)^{n}x^{n}}{n!}$$

---

۱۵) $f(x)=Ln\frac{۱+x}{۱-x}$ (راهنمایی: $Ln\frac{۱+x}{۱-x}=Ln(۱+x)-Ln(۱-x)$)

$$f'(x)=\frac{۱}{۱+x}-\frac{-۱}{۱-x}$$

$$f''(x)=\frac{-۱}{(۱+x)^{۲}}-\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}$$

$$f'''(x)=\frac{۲}{(۱+x)^{۳}}-\frac{۲}{(۱-x)^{۳}}$$

$$P_n(x)=۰+۲x+۰+\frac{۴x^{۳}}{۳!}+۰+\dots+\frac{(۲n+۲)x^{۲x+۱}}{(۲n+۱)!}$$

---

۱۶) $f(x)=Cosx$

$$f'(x)=-Sinx\quad ,\ f''(x)=-Cosx\quad ,\ f'''(x)=Sinx$$

$$P_n(x)=۱+۰+\frac{-x^{۲}}{۲!}+۰+\dots+\frac{(-۱)^{n}x^{۲n}}{(۲n)!}$$

---

۱۷) $f(x)=e^{-x}$

$$f'(x)=-e^{-x}\ ,\ f''(x)=e^{-x}\quad ,\ f'''(x)=-e^{-x}$$

$$P_n(x)=۱-x+\frac{x^{۲}}{۲!}-\frac{x^{۳}}{۳!}+\dots$$

۱۸) $f(x) = \operatorname{Cosh} x$

$f'(x) = \operatorname{Sinh} x \ , \ f''(x) = \operatorname{Cosh} x \ , \ f'''(x) = \operatorname{Sinh} x$

$$P_n(x) = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \dots + \frac{x^{۲n}}{(۲n)!}$$

---

۱۹) $f(x) = e^{۳x}$

$f'(x) = ۳e^{۳x} \ , \ f''(x) = ۹e^{۳x} \ , \ f'''(x) = ۲۷e^{۳x}$

$$P_n(x) = ۱ + ۳x + \frac{۹x^۲}{۲!} + \dots + \frac{۳^n e^{۳x} x^n}{n!}$$

در تمرین‌های ۲۰ تا ۲۴، مقدار تقریبی عدد داده شده را با خطای کمتر از مقدار مشخص شده به دست آورید. (می‌توانید از تمرین‌ها یا مثال‌های متن استفاده کنید)

۲۰) $e^{\frac{۱}{۲}}$ ؛ ۰/۰۰۱

e^x حول ۰

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^Z e^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

Z بین ۰ و x است.

$$۰ < Z < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰ < e^Z < ۲$$

$$\left| \frac{e^Z (\frac{۱}{۲})^{n+۱}}{(n+۱)!} \right| < \frac{۲}{(n+۱)! \, ۲^{n+۱}}$$

$$\frac{۲}{۲^{n+۱}(n+۱)!} < ۰/۰۰۱ \Rightarrow ۲^{n+۱}(n+۱)! > ۲۰۰۰$$

به ازای n=۴ درست است.

$$n = ۴ \Rightarrow ۲^۵(۴+۱) > ۲۰۰۰$$

$$e^{\frac{۱}{۲}} = f(\frac{۱}{۲}) \approx P_۴(\frac{۱}{۲}) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴(۲!)} + \frac{۱}{۸(۳!)} + \frac{۱}{۱۶(۴!)} = ۱/۷۸۸۸$$

---

۲۱) $e^{\frac{۳}{۲}}$ و ۰/۰۱

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^Z x^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

$$۰ < Z < \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۰ < e^Z < ۵$$

$$\left|\frac{e^Z(\frac{۳}{۲})^{n+۱}}{(n+۱)!}\right| < \frac{۳^{n+۱}\times ۵}{(n+۱)!\ ۲^{n+۱}}$$

$$\frac{۵\times ۳^{n+۱}}{(n+۱)!\ ۲^{n+۱}} < ۰/۰۱ \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{n+۱}(n+۱)! > ۵۰۰$$

به ازای $n=۷ \Leftarrow (\frac{۲}{۳})^۸\ ۸! = ۱۵۷۳ > ۵۰۰$

$$e^{\frac{۳}{۲}} = f(\frac{۳}{۲}) \approx P_۷(\frac{۳}{۲}) = ۱+\frac{۳}{۲}+\frac{(\frac{۳}{۲})^۲}{۲!}+\frac{(\frac{۳}{۲})^۳}{۳!}+\frac{(\frac{۳}{۲})^۴}{۴!}$$

$$+\frac{(\frac{۳}{۲})^۵}{۵!}+\frac{(\frac{۳}{۲})^۶}{۶!}+\frac{(\frac{۳}{۲})^۷}{۷!} = ۴/۶۲$$

---

۲۲) $\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۱۰}$ و ۰/۰۱

$$\operatorname{Sin}x = x+\frac{-x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\frac{x^۷}{۷!}+\dots+\frac{(-۱)^n\ x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}+\frac{(-۱)^n\ x^{۲n+۱}\operatorname{Sin}Z}{(۲n+۱)!}$$

$$۰ < Z < \frac{\pi}{۱۰} \Rightarrow ۰ < \operatorname{Sin}Z < \frac{۱}{۲}$$

$$\left|\frac{\operatorname{Sin}Z(\frac{\pi}{۱۰})^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}\right| < \frac{\pi^{۲n+۱}}{۱۰^{۲n+۱}\ (۲n+۱)!(۲)}$$

$$\frac{\pi^{۲n+۱}}{۱۰^{۲n+۱}\ (۲n+۱)!(۲)} < ۰/۰۰۱ \Rightarrow \frac{(۲n+۱)\ ۱۰^{۲n+۱}}{\pi^{۲n+۱}} > ۵۰۰$$

$$n = ۲ \Rightarrow \frac{۱۰^۵\times ۵!}{\pi^۵} > ۵۰۰$$

$$\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۱۰} \approx P_۲(\frac{\pi}{۱۰}) = \frac{\pi}{۱۰} = ۰/۳۱۴$$

---

۲۳) $\operatorname{Cos}\frac{۷\pi}{۳۶}$ و ۰/۰۰۱

$$\operatorname{Cos}x = ۱-\frac{x^۲}{(۲)!}+\frac{x^۴}{۴!}-\frac{x^۶}{۶!}+\dots+\frac{(-۱)^n\ x^{۲n}}{(۲n)!}+\frac{(-۱)^n\ x^{۲n}\operatorname{Cos}Z}{(۲n)!}$$

$$۰ < Z < \frac{۷\pi}{۳۶} \Rightarrow ۰ < \operatorname{Cos}Z < ۱$$

$$\left|\frac{(\frac{۷\pi}{۳۶})^{۲n}\operatorname{Cos}Z}{(۲n)!}\right| < \frac{(۷\pi)^{۲n}}{(۳۶)^{۲n}\ (۲n)!}$$

$$\frac{(\text{۷}\pi)^{\text{۲}n}}{(\text{۳۶})^{\text{۲}n}(\text{۲}n)!} < \text{۰/۰۰۱} \Rightarrow \frac{(\text{۳۶})^{\text{۲}n}(\text{۲}n)!}{(\text{۷}\pi)^{\text{۲}n}} > \text{۱۰۰۰}$$

$$\text{Cos}\,\frac{\text{۷}\pi}{\text{۳۶}} \approx P_{\text{۲}}\left(\frac{\text{۷}\pi}{\text{۳۶}}\right) = \text{۱}-\frac{\left(\frac{\text{۷}\pi}{\text{۳۶}}\right)^{\text{۲}}}{\text{۲}!} = \text{۰/۸۱۳}$$

آزمون چهار گزینه‌ای فصل اول

۱ـ مقدار $\lim_{x \to ۰} \frac{Sinx - ۲x}{x}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۱- د) ۲

۲ـ مقدار $\lim_{x \to ۱} \frac{e - e^x}{x - ۱}$ برابر است با:

الف) e ب) ۰ ج) e- د) ∞

۳ـ مقدار $\lim_{x \to -۲} \frac{Ln\,|x+۱|}{x+۲}$ برابر است با:

الف) ۱ ب) ۱- ج) ۰ د) ۲

۴ـ مقدار $\lim_{y \to ۰} \frac{Sin^{-۱}y}{y}$

الف) ۱- ب) ۰ ج) ۱ د) ∞

۵ـ مقدار $\lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۲x - ۳}{x - ۳}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۴ د) ∞

۶ـ مقدار $\lim_{x \to ۰} \frac{Secx - ۱}{x}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۱- د) ∞

۷ـ مقدار $\lim_{x \to ۱} \frac{۳e - ۳e^x}{۴x - ۴}$ برابر است با:

الف) $\frac{۳}{۴}e$ ب) ۰ ج) ۳e- د) $-\frac{۳}{۴}e$

۸ـ مقدار $\lim_{x \to ۰} \frac{tanx}{e^x - ۱}$ برابر است با:

الف) ۱ ب) ۱- ج) ۰ د) ∞+

۹ـ مقدار $\lim_{x \to ۰^-} \frac{Sinx}{\sqrt{-x}}$

الف) ۱ ب) ۰ ج) ۱- د) $-\frac{۱}{۲}$

۱۰ـ مقدار $\lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{2x}+6x}{1-\cos x}$ برابر است با:

الف) ۷ ب) ۶ ج) ۰ د) $+\infty$

۱۱ـ مقدار $\lim_{x\to +\infty} x^2e^{-x}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۱+e د) ۱-e

۱۲ـ مقدار $\lim_{x\to 0} x^3 \ln x$ برابر است با:

الف) ۱- ب) ۱+ ج) $+\infty$ د) ۰

۱۳ـ مقدار $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^{10}}$ برابر است با:

الف) !۱۰ ب) $\frac{1}{10!}$ ج) ۰ د) ۱

۱۴ـ مقدار $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{2x^2-x-1}$ برابر است با:

الف) Lna-Lnb ب) a-b ج) Ln(a-b) د) ۰

۱۵ـ مقدار $\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{2x^2-x-1}$ برابر است با:

الف) $\frac{1}{2}$ ب) ۱- ج) ۱+ د) ۰

۱۶ـ مقدار $\lim_{x\to 0^-} (x+1)^{\cot x}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) e ج) ۱ د) e^{-1}

۱۷ـ مقدار $\lim_{x\to 3} (x-2)^{\frac{1}{x-3}}$ برابر است با:

الف) e^3 ب) e ج) ۰ د) ۱

۱۸ـ مقدار $\lim_{x\to \infty} x^3e^{-x}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۶ ج) ۱ د) ∞

۱۹ـ مقدار $\lim_{x\to +\infty} (1-\frac{1}{x})^x$ برابر است با:

الف) ۱ ب) e ج) ۱- د) e^{-1}

۲۰ـ مقدار $\lim_{x\to ۱} \left(\frac{x}{x-۱} - \frac{۱}{Lnx}\right)$ برابر است با:

الف) ۱− ب) ۱ ج) $-\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$

۲۱ـ مقدار $\int_{۰}^{\infty} \frac{۳dx}{e^x+e^{-x}}$ برابر است با:

الف) $\frac{\pi}{۴}$ ب) $\frac{\pi}{۲}$ ج) $\frac{۳\pi}{۴}$ د) $\frac{۳\pi}{۲}$

۲۲ـ مقدار $\int_{۰}^{\frac{۳}{۲}} \frac{dx}{\sqrt{۳x-x^۲}}$ برابر است با:

الف) $\frac{\pi}{۲}$ ب) $-\pi$

ج) $Sin^{-۱}\frac{۳}{۲}$ د) این انتکرال واگراست.

۲۳ـ مقدار $\int_{۳}^{\infty} \frac{dx}{(x-۱)^۳}$ برابر است با:

الف) $\frac{۱}{۸}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $-\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{۱}{۲}$

۲۴ـ کدام انتگرال زیر همگراست؟

الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{۱+x^۲}$ ب) $\int_{۰}^{\infty} Cosx\, dx$ ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} Cosx\, dx$ د) $\int_{-\infty}^{۰} Cosx\, dx$

۲۵ـ مقدار $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ برابر است با:

الف) $\frac{\pi}{۲}$ ب) ۰ ج) ۱ د) $-\frac{\pi}{۲}$

۲۶ـ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ برابر با کدام یک از عبارات زیر نیست؟

الف) $\int_{۰}^{\infty} f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{۰} f(x)\, dx$

ب) $\int_{۵}^{\infty} f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{۵} f(x)\, dx$

ج) $\lim \int_{۰}^{t} f(x)\, dx + \lim \int_{-t}^{۰} f(x)\, dx$

د) $\lim_{x\to\infty} \int_{-t}^{+t} f(x)\, dx$

۲۷ـ کدام انتگرال زیر همگراست؟

الف) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ ب) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x}$ ج) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ د) $\int_{+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

۲۸ـ مقدار $\int_{-\infty}^{1} e^{2x}\, dx$ برابر است با:

الف) e^3 ب) $3e^3$

ج) $\frac{1}{2}e^3$ د) این انتگرال واگراست.

۲۹ـ مقدار $\int_{1}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\, dx$ برابر است با:

الف) -2 ب) ۱

ج) ۰ د) این انتگرال واگراست

۳۰ـ مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2dt}{1+t^2}$ برابر است با:

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) 2π د) π

۳۱ـ مقدار $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\, dx$ برابر است با:

الف) ۲ ب) ۰

ج) ۱ د) این انتگرال واگراست.

۳۲ـ چند جمله‌ای دوم مک لورن $f(x)=\frac{1}{x+1}$ برابر است با:

الف) $1-x+x^2$ ب) $1+x-x^2$ ج) $1-x$ د) $1-2x+2x^2$

۳۳ـ چند جمله‌ای دوم $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ حول ۰ برابر است با:

الف) $1-x+x^2$ ب) $1-x$ ج) $1+x^2$ د) $1+x^2+x^4$

۳۴ـ چند جمله‌ای دوم مک لورن $f(x)=\sin x^2$ کدام است؟

الف) x^2 ب) $\frac{1}{2}+x^2$ ج) $2x+x^2$ د) $1+x^2$

۳۵ـ مقدار تقریبی e با استفاده از چند جمله‌ای پنجم مک لورن e^x برابر است با:

الف) $\frac{163}{60}$ ب) $\frac{5}{2}$ ج) ۳ د) ۲

پاسخ آزمون چهار گزینه‌ای فصل اول

۱ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\text{Sinx}-۲x}{x} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال: $$\lim_{x\to ۰} \frac{\text{Cosx}-۲}{۱} = -۱$$

۲ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{e-e^x}{x-۱} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال: $$\lim_{x\to ۱} \frac{-e^x}{۱} = -e^{+۱}$$

۳ـ گزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$\lim_{x\to -۲} \frac{\text{Ln}\,|x+۱|}{x+۲} = \frac{۰}{۰}$$

هوپیتال: $$\lim_{x\to -۲} \frac{۱}{x+۱} = -۱$$

۴ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$\lim_{y\to ۰} \frac{\text{Sin}^{-۱}y}{y} = \frac{۰}{۰}$$

هوپیتال: $$\lim_{y\to ۰} \frac{۱}{\sqrt{۱-y^۲}} = +۱$$

۵ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۲x-۳}{x-۳} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۳} \frac{۲x-۲}{۱} = ۴$$

۶ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\text{Secx}-۱}{x} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\text{Secx.tanx}}{x} = ۰$$

۷ـگزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{۳e - ۳e^{x}}{۴x - ۴} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال: $$\lim_{x \to ۱} \frac{-۳e^{x}}{۴} = -\frac{۳}{۴}e$$

۸ـگزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\tan x}{e^{x} - ۱} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال: $$\lim_{x \to ۰} \frac{۱ + \tan^{۲} x}{e^{x}} = ۱$$

۹ـگزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$\lim_{x \to ۰^{-}} \frac{\text{Sinx}}{\sqrt{-x}} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال: $$\lim_{x \to ۰^{-}} \frac{\text{Cosx}}{\frac{-۱}{۲\sqrt{-x}}} = ۰$$

۱۰ـگزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\lim_{x \to ۰^{+}} \frac{xe^{۲x} + ۶x}{۱ - \text{Cosx}} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال: $$\lim_{x \to ۰} \frac{e^{۲x} + ۲xe^{۲x}}{+\text{Sinx}} = \frac{۷}{۰} = \infty$$

۱۱ـگزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\lim_{x \to \infty} x^{۲}\text{-}e^{-x} = \infty . ۰$$

$$\lim_{x \to \infty} x^{۲}e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{۲}}{e^{x}} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال اول: $$\lim_{x \to \infty} \frac{۲x}{e^{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$ مبهم

هوپیتال دوم: $$\lim_{x \to \infty} \frac{۲}{e^{x}} = \frac{۲}{\infty} = ۰$$

۱۲ـ گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰} x^{۳}Lnx = ۰\times\infty \to \lim_{x\to ۰} x^{۳}Lnx = \lim_{x\to ۰}\frac{Lnx}{x^{-۳}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ مبهم}$$

$$\text{هوپیتال}: \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{x}}{-۳x^{-۴}} = \lim_{x\to ۰} -\frac{x^{۳}}{۳} = ۰$$

۱۳ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Lnx}{(x+۱)^{۱۰}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{هوپیتال}: \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۱۰(x+۱)^{۹}} = \lim_{x\to\infty}\frac{۱}{۱۰x(x+۱)^{۹}} = \frac{۱}{\infty} = ۰$$

۱۴ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{a^{x}-b^{x}}{x} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\text{هوپیتال}: \lim_{x\to ۰}\frac{a^{x}Ln a - b^{x}Lnb}{۱} = Lna - Lnb$$

۱۵ـ گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x+Lnx}{۲x^{۲}-x-۱} = \frac{۱-۱+Ln۱}{۲-۱-۱} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\text{هوپیتال}: \lim_{x\to ۱}\frac{-۱+\frac{۱}{x}}{۴x-۱} = \frac{۰}{۳} = ۰$$

۱۶ـ گزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰}(x+۱)^{cotx} = ۱^{(\infty)} \text{ مبهم}$$

$$y = (x+۱)^{cotx} \Rightarrow Lny = cotx.Ln(x+۱)$$

$$\lim_{x\to ۰} Lny = \lim_{x\to ۰}\frac{Ln(x+۱)}{tanx} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\text{هوپیتال}: \lim_{x\to ۰^{-}}\frac{\frac{۱}{x+۱}}{۱+tan^{۲}x} = ۱$$

$$\lim_{x\to ۰^{-}} y = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۰^{-}}(x+۱)^{cotx} = e$$

۱۷ـ گزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$y=(x-۲)^{\frac{۱}{x-۳}} \Rightarrow Lny=\frac{۱}{x-۳}Ln(x-۲)$$

$$\lim_{x\to ۳} Lny=\lim_{x\to ۳}\frac{Ln(x-۲)}{x-۳}=\frac{۰}{۰}$$

$$\text{هوپیتال}:\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{x-۲}}{۱}=۱$$

$$\lim y=e^{\lim\limits_{x\to ۳}\frac{Ln(x-۲)}{x-۳}}=e^{۱}=e$$

۱۸ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty} x^{۳}e^{-x}=\infty=۰$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{۳}e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۳}}{e^{x}}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}$$

$$\text{هوپیتال اول}:\lim_{x\to\infty}\frac{۳x^{۲}}{e^{x}}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}$$

$$\text{هوپیتال دوم}:\lim_{x\to\infty}\frac{۶x}{e^{x}}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}$$

$$\text{هوپیتال سوم}:\lim_{x\to\infty}\frac{۶}{e^{x}}=\frac{۶}{\infty}=۰$$

۱۹ـ گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}(۱-\frac{۱}{x})^{x}=۱^{\infty}\ \text{مبهم}$$

$$y=(۱-\frac{۱}{x})^{x}\rightarrow Lny=x\,Ln(۱-\frac{۱}{x})$$

$$\lim_{x\to\infty} Lny=\lim_{x\to\infty}\frac{Ln(۱-\frac{۱}{x})}{\frac{۱}{x}}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$\text{هوپیتال}:\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{۱}{x^{۲}}}{۱-\frac{۱}{x}}}{-\frac{۱}{x^{۲}}}=-۱$$

$$\lim_{x\to\infty} Lny=۱\Rightarrow\lim_{x\to\infty} y=e^{-۱}=\frac{۱}{e}$$

۲۰ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱}{Lnx}-\frac{x}{x-۱}\right)=\infty-\infty$$ مبهم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱-xLnx}{(x-۱)(Lnx)}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

هوپیتال اول: $$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-Lnx-۱}{\frac{x-۱}{x}+Lnx}=\frac{۰}{۰}$$

هوپیتال دوم: $$\lim_{x\to ۱}\frac{-\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{x}}=-\frac{۱}{۲}$$

۲۱ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$\int_۰^\infty\frac{۳dx}{e^x+e^{-x}}=\int_۰^\infty\frac{۳dx}{e^{-x}\,(e^{۲x}+۱)}=\int_۰^\infty\frac{۳e^x\,dx}{{e^x}^۲+۱}$$

$$e^x=u\to e^x\,dx=du$$

$$\int_۰^\infty\frac{۳u\,du}{u^۲+۱}=۳\operatorname{Arc\,tan}u$$

$$\int_۰^\infty\frac{۳dx}{e^x+e^{-x}}=۳\operatorname{Arc\,tan}(e^x)\Big]_۰^\infty=\frac{۳\pi}{۴}$$

۲۲ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\int_۰^{\frac{۳}{۲}}\frac{dx}{\sqrt{۳x-x^۲}}=\int_۰^{\frac{۳}{۲}}\frac{dx}{-(x-\frac{۳}{۲})^۲+\frac{۹}{۴}}=\operatorname{Sin}^{-۱}\left(\frac{x-\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}}\right)\Big]_۰^{\frac{۳}{۲}}=\frac{\pi}{۲}$$

۲۳ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\int_۳^\infty\frac{dx}{(x-۱)^۳}=\int_۳^\infty(x-۱)^{-۳}\,dx=-\frac{۱}{۲}(x-۱)^{-۲}\Big]_۳^\infty=\frac{۱}{۸}$$

۲۴ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{۱+x^۲}=\operatorname{Arc\,tan}x\Big]_{-\infty}^{+\infty}=\pi$$ همگرا

$\int_{0}^{\infty} \cos x\, dx + \text{Sinx}\Big]_{0}^{\infty} = +\text{Sin}(\infty)$ واگرا

$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\, dx = \text{Sinx}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \text{Sin}(\infty) - \text{Sin}(-\infty)$ واگرا

$\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx = \text{Sinx}\Big]_{-\infty}^{0} = -\text{Sin}(-\infty)$ واگرا

۲۵ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \text{Arc Sinx}\Big]_{0}^{1} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

۲۶ـ گزینه‌ی (د) صحیح است.

۲۷ـ گزینه‌ی (د) صحیح است.

$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^{2}} = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{0} = \infty$ واگرا

$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2}} = -\text{Lnx}\Big]_{0}^{\infty} = \infty$ واگرا

$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = -\text{Lnx}\Big]_{-1}^{0} = \infty$ واگرا

$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{2}} = -\frac{1}{x}\Big]_{1}^{\infty} = +1$ همگرا

۲۸ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{1} e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} \times 3e^{3x}\Big]_{-\infty}^{1} = \frac{1}{3}e^{3}$$

۲۹ـ گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\int_{+1}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big]_{+1}^{\infty} = \infty$$

۳۰ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2dt}{1+t^{2}} = 2\text{Arc tant}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

۳۱ـ گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\int_{-۱}^{+۱}\frac{dx}{x^{۲}}=\int_{-۱}^{۰}\frac{dx}{x^{۲}}+\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x^{۲}}=-\frac{۱}{M}\Big]_{-۱}^{۰}+(-\frac{۱}{M})\Big]_{۰}^{+۱}=\infty$$

۳۲ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$f(x)=\frac{۱}{x+۱}\ ,\ f'(x)=\frac{-۱}{(x+۱)^{۲}}\quad ,\quad f''(x)=\frac{۲}{(x+۱)^{۳}}$$

$$P_{۲}(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)(x-۰)}{۱!}+\frac{f''(x)(x-۰)^{۲}}{۲!}=\dots$$

$$P_{۲}(x)=۱+\frac{-x}{۱!}+\frac{۲x^{۲}}{۲!}=۱-x+x^{۲}$$

۳۳ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$f(x)=\frac{۱}{۱-x^{۲}}\quad ,\ f'(x)=\frac{۲x}{(۱-x^{۲})^{۲}}\quad ,\ f''(x)=\frac{۲(۱-x^{۲})+۸x^{۲}}{(۱-x^{۲})^{۴}}$$

$$P_{۲}(x)=۱+\frac{۰x}{۱!}+\frac{۲x^{۲}}{۲!}=۱+x^{۲}$$

۳۴ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$f(x)=\text{Sin}x^{۲}\quad ,\ f'(x)=۲x\ \text{Cos}x^{۲}$$

$$f''(x)=۲\text{Cos}x^{۲}-۴x^{۲}\text{Sin}x^{۲}$$

$$P_{۲}(x)=۰+\frac{۰x}{۱!}+\frac{۲x^{۲}}{۲!}=x^{۲}$$

۳۵ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$f(x)=e^{x}\quad ,\quad f'(x)=e^{x}\quad ,\quad f''(x)=e^{x}\ ,\ \dots\ f^{(۵)}(x)=e^{x}$$

$$e^{x}=f(۰)+f'(۰)+\dots+\frac{f^{(۵)}(۰)x^{۵}}{۵!}$$

$$e^{x}=۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\frac{x^{۴}}{۴!}+\frac{x^{۵}}{۵!}$$

$$e=۱+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۱۲۰}$$

$$e=\frac{۳۲۶}{۱۲۰}=\frac{۱۶۳}{۶۰}$$

تمرینات فصل دوم

۱.۲) دنباله نامتناهی:

همگرایی یا واگرایی دنباله‌های تمرین‌های ۱ تا ۲۴ را که جملهٔ عمومی آنها داده شده است، تعیین کنید. در صورت همگرا بودن، حد دنباله را بیابید.

۱) $a_n = \frac{n}{۳n+۲}$

همگرا به $\frac{۱}{۳}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{۳n+۲} = \frac{۱}{۳} \neq \infty$$

---

۲) $a_n = \frac{۷-۴n^۲}{۳+۲n^۲}$

همگرا به ۲-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۷-۴n^۲}{۳+۲n^۲} = -۲$$

---

۳) $a_n = -۵$

همگرا به ۵-

$$\lim_{n\to\infty} -۵ = -۵$$

---

۴) $a_n = \frac{(۲n-۱)(۳n+۱)}{n^۳+۱}$

همگرا به صفر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(۲n-۱)(۳n+۱)}{n^۳+۱} = \lim_{n\to\infty} \frac{۶n^۲}{n^۳} = ۰$$

---

۵) $a_n = \frac{۲}{\sqrt{n^۲+۹}}$

همگرا به صفر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲}{\sqrt{n^۲+۹}} = ۰$$

---

۶) $a_n = (-۱)^{n+۱} \frac{۳n}{n^۲+۴n+۵}$

همگرا به صفر

$$\lim_{n\to\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{۳n}{n^۲+۴n+۵} = ۰$$

---

۷) $a_n = ۱+(۰/۱)^n$

همگرا به ۱

$$\lim_{n\to\infty} ۱+(۰/۱)^n = ۱+(۰.۱)^\infty = ۱+۰ = ۱$$

۸) $a_n = ۱+(-۱)^{n+۱}$

واگرا

$$\lim_{n\to\infty}\left[۱+(-۱)^{n+۱}\right] = ۱+\infty=\infty$$

---

۹) $a_n = ۴-\frac{۲}{n}$

همگرا به ۴

$$\lim_{n\to\infty}(۴-\frac{۲}{n})=۴$$

---

۱۰) $a_n = \frac{\sqrt{n}+۱}{\sqrt{n}-۱}$

همگرا به ۱

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+۱}{\sqrt{n}-۱}=+۱$$

---

۱۱) $a_n = (\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})$

مبهم

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})=\infty-\infty$$

$$\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}\times\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}=\frac{n+۱-n}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}=\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$$

همگرا به صفر

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}=۰$$

---

۱۲) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})=\infty-\infty$$ مبهم

طبق حل مسئله ۱۱ $\sqrt{n}(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})=\sqrt{n}\,(\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}})$

همگرا به $\frac{۱}{۲}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{۲\sqrt{n}}=\frac{۱}{۲}$$

---

۱۳) $a_n = \frac{۲^{n+۱}}{۵^{n+۳}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲^{n+۱}}{۵^{n+۳}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲\times۲^n}{۵^۳\times۵^n}=\frac{۲}{۱۲۵}$$

همگرا به صفر

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{۲}{۵})^n=\frac{۲}{۱۲۵}\times۰=۰$$

---

۱۴) $a_n = (-۱)^n n^۲$

واگرا

$$\lim_{n\to\infty}(-۱)^n n^۲=\infty$$

۱۵) $a_n = \frac{Ln\, n}{n^2}$

مبهم $\lim_{n\to\infty} \frac{Lnn}{n^2} = \frac{\infty}{\infty}$

همگرا به صفر — هوپیتال: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$

---

۱۶) $a_n = \frac{e^n}{n}$

مبهم $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = \frac{\infty}{\infty}$

واگرا — هوپیتال: $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1} = e^\infty = \infty$

---

۱۷) $a_n = (1+\frac{1}{3n})^n$

مبهم $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{3n})^n = 1^\infty$

$\lim_{n\to\infty} Lna_n = \lim_{n\to\infty} Ln(1+\frac{1}{3n})^n = \lim_{n\to\infty} nLn(1+\frac{1}{3n})^n$

مبهم $\lim_{n\to\infty} \frac{Ln(1+\frac{1}{3n})}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{3n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(1+\frac{1}{3n})} = \frac{1}{3}$

همگرا به $e^{\frac{1}{3}}$ — $Ln\, a_n = \frac{1}{3} \Rightarrow a_n = e^{\frac{1}{3}}$

---

۱۸) $a_n = (1+\frac{2}{n})^n$

نکته: $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{bn})^n = e^{\frac{a}{b}}$

همگرا به e^2 — $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^n = e^2$

---

۱۹) $a_n = \frac{1-(1+\frac{1}{n})^2}{1-(1+\frac{1}{n})}$

مبهم $\lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+\frac{1}{n})^2}{1-(1+\frac{1}{n})} = \frac{1-(1)^2}{1-(1)} = \frac{0}{0}$

همگرا به ۲ — هوپیتال: $\lim_{n\to\infty} \frac{-2(1+\frac{1}{n})(-\frac{1}{n^2})}{-(-\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} 2(1+\frac{1}{n}) = 2$

۲۰) $a_n = \sqrt[n]{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$

همگرا به ۱

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5}\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = 1\times 1 = 1$$

---

۲۱) $a_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2n}$

همگرا به $\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{2n} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

---

۲۲) $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$

همگرا به صفر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Sin}^2 n}{n} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{-1<n<+1}{n} = \frac{14}{\infty} = 0$$

در هر حالت Sin n عددی کراندار بین ۱ - , ۱ + است.

---

۲۳) $a_n = \frac{1}{n^2(n^2+1)}$

همگرا به صفر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(n^2+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

---

۲۴) $a_n = \frac{1}{ne^n}$

همگرا به صفر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{ne^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

حدهای زیر را محاسبه کنید؟

۲۵) $\lim_{n\to\infty} e^{-2n}$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2n} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

---

۲۶) $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

---

۲۷) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^b}$

واگرا

هوپیتال : $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^b} = \infty$

---

۲۸) $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Ln}n}{\sqrt{n}}$

مبهم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Ln}n}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

واگرا $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$

---

۲۹) $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{2k}$

مبهم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{2k}=\lim_{n\to\infty}2k^{\frac{1}{k}}=\infty^{0}$

$\lim \mathrm{Ln}\,a_n=\lim_{k\to\infty}\mathrm{Ln}\sqrt[k]{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}\,2k}{k}=\frac{\infty}{\infty}$

همگرا به ۰ $\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{2k}}{1}=0$: هوپیتال

---

۳۰) $\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}e^x\,dx$

$\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}e^x\,dx=\lim_{n\to\infty}e^x\Big|_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\ \lim_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}}-e^{-\frac{1}{n}})=1-1=0$

همگرا به صفر

---

۳۱) $\lim_{x\to\infty}\int_{1+\frac{1}{n}}^{2-\frac{1}{n}}\frac{1}{x}dx$

$\lim_{n\to\infty}\int_{1+\frac{1}{n}}^{2-\frac{1}{n}}\frac{1}{x}dx=\lim \mathrm{Ln}x\Big|_{1+\frac{1}{n}}^{2-\frac{1}{n}}$

همگرا به $\mathrm{Ln}2$ $\lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{n})-\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{n})\right]=\mathrm{Ln}(2)=\mathrm{Ln}(1)=\mathrm{Ln}(2)$

---

۳۲) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{0/05}{n})^n$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{0/05}{n})^n=e^{0/05}$

با استفاده از قضیهٔ ۲.۱.۲۷، ثابت کنید که دنباله‌های زیر همگرا هستند.

۳۳) $(\frac{2^n}{n!})$

دنباله نزولی $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!}}=\frac{n+1}{2}\ge 1$

دنباله کران‌دار است. با توجه به اینکه تمام جملات دنباله مثبت است و $a_1=2$ می‌باشد، دنباله نزولی است. پس می‌توان نتیجه گرفت $|a_n|\le 2$ که نشان می‌دهد، دنباله همگراست.

۳۴) $(\frac{3n-1}{4n+5})$

کراندار صعودی $a_n = \frac{3n-1}{4n+5}\ ,\ a'_n = \frac{19}{(4n+5)^2} > 0$

$|a_n| \le 1 \to \left|\frac{3n-1}{4n+5}\right| \le 1 \Rightarrow 4n+5 \ge 3n-1 \Rightarrow n \ge -6$

رابطه بازگشتی است و $|a_n| \le 1$ برقرار است. پس همگراست.

---

۳۵) $(\frac{e^n}{1+e^n})$

دنباله صعودی $a_n = \frac{e^n}{1+e^n}\ ,\ a'_n = \frac{e^n}{(1+e^n)^2} > 0$

$0 < e^n < e^n + 1 \to 0 < \frac{e^n}{1+e^n} < 1 \Rightarrow$ کراندار

پس همگراست.

---

۳۶) $(\frac{e^n}{1+e^{2n}})$

نزولی $a_n = \frac{e^n}{1+e^{2n}}\ ,\ a'_n = \frac{e^n(1-e^{2n})}{(1+e^{2n})^2} < 0$

$0 < e^n < 1+e^{2n} \to 0 < \frac{e^n}{1+e^{2n}} < 1$ کراندار

پس همگرا نیز است

---

۳۷) $(\frac{n}{2^n})$

نزولی $a_n = \frac{n}{2^n}\ ,\ a'_n = \frac{1-n.\text{Ln}2}{2^n} < 0$

$0 < n < 2^n \to 0 < \frac{n}{2^n} < 1$ کراندار

پس همگرا نیز است

---

۳۸) $((1+\frac{1}{n})^2)$

نزولی $a_n = (1+\frac{1}{n})^2\ ,\ a'_n = 2(1+\frac{1}{n})(-\frac{1}{n^2}) < 0$

چون تمام جملات دنباله مثبت و $a_1 = 4$ است و از طرفی دنباله نزولی است پس $|a_n| \le 4$ و دنباله کراندار است.

---

۳۹) $(2-\frac{1}{n})$

$a_n = 2-\frac{1}{n}\ ,\ a'_n = \frac{1}{n^2} > 0$ صعودی

$(۲-\frac{۱}{n}) \leq ۲ \rightarrow ۲-\frac{۱}{n} \leq ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{n} \leq ۰$

رابطهٔ $-\frac{۱}{n} \leq ۰$ همیشه برابر است پس $|a_n| \leq ۲$ و رابطه بازگشتی است. دنباله کراندار است.

---

۴۰) $(\tan\frac{\pi}{۲n+۱})$

$a_n = \tan\frac{\pi}{۲n+۱}$, $a'_n = \frac{-۲\pi}{(۲n+۱)^۲}(۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۲n+۱})) < ۰$ نزولی

چون تمام جملات مثبت است (در ربع اول، تانژانت مثبت است) و دنباله نزولی است، پس دنباله کراندار می‌باشد.

۲.۲) سری‌های نامتناهی

در تمرین‌های ۱ تا ۸ مجموعهای جزئی اول تا چهارم هر سری را پیدا کنید و فرمولی برای S_n بر حسب n بنویسید. سپس با تعیین حد S_n، همگرایی یا واگرایی هر سری را مشخص کنید.

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} ۱$

$S_۱ = ۱, S_۲ = ۲, S_۳ = ۳, S_۴, ... S_n = n$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ سری واگراست

---

۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} n$

$S_۱ = ۱, S_۲ = ۱+۲=۳, S_۳ = ۱+۲+۳=۶, S_۴ = ۱+۲+۳+۴=۱۰$

$S_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+۱)}{۲} = \infty$ سری واگراست

---

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳}{۴^{n-۱}}$

$S_۱ = \frac{۳}{۴^۰} = ۳, S_۲ = \frac{۳}{۴^{۲-۱}} = \frac{۳}{۴}$

$S_۳ = \frac{۳}{۴^{۳-۱}} = \frac{۳}{۱۶}, S_۴ = \frac{۳}{۴^{۴-۱}} = \frac{۳}{۶۴}$

$a_۱=۳\,,\,d=\frac{۱}{۴}$ سری هندسی

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۳(۱-(\frac{۳}{۴}))^n}{۱-\frac{۳}{۴}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{۳(۱-۰)}{۱-\frac{۳}{۴}}=۱۲$ سری همگرا به ۱۲ می‌باشد

---

۴) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n}.۳^{n-۱}$

$$\sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n}.۳^{n-۱}=\frac{۳^n}{۳\times ۲^n}=\frac{۳^{n-۱}}{۲\times ۲^{n-۱}}=\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲})^{n-۱}$$

$q=\frac{۳}{۲}\,,\,a_۱=\frac{۱}{۳}$ سری هندسی با

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{\frac{۱}{۳}(۱-(\frac{۳}{۲})^n)}{۱-\frac{۳}{۲}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=-\frac{۲}{۳}(۱-(\frac{۳}{۲})^{\infty})=\infty$ سری واگراست

---

۵) $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n$

$S_۱=۱,S_۲=۰,S_۳=۱\,,...$ $\begin{cases} n\to ۱ & \text{فرد} \\ n\to ۰ & \text{زوج} \end{cases}$

چون جواب منحصر به فرد نیست پس حد موجود نبوده و سری واگراست.

---

۶) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} Ln\frac{n}{n+۱}$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} Ln\frac{n}{n+۱}=\sum_{n=۱}^{\infty} Ln(n)-\sum_{n=۱}^{\infty} Ln(n+۱)\quad,\ a_n=Lnn$$

$S_n=Ln۱-Ln(\infty+۱)=Ln۱-Ln\infty=۰-\infty=\infty$ سری واگراست

---

۷) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{(۴n-۳)(۴n+۱)}$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{(۴n-۳)(۴n+۱)}=\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴n-۳}-\frac{۱}{۴n+۱})=$$

$$\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۴n-۳}-\frac{۱}{۴n+۱})\quad,\ a_n=\frac{۱}{۴n-۳}$$

$S_n=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۴(\infty)+۱})=\frac{۱}{۲}$ سری همگرا به $\frac{۱}{۲}$ است

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$

$a_n = \frac{1}{n^3}$

$S_n = 1 - \frac{1}{[(\infty)+1]^3} = 1$ سری همگرا به یک می‌باشد

---

۹) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{5})$

$\lim_{n\to\infty} (-\frac{1}{5}) = -\frac{1}{5} \neq 0$ سری واگراست

---

۱۰) $\sum_{n=1}^{\infty} (2+\frac{1}{n})$

$\lim_{n\to\infty} (2+\frac{1}{n}) = 2 \neq 0$ سری واگراست

---

۱۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(0/2)^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(0/2)^n} = 1 \neq 0$ سری واگراست

---

۱۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{Ln(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{Ln(n+1)} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

---

۱۳) $\sum_{n=1}^{\infty} Sinn\pi$

$\lim_{n\to\infty} Sinn\pi =$ حد موجود نیست $\Rightarrow$ سری واگراست

---

۱۴) $\sum_{n=1}^{\infty} n.Sin\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} nSin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}$ مبهم

هوپیتال : $\lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2} Cos\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0$ سری واگراست

---

۱۵) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^n$

$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2})^n = \infty$ سری واگراست

۱۶) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{n})$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{n})=(1)\mathrm{Ln}(1)=0$

سری همگراست یا واگرا (مشخص نیست)

تعیین کنید که از سری‌های زیر کدامها همگرا هستند و در صورت همگرا بـودن مجموع آنها را بیابید؟

۱۷) $\sum_{n=1}^{\infty}5(\frac{3}{7})^{n}$

سری هندسی و $q=\frac{3}{7}$, $a_1=\frac{15}{7}$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{15}{7}(1-(\frac{3}{7})^n)}{1-\frac{3}{7}}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{15}{4}$ سری همگرا به $\frac{15}{4}$

---

۱۸) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{7}{3})^{n}$

سری هندسی و $q=\frac{7}{3}$, $a_1=\frac{7}{3}$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{7}{3}(1-(\frac{7}{3})^n)}{1-\frac{7}{3}}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ سری واگراست

---

۱۹) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{n(n+1)})$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{n(n+1)})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n$ سری هندسی و $q=\frac{1}{4}$, $a_1=\frac{1}{4}$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{4})^n)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{4})^n)$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$ این سری همگرا به $\frac{1}{3}$ است

طبق قانون ادغام، همگرا به یک است. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{\infty+1}=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{n(n+1)})=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

۲۰) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$\sum\frac{1}{4^n}$ سری هندسی و $q=\frac{1}{4}$ ، $a_1=\frac{1}{4}$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{4})^n)}{1-\frac{1}{4}}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$ همگرا به $\frac{1}{3}$ است

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Rightarrow$ واگراست

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{n}\right)=$ همگرا + واگرا = واگرا

کل سری واگراست

---

۲۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{2^n.5^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{2^n.5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n.5^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{2^n.5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$\sum\frac{1}{2^n}$ سری هندسی و $q=\frac{1}{2}$ ، $a=1$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-(\frac{1}{2})^n)}{(1-\frac{1}{2})}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$$

$\sum\frac{1}{5^n}$ سری هندسی، $q=\frac{1}{5}$ ، $a=1$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-(\frac{1}{5})^n)}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{2^n.5^n}=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$$

---

۲۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{2^{n+2}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{2^{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{2^2\times2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

سری هندسی $\Rightarrow$ $q=-\frac{5}{2}$ ، $a_1=-\frac{5}{8}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ سری واگراست

در تمرین‌های ۲۳ تا ۲۸، هر یک از اعداد اعشاری داده شده را به صورت یک کسر متعارفی بنویسید.

۲۳) ...۰/۹۹۹

$$۰/۹۹۹... = \frac{۹}{۱۰} + \frac{۹}{۱۰۰} + \frac{۹}{۱۰۰۰} + ...$$

$$q = \frac{۱}{۱۰} \;,\; a_۱ = \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow$$ سری هندسی

$$۰/۹۹۹... = \lim_{n\to\infty} \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} = ۱$$

---

۲۴) ۰/۷۲۷۲۷۲

$$۰/۷۲۷۲۷۲... = ۰/۷۲ + ۰/۰۰۷۲ + ۰/۰۰۰۰۷۲ + ...$$

$$q = \frac{۱}{۱۰۰} \;,\; a_۱ = \frac{۷۲}{۱۰۰}$$ سری هندسی و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۷۲}{۱۰۰}(۱-\frac{۱}{۱۰۰})^n}{۱-\frac{۱}{۱۰۰}} = \frac{۷۲}{۹۹}$$

---

۲۵) ۱/۹۹۹

$$۱/۹۹ = ۱ + ۰/۹ + ۰/۰۹ + ... = ۱ + (\underbrace{۰/۹ + ۰/۰۹ + ...}_{A})$$

$$q = \frac{۱}{۱۰} \;,\; a_۱ = ۰/۹ \Rightarrow$$ A : سری هندسی،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۰/۹(۱-(\frac{۱}{۱۰})^n}{۱-\frac{۱}{۱۰}} = ۱$$

$$۱/۹۹ = ۱ + (A) = ۱ + ۱ = ۲$$

---

۲۶) ...۱۲/۰۲۷۲۷

$$۱۲/۰۲۷۲۷... = ۱۲ + ۰/۲۷ + ۰/۰۰۰۲۷ + ...$$

$$= ۱۲ + (\underbrace{۰/۲۷ + ۰/۰۰۰۲۷ + ...}_{A})$$

$$۱۲/۰۲۷۲۷... = ۱۲ + \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۲۷}{۱۰۰}(۱-(\frac{۱}{۱۰۰})^n)}{۱-\frac{۱}{۱۰۰}} = ۱۲ + \frac{۲۷}{۹۹} = \frac{۱۲۱۵}{۹۹}$$

۲۷) ...۲/۵۶۱۲۳

$$۲/۵۶۱۲۳ = ۲/۵۶ + (\underbrace{۰/۰۰۱۲۳ + ۰/۰۰۰۰۰۱۲۳ + \dots}_{A})$$

$$q = \frac{۱}{۱۰۰۰} \;,\; a_۱ = ۰/۰۰۱۲۳ \Rightarrow$$ سری هندسی A

$$۲/۵۶۱۲۳ = ۲/۵۶ + \lim_{n\to\infty} \frac{۰/۰۰۱۲۳(۱-(\frac{۱}{۱۰۰۰})^n)}{۱-\frac{۱}{۱۰۰۰}} = ۲/۵۶ + \frac{۱۲۳}{۹۹۹۰۰} = \frac{۲۵۴۶۷}{۹۹۰۰}$$

---

۲۸) ...۰/۵۲۱

$$۰/۵۲۱\dots = \frac{۵۲۱}{۱۰۰۰} + \frac{۵۲۱}{۱۰۰۰۰۰۰} + \dots$$

$$q = \frac{۱}{۱۰۰۰} \;,\; a = \frac{۵۲۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow$$ سری هندسی

$$۰/۵۲۱ = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۵۲۱}{۱۰۰۰}(۱-(\frac{۱}{۱۰۰۰})^n)}{۱-\frac{۱}{۱۰۰۰}} = \frac{۵۲۱}{۹۹۹}$$

---

۲۹) نشان دهید که اگر $-۱ < t < +۱$، آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n t^n = \frac{۱}{۱+t}$

$$q = t \;,\; a = ۱ \Rightarrow$$ سری هندسی

$$\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n t^n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱(۱-(t)^n)}{۱+t} = \frac{۱}{۱+t}$$

---

۳۰) نشان دهید که اگر $-۱ < t < +۱$، آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n t^n = \frac{۱}{۱+t^۲}$

$$q = -t^۲ \;,\; a_۱ = ۱ \Rightarrow$$ سری هندسی

$$\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n t^{۲n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱(۱-(-t^۲)^n)}{۱-(-t^۲)} = \frac{۱}{۱+t^۲}$$

۳.۲) سری‌های با جملات نامنفی

با استفاده از آزمونهای این بخش، همگرایی یا واگرایی سری‌های ۱ تا ۲۹ را تعیین کنید.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$

$\sum \frac{1}{n^p} \begin{cases} p>1 & \text{همگرا} \\ p\le 1 & \text{واگرا} \end{cases}$

$\sum \frac{1}{n^3}$ همگرا، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ نیز همگراست (طبق آزمون مقایسه) $\quad \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$

---

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}$

طبق آزمون مقایسه $\quad \frac{1}{(3+2n)^2} < \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست، پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}$ نیز همگراست.

---

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

طبق آزمون مقایسه $\quad \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

---

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+5}$

طبق آزمون انتگرال $\quad \int_1^{\infty} \frac{1}{4x+5}dx = \frac{1}{4}\mathrm{Ln}(4x+5)]_1^{\infty} = \infty$

---

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}(n)}{n}$

طبق آزمون انتگرال $\quad \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}^2(x)]_1^{\infty} =$ واگراست

---

۶) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{Ln}n}}$

طبق آزمون انتگرال $\quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\mathrm{Ln}x}}dx = 2(\mathrm{Ln}(x)^{\frac{1}{2}})]_2^{\infty} = \infty$ واگراست

---

۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e(n)^2}$

آزمون مقایسه $\quad \frac{1}{e^{n^2}} < \frac{1}{e^n}$

آزمون انتگرال $\int \frac{1}{e^n}dx = \int \frac{1}{e^x}dx = -e^{-x}\Big]_1^{\infty} = -(0-e^{-1}) = \frac{1}{e}$

$\frac{1}{e}$ همگراست. پس $\frac{1}{e^{n^2}}$ نیز همگراست.

---

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Arctan}}{1+n^2}$

طبق آزمون انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{\text{Arctanx}}{1+x^2} = \frac{1}{2}(\text{Arctanx}^2]_1^{\infty} = \frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}) = \frac{3\pi^2}{16}$

همگراست

---

۹) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Sin}\frac{1}{n}$

$\text{Sin}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ رفتار هر دو سری $\sum_{n=1}\frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\text{Sin}\frac{1}{n}$ یکسان است. از طرفی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\text{Sin}\frac{1}{n}$ واگراست.

---

۱۰) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

انتگرال جزءبه‌جزء همگراست $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-x}dx = \frac{2}{e}$

---

۱۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

طبق آزمون مقایسه $\frac{1}{n3^n} < \frac{1}{3^n} = (\frac{1}{3})^n$

$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^2$ سری هندسی $a_1 = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{1}{3}$ پس $(\frac{1}{3})^n$ همگرا و درنتیجه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$ نیز همگراست.

---

۱۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$

$a_n = \frac{n}{10^n}\ ,\ b_n = \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا، پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$ نیز همگراست.

---

۱۳) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3+\text{Cosn}}{n^2+4}$

$\frac{3+\text{Cosn}}{n^2+4} \le \left|\frac{3+\text{Cosn}}{n^2+4}\right| \le \frac{|3| + |\text{Sosn}|}{|n^2+4|} \le \frac{3+1}{n^2+4}$

طبق آزمون مقایسه $\frac{4}{n^2+4} < \frac{4}{n^2} \Rightarrow \frac{3+\text{Cosn}}{n^2+4} \le 4.\frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا پس $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ نیز همگرا و درنتیجه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\mathrm{Cos}n}{n^2+4}$ نیز همگراست.

---

۱۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5+n^2+3}$

$$\frac{1}{n^5+n^2+3}<\frac{1}{n^5}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ طبق آزمون مقایسه همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5+n^2+3}$ نیز همگراست.

---

۱۵) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+4}$

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2+4}\ ,\ b_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}>1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+4}$$ همگراست

---

۱۶) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^5+3n^3+2}{n^8-n^4+2}$

$$a_n=\frac{3n^5+3n^3+2}{n^8-n^4+2}\ ,\ b_n=\frac{1}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(3n^5+3n^3+2)}{n^8-n^4+2}=3>0$$

پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^5+3n^3+2}{n^8-n^4+2}$ نیز همگراست.

---

۱۷) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Arctan}n}{n^2}$

$$a_n=\frac{\arctan n}{n^2}\ ,\ b_n=\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Arctan}n=\frac{\pi}{2}>0$$

پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Arctan}n}{n^2}$ نیز همگراست

---

۱۸) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\mathrm{Ln}n)^2}$

طبق آزمون انتگرال

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{n(\mathrm{Ln}n)^2}=(-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}^{-1}(x)]_2^{\infty}=\frac{1}{2\mathrm{Ln}(2)}$$ همگراست

---

۱۹) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Ln}n}{n^2}$ (**راهنمایی: اگر** $n\geq 1$، $\mathrm{Ln}n\leq 2\sqrt{n}$)

طبق آزمون مقایسه

$$\frac{\mathrm{Ln}n}{n^2}\leq\frac{2\sqrt{n}}{n^2}=\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$2\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست لذا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lnn}{n^2}$ نیز همگراست.

---

۲۰) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^2}$

$$\frac{1}{(Lnn)^2}\geq\frac{1}{(2\sqrt{n})^2}=\frac{1}{4n}$$

$\sum\frac{1}{n}$ واگراست پس $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^2}$ نیز واگراست.

---

۲۱) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^n}$

سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLn^2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(Lnn)^n}}{\frac{1}{nLn^2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{nLn^2n}{(Lnn)^n}=\lim\frac{n}{Lnn^{n-2}}=\frac{\infty}{\infty}$$ مبهم

هوپیتال : $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{Lnn^{n-2}\left(Ln(Lnn)+\frac{\frac{n-2}{n}}{\frac{n}{Lnn}}\right)}=0$

سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLn^2n}$ همگراست. پس سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^n}$ نیز همگراست.

---

۲۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

$$a_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\ ,\ b_n=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1>0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست. پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ نیز واگراست.

---

۲۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^3}{(2n^3+1)^2}$

$$a_n=\frac{(2n+1)^3}{(2n^3+1)^2}\ ,\ b_n=\frac{1}{(2n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)^3}{(2n^3+1)^2}}{\frac{1}{(2n+1)^3}}=16>0$$

$\sum b_n$ همگراست. پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^3}{(2n^3+1)^2}$ نیز همگراست

۲۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

طبق آزمون مقایسه

$$(\mathrm{Ln}(n)^n) < n^n \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{Ln}(n)^n} > \frac{1}{n^n}$$

$\sum \frac{1}{(\mathrm{Lnn})^n}$ همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ نیز همگراست.

---

۲۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - \mathrm{Cos}n}$

$$|3^n - \mathrm{Cos}n| > 3^n - |\mathrm{Cos}n| > 3^n - 1$$

$$\frac{1}{|3^n - \mathrm{Cos}n|} < \frac{1}{3^n - 1}$$

با توجه به آزمون مقایسه، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 1}$ همگراست، پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - \mathrm{Cos}n}$ نیز همگراست.

---

۲۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n.3^n}$

$$a_n = \frac{5n+3}{n.3^n} \quad , \quad b_n = \frac{1}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n} = 5 > 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ همگراست. پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n.3^n}$ نیز همگراست.

---

۲۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Sinn}|}{n^2}$

طبق آزمون مقایسه

$$|\mathrm{Sinn}| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\mathrm{sinn}|}{n} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Sinn}|}{n^2}$ نیز همگراست.

---

۲۸) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{cscn}|}{\sqrt{n}}$

طبق آزمن مقایسه

$$\frac{|\mathrm{cscn}|}{\sqrt{n}} = \frac{1}{|\mathrm{Sinn}|\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$|\mathrm{Sinn}| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{|\mathrm{Sinn}|} \geq 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{cscn}|}{\sqrt{n}}$ نیز واگراست.

---

۲۹) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Cos}^2 n}{n^{\frac{3}{2}}}$

طبق آزمون مقایسه

$$\frac{\mathrm{Cos}^2 n}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{\frac{3}{2}}}$ نیز همگراست.

---

۳۰) ثابت کنید که سری زیر همگراست اگر و فقط اگر $P > 1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\mathrm{Ln}n)^p}$$

طبق آزمون انتگرال

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\mathrm{Ln}x)} dx = \int_2^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}x)^{-p}}{x} dx$$

$$u = \mathrm{Ln}x \to du = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int_2^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}x)^{-p}}{x} dx = \frac{(\mathrm{Ln}x)^{1-p}}{1-p}\Big]_2^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-p}(\mathrm{Ln}(n)^{1-p} - \mathrm{Ln}(2)^{1-p})$$

* اگر $p>1 \leftarrow \frac{\mathrm{Ln}(2)^{1-p}}{p-1} \Leftarrow$ همگرا　　* اگر $p>1 \leftarrow$ واگرا

۴.۲) سری‌های متناوب

همگرایی یا واگرایی سری‌های ۱ تا ۱۰ را تعیین کنید.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$

سری نزولی

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \to a_n' = \frac{-2}{(2n+1)^2} < 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

سری متناوب و در شرایط آزمون سری متناوب صدق می‌کند پس همگراست.

---

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{5n+1}$

سری واگرا

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n+1} = \frac{2}{5} \neq 0$$

---

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3n+5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+3n+5} = 0$$

نزولی

$$a_n = \frac{n+2}{n^2+3n+5} \Rightarrow a_n' = -1 + \frac{4-n}{n^2+3n+5} < 0$$

طبق آزمون سری متناوب، همگراست.

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$

نزولی $a = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow a' = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}\,.(2n+1)} < 0$

طبق آزمون سری متناوب، همگراست.

---

۵) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{Lnn}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{Lnn} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

سری واگراست — هوپیتال : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \infty \neq 0$

---

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n^4}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^4} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال : $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{4n^3} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال : $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{12n^2} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال : $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{24n} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

سری واگراست — هوپیتال : $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{24} = \infty \neq 0$ مبهم

---

۷) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{Lnn}{n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{Lnn}{n} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال : $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$

$a_n = \frac{Lnn}{n} \Rightarrow a_n' = \frac{1-Lnn}{n^2} < 0$ (اگر $n\geq 3$ باشد)

طبق آزمون سری متناوب، همگراست

---

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}}{2n+5}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{2n+5} = 0$

$$a_n=\frac{\sqrt[۳]{n}}{۲n+۵}\Rightarrow a'_n=\frac{\frac{۲}{۳}\sqrt[۳]{n}-۲\sqrt[۳]{n}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{n^۲}}}{(۲n+۱)^۲}<۰$$

طبق آزمون سری متناوب، همگراست.

---

۹) $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{۱+۴^n}{۱+۳^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{۴^n Ln۴}{۳^n Ln۳}=\lim_{n\to\infty}(\frac{۴}{۳})^n Ln(\frac{۴}{۳})=\infty\neq ۰$ مبهم

سری واگراست $\lim_{n\to\infty}\frac{۴^n Ln۴}{۳^n Ln۳}=\lim_{n\to\infty}(\frac{۴}{۳})^n Ln(\frac{۴}{۳})=\infty\neq۰$:هوپیتال

---

۱۰) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n ۳^n}{n^۲}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{۳^n}{n^۲}=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم

$\lim_{n\to\infty}\frac{۳^n Lnn}{۲n}=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم :هوپیتال

سری واگراست $\lim_{n\to\infty}\frac{۳^n Ln^۲۳}{۲}=\infty\neq۰$:هوپیتال

در تمرین‌های ۱۱ تا ۱۴، مقدار تقریبی سری داده شده را با خطای کمتر از ۰/۰۱ بیابید.

۱۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{۱}{(۲n)!}$

طبق قضیه ۶.۴.۲، مجموع سری با خطای کمتر از ۰/۰۱ برابر با S_n است اگر $a_{n+۱}<۰/۰۱$ باشد.

$$a_{n+۱}=\frac{۱}{۲(n+۱)!}=\frac{۱}{(۲n+۲)!}$$

$n=۲\leftarrow$ $a_{n+۱}<۰/۰۱$ برقرار است.

$$S\approx S=\frac{۱}{(۲)!}-\frac{۱}{(۴)!}\approx ۰/۵۴۲$$

---

۱۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{۱}{n^۵}$

$$a_{n+۱}=\frac{۱}{(n+۱)^۵}$$

$n=۲\leftarrow$ $a_{n+۱}<۰/۰۱$ برقرار است

$$S\approx S=۱-\frac{۱}{۲^۵}\approx ۰/۹۷$$

۱۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{8}{10^n+1}$

$$a_{n+1}=\frac{1}{(10)^{n+1}+10}$$

$n=2 \leftarrow$ $a_{n+1}<0/01$ برقرار است

$$S\approx S_2=\frac{8}{11}-\frac{8}{101}\sim 0/65$$

---

۱۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{5}$

$$a_{n+1}=\frac{n+2}{5^{n+1}}$$

$n=3 \rightarrow$ $a_{n+1}<0/01$ برقرار است

$$S\approx S_3=\frac{2}{5}-\frac{3}{25}+\frac{4}{125}=0/312$$

۵.۲) همگرایی مطلق و مشروط

همگرایی مطلق، همگرایی مشروط یا واگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+2}$

$$|a_n|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}\right|=\frac{1}{|3n+2|}=\frac{1}{3n+2}$$

دنباله نزولی و نامنفی است

طبق آزمون انتگرال $\int_1^{\infty}\frac{1}{3x+2}dx=\frac{1}{3}Ln\,|3x+2|\,\Big]_1^{\infty}=\infty$

پس سری فوق همگرای مشروط است

---

۲) $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{2^n}$

$$|a_n|=\left|(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{2^n}\right|=\frac{3n+1}{2^n}$$

$$|a_n|=\frac{3n+1}{2^n}\ ,\ b_n=\frac{1}{n^2}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال اول: $\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+2n}{2^n Ln(2)}=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال دوم: $\lim_{n\to\infty}\frac{18n+2}{2^n Ln^2(2)}=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم

هوپیتال سوم: $\lim_{n\to\infty}\frac{18}{2^n Ln^3(2)}=0$

$\sum \frac{۱}{n^۲}$ همگراست پس $\sum a_n$ نیز همگراست. پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق می‌باشد.

---

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۵^n}{n(۳^{n+۱})}$

$$a_n = \frac{۵^n}{n(۳^{n+۱})} \quad , \quad b_n = \frac{۱}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۵^n}{۳^{n+۱}} = \infty$$

$\sum b_n$ واگراست، پس $\sum a_n$ نیز واگراست و سری همگرای مشروط و مطلق نیست.

---

۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{n}{۲^n}$

طبق آزمون ریشه

$$|a_n| = \frac{n}{۲^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{۲} = \frac{۱}{۲} < ۱$$

سری فوق همگرای مطلق است.

---

۵) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{Sinn}{n^۲+۱}$

$$|a_n| = \frac{|Sinn|}{|n^۲+۱|} \leq \frac{۱}{n^۲+۱} \leq \frac{۱}{n^۲}$$

$\sum \frac{۱}{n^۲}$ همگراست. طبق آزمون نسبت $\sum \left|\frac{Sinn}{n^۲+۱}\right|$ نیز همگراست، سری فوق همگرای مطلق است.

---

۶) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{۱}{n(Lnn)^۲}$

$$|a_n| = \frac{۱}{n(Lnn)^۲}$$

$$\int_۲^{\infty} \frac{۱}{x(Lnx)^۲} dx = -(\frac{۱}{Lnx})]_۲^{\infty} = \frac{۱}{Ln(۲)}$$

$\frac{۱}{x(Lnx)}$ تابعی نزولی و مثبت است.

طبق آزمون انتگرال‌گیری $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ همگراست پس سری، همگرای مطلق است.

---

۷) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{۱}{n^{\frac{۱}{n}}}$

$$|a_n| = \frac{۱}{n^{\frac{۱}{n}}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{۱}{n} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = ۰ < ۱$$

طبق آزمون ریشه، سری همگرای مطلق است.

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(Lnn)^{\frac{1}{n}}}$

$|a_n| = \dfrac{1}{(Ln(n))^{\frac{1}{n}}} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{Ln(n)}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{Ln(n)} = 0$ طبق آزمون ریشه، سری همگرای مطلق است.

---

۹) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$

$|a_n| = \dfrac{1}{n(n+2)}$

$\sum \dfrac{1}{n(n+2)}$ همگراست پس $\sum a_n$ نیز همگرا می‌باشد پس سری فوق همگراست.

---

۱۰) $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{1\times 3\times 5\times \dots (2n+1)}{2\times 5\times 8\times \dots (3n+2)}$

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{8}\times\dots\times\dfrac{2n+1}{3n+2} < (\dfrac{2}{3})^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{2}{3})^n$ سری هندسی، $q=\dfrac{2}{3}$, $a_1=\dfrac{2}{3}$ می‌باشد و همگراست

طبق آزمون مقایسه $\sum a_n$ نیز همگراست.

---

۱۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{Cosn}{n^3}$

$|a_n| = \dfrac{1}{n^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ همگراست. طبق آزمون مقایسه $\sum a_n$ نیز همگراست. پس $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{Cosn}{n^3}$ همگرای مطلق می‌باشد.

---

۱۲) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{2^{n+1}}$

سری واگراست $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2} = \infty$

---

۱۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{Sin\, n\pi}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{Sinn\pi}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

$Sinn\pi$ همه جا مقدار صفر را دارد. سری فوق همگرای مطلق است.

---

۱۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1-2Sinn}{n^3}$

$|a_n| = \dfrac{|1-2Sinn|}{n^3} \le \dfrac{1+2}{n^3} = \dfrac{3}{n^3}$

همگرای مطلق است.

با استفاده از نتیجهٔ ۱۷.۵.۲ درستی حدهای زیر را تحقیق کنید.

۱۵) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = ۰$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+۱)!}{(n+۱)^{n+۱}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+۱}\right) = ۱^{\infty} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim \operatorname{Ln}\left(\frac{n}{n+۱}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{Ln}\left(\frac{n}{n+۱}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Ln}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)}{\frac{۱}{n}} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\text{هوپیتال}: \lim_{n\to\infty} \frac{(-n^۲)(n+۱)}{(n+۱)^۲ . n} = -۱ \Rightarrow \operatorname{Ln} \lim\left(\frac{n}{n+۱}\right)^n = -۱$$

$$\lim\left(\frac{n}{n+۱}\right)^n = e^{-۱} < ۱ \xrightarrow[\text{طبق } ۱۷.۵.۲]{} \lim \frac{n!}{n^n} = ۰$$

---

۱۶) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{۲n}}{n^n} = ۰$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^{۲n}}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = ۰ < ۱$$

$$\text{طبق } ۱۷.۵.۲ \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x^{۲n}}{n^n} = ۰$$

---

۱۷) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = ۰ \quad |x| < ۲$

تکرار سؤال ۱۵ می‌باشد. برعهدهٔ دانشجو

---

۱۸) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{۲n}}{n^n} = ۰$

تکرار سؤال ۱۶ می‌باشد. برعهدهٔ دانشجو

آزمون چهار گزینه‌ای فصل دوم

۱) کدامیک از دنباله‌های زیر به صفر میل نمی‌کند؟

الف) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

ب) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

ج) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}, \dots$

د) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \dots (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \dots$

۲) کدام حکم زیر نادرست است؟

الف) اگر دنبالهٔ (a_n) همگرا باشد، آنگاه (a_n) کراندار است.

ب) اگر (a_n) کراندار نباشد، آنگاه (a_n) واگراست.

ج) همهٔ دنباله‌های کراندار همگرا هستند.

د) هر دنبالهٔ کراندار و یکنوا همگراست.

۳) حد دنبالهٔ $(n\sin\frac{1}{n})$ برابر است با:

الف) n ب) ۱ ج) ۱- د) ∞

۴) کدام یک از احکام زیر همواره درست است؟

الف) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه $\sum a_n = 0$

ب) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست

ج) اگر $\sum a_n$ واگرا باشد آنگاه دنباله (a_n) واگراست

د) اگر (a_n) همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ نیز همگرا

۵) مقدار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$ برابر است با:

الف) $\frac{2}{10}$ ب) ۰ ج) $\frac{2}{9}$ د) سری واگراست

۶) کدام حکم زیر در مورد دو سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ و $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ درست است؟

الف) هر دو همگرا هستند ب) هر دو واگرا هستند

ج) اولی همگرا ولی دومی واگراست د) اولی واگرا ولی دومی همگراست

۷) کدام حکم زیر درست است؟

الف) $\Sigma\frac{1}{n^2}$ همگراست ولی $\Sigma\frac{1}{n^3}$ واگراست

ب) $\Sigma\frac{1}{n^2}$ واگراست ولی $\Sigma\frac{1}{n^3}$ همگراست

ج) $\Sigma\frac{1}{n^2}$ و $\Sigma\frac{1}{n^3}$ واگرا هستند

د) $\Sigma\frac{1}{n^2}$ و $\Sigma\frac{1}{n^3}$ همگرا هستند

۸) کدام یک از سری‌های زیر واگراست؟

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ ب) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n}$ ج) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}$ د) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{7^n}$

۹) کدام یک از سری‌های زیر واگراست؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ د) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{Lnk}{k}$

۱۰) کدام یک از سری‌های زیر واگراست؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$ د) هر سه سری همگرا می‌باشد

۱۱) کدام یک از سری‌های زیر واگرا هستند؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3}{2n(n+1)}$

ج) $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ د) هر سه سری همگرا هستند

۱۲) کدام سری زیر واگراست؟

الف) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$ ب) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\dots$

ج) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{9}{8}+\dots$ د) $3-2+\frac{4}{3}-\frac{8}{9}+\dots$

۱۳) کدام سری زیر همگراست؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\sqrt{n}}$ د) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$

۱۴) کدام حکم زیر نادرست است؟

الف) سری $\sum a_k$ واگراست، اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$

ب) هر سری همگرا، همگرای مطلق است.

ج) سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست.

د) اگر به ازای هر n، $a_{n+1} \le a_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ آن گاه سری $\sum(-1)^{k-1}a_k$ همگراست

۱۵) کدام حکم زیر نادرست است؟

الف) هر سری همگرای مطلق، همگراست.

ب) اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، $\sum |a_n|$ واگراست.

ج) اگر $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد، آن گاه سری حاصل از جملات مثبت و سری حاصل از جملات منفی این سری همگرا است.

د) اگر $\sum a_n$ به S همگرای مطلق باشد، آن گاه سری حاصل از هر گونه دسته‌بندی جملات $\sum a_n$ نیز به S همگراست.

۱۶) کدام حکم دربارهٔ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ درست است؟

الف) همگرای مطلق
ب) واگراست

ج) همگراست ولی همگرای مطلق نیست
د) همگرای شرطی است

۱۷) سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k Lnn}$

الف) به ازای هر k همگراست
ب) به ازای هر $k > 1$ همگراست

ج) به ازای $k > 1$ واگراست
د) به ازای هر k واگراست

۱۸) کدام سری زیر همگراست؟

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$
ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{2}{3})^{n-1}$

ج) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{n\times 5^{n-1}}$
د) هر سه سری واگراست

۱۹) کدام یک از سری‌های زیر همگرای مطلق است؟

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$
ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$
ج) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
د) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

۲۰) کدام یک از سری‌های زیر همگرای شرطی است؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{2n-1}}$

پاسخ آزمون چهار گزینه‌ای فصل دوم

۱) گزینه (د) صحیح است

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$ ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} = ۰$

ج) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲^n} = ۰$ د) $\lim_{n\to\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{n}{n+۱} = \pm ۱$

---

۲) گزینه (ج) صحیح است

هر دنبالهٔ کراندار و یکنوا همگراست ولی می‌تواند دنباله‌ای کراندار باشد ولی همگرا نباشد. مثل $(-۱)^n$ دنباله‌ای کراندار است ولی حد ندارد (همگرا نیست).

---

۳) گزینه (ب) صحیح است

$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Sin}\frac{۱}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Sin}\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{n}} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{۱}{n^۲}\mathrm{Cos}\frac{۱}{n}}{-\frac{۱}{n^۲}} = ۱$$

---

۴) گزینه (ب) صحیح است

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ سری واگرا $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} \neq ۰$ $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$

ب) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq ۰ \leftarrow \sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n$ سری واگرا و $\lim_{n\to\infty} (-۱)^n = ۱$ همگرا

د) $\sum_{n=۱}^{\infty} (+۱)^n$ و $(+۱)^n$ همگراست ولی $\sum_{n=۱}^{\infty} (+۱)^n$ واگرا

---

۵) گزینه (ج) صحیح است

$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{۱۰^n} \Rightarrow$ سری هندسی $a_۱ = \frac{۲}{۱۰}$, $q = \frac{۱}{۱۰}$

$$S_n \lim_{n\to\infty} \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} = \frac{\frac{۲}{۱۰}(۱-(\frac{۱}{۱۰})^n)}{۱-\frac{۱}{۱۰}} = \frac{۲}{۹}$$

۶) گزینه (ب) صحیح است

$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۱}{۲}}}$ واگرا

چون $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n}}$ واگراست پس $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n}}$ نیز واگراست $\quad \sum \frac{۱}{\sqrt{n}} < \frac{۱}{\sqrt{n-۱}} \Rightarrow$

---

۷) گزینه (د) صحیح است

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} p > ۱ & \text{همگرا} \\ p < ۱ & \text{واگرا} \end{cases}$$

هر دو همگرا هستند.

---

۸) گزینه (ج) صحیح است

الف) سری هندسی با $a_۱ = ۱$, $q = \frac{۱}{۲}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{۱(۱-(\frac{۱}{۲})^n)}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۲$ همگرا

ب) سری هندسی با $a_۱ = ۱$, $q = \frac{-۲}{۳}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{۱(۱-(\frac{-۱}{۲})^n)}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۵}$ همگرا

ج) سری هندسی با $a_۱ = \frac{۱}{۲}$, $q = \frac{۳}{۲}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{۲}(۱-(\frac{۳}{۲})^n)}{۱-\frac{۱}{۲}} = \infty$ واگرا

د) سری هندسی با $a_۱ = ۵$, $q = \frac{۱}{۷}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{۵(۱-(\frac{۱}{۷})^n)}{۱+\frac{۱}{۷}} = \frac{۳۵}{۸}$ همگرا

---

۹) گزینه (د) صحیح است

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱} = ۱ - \frac{۱}{\infty+۱} = ۱$ همگرا

ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۴n^۲-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)} = \sum \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲n-۱} - \frac{۱}{۲n+۱}) \to \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲-۱} - \frac{۱}{\infty+۱}) = \frac{۱}{۲}$
همگرا

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}} \to$ همگرا

د) $f(x) = \frac{Lnx}{x} \Rightarrow \int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{x} Lnx\,dx = \frac{Ln^۲x}{۲}\Big]_{۲}^{\infty} = \infty$ واگرا

۱۰) گزینه (د) صحیح است

الف) همگرای مطلق $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n-1)!}{n!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

ب) همگرای مطلق $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2\times 2^n}{2^{n+1}\times n^2}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1$

ج) همگرای مطلق $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-2n-1}=0<1$

---

۱۱) گزینه (د) صحیح است

الف) $a_n=\frac{1}{n}\to a'_n=\frac{-1}{n^2}\Rightarrow$

همگراست $\Leftarrow a_n$ نزولی و نامنفی و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

ب) $a_n=\frac{3}{2n(n+1)}\ ,\ a'_n=\frac{-12n-6}{(2n(n+1))^2}<0$

a_n دنباله‌ای نامنفی و نزولی و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$، سری متناوب همگراست.

ج) $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\ ,\ a'_n=\frac{-1}{(2n-1)^{\frac{3}{2}}}<0$

a_n دنباله‌ای نزولی و نامنفی و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$، سری متناوب همگراست.

---

۱۲) گزینه (ج) صحیح است

الف) $\sum\frac{1}{2^n}\ ,\ q=\frac{1}{2}\ ,\ a_1=1\to\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=2$

ب) $\sum(-1)\frac{2^n}{3^n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\left|\frac{2^{n+1}\times 3^n}{3^{n+1}\times 2^n}\right|=\frac{2}{3}<1$ همگرا

ج) $\sum\frac{3^n}{2^{n+1}}\Rightarrow q=\frac{3}{2}\ ,\ a_1=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{3}{2}}=\infty$ واگرا

د) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n-1}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ همگرا

۱۳) گزینه (د) صحیح است

الف) $\Sigma\frac{1}{n} \leftarrow$ واگرا

ب) $\Sigma\frac{1}{\sqrt{n}} = \Sigma\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \leftarrow$ واگرا

ج) $\Sigma\frac{1}{n^{2}\sqrt{n}} = \Sigma\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ و $\frac{4}{3} > 1 \leftarrow$ همگرا

د) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = 1 \neq 0$ واگرا

---

۱۴) گزینه (ب) صحیح است

الف) طبق آزمون نسبت برقرار است.

ب) هر سری همگرای مطلق، همگراست. برعکس نمی‌تواند همیشه برقرار باشد.

ج) سری همساز بوده و همگراست.

د) طبق آزمون سری متناوب برقرار است.

---

۱۵) گزینه (ج) صحیح است

الف) طبق آزمون مقایسه درست است.

ب) طبق آزمون مقایسه درست است.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{2^{n}-1}{2^{n}})$ سری همگرای مطلق و برابر است با $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n}$ (سری هندسی).
سری حاصل از جملات مثبت آن $\Sigma 1$ واگراست.

د) طبق قضیه موجود در کتاب صادق است.

---

۱۶) گزینه (ج) صحیح است

$$a_n = ne^{-n^{2}} \to \int_{1}^{\infty} xe^{-x^{2}}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^{2}}\Big]_{1}^{\infty} = \frac{1}{2e}$$

Σa_n همگرای مطلق است و $\Sigma |a_n|$ نیز همگراست.

---

۱۷) گزینه (ب) صحیح است

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k}}$ به ازای $k>1$ همگراست. پس سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{k}Lnn}$ نیز برای $k>1$ همگراست.

---

۱۸) گزینه (ب) صحیح است

الف)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$$

$\Sigma\frac{1}{n}$ واگراست پس سری فوق نیز واگراست.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{3})^{n-1}$ ← سری هندسی؛ $q=-\frac{2}{3}\ ,\ |q|<1 \Leftarrow$ همگراست

ج) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{2n+1}}{n\times 5^{n-1}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 3^{2n}}{5^{n-1}}=\infty$ واگراست

---

۱۹) گزینه (الف و ب) صحیح است

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3^n}\right| \to$ سری هندسی و $a_1=\frac{1}{3}, q=\frac{1}{3} \Rightarrow$ همگرا

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| \to$ سری هندسی و $a_1=\frac{1}{2}\ ,\ q=\frac{1}{2} \Rightarrow$ همگرا

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \to$ سری واگرا

د) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\pi}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to$ واگرا

---

۲۰) گزینه (ج) صحیح است

الف) همگرای مطلق $\sum|a_n|=\sum\frac{1}{n(n+1)}=\sum\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\to 1-\frac{1}{\infty+1}=1$

ب) همگرای مطلق $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}\right|=\frac{1}{2}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2n-1}}>\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست، پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ نیز واگراست.

د) همگرای مطلق $\sum|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}} \to$ سری هندسی و $a_1=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{4}$

تمرینات فصل سوم

۱.۳) سریهای توانی:

بازه همگرایی سریهای ۱ تا ۲۰ را تعیین کنید.

۱) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+4}$

برای $x=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{n+4}=0$ همگراست

برای $x\neq 0$، آزمون نسبت را به کار می‌بریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)+4}\cdot\frac{n+4}{x^n}\right|=\lim\left|\frac{n+4}{n+5}.x\right|=x$$

این سری همگرای مطلق است اگر $|x|<1$ یا $-1<x<1$. پس شعاع همگرایی برابر است با $r=1$.

همگرایی را برای نقاط انتهایی بازه $(x=-1, x=1)$ بررسی می‌کنیم.

$$x=1\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+4}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m}$$

$$m=n+4\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+4}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$$

با توجه به واگرایی سری همساز، این سری واگراست.

$$x=-1\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\dots$$

که بنابر آزمون سریهای متناوب همگراست.

درنتیجه بازه همگرایی بازه $[-1,1)$ می‌باشد.

---

۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

برای $x\neq 0$ طبق آزمون نسبت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}x\right|=|x|$$

برای $|x|<1$ همگرای مطلق است.

$$x=1\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

بنا به قضیه ۸.۳.۲ می‌دانیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ به ازای $p>1$ همگراست و برای $p \le 1$ واگراست. درنتیجه سری فوق به ازای $x=1$ همگراست.

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

بر طبق آزمون سریهای متناوب و چون $\frac{1}{n^2}$ یک دنباله مثبت و غیر افزایشی می‌باشد، سری فوق در $x=-1$ همگراست.

بنابراین $[-1, 1]$ بازه همگرایی می‌باشد.

---

۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$

به ازای $x=0$ سری همگرا به صفر است.

برای $x \neq 0$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2 x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{2n^2} x\right| = \frac{1}{2}|x| < 1$$

$$\Rightarrow -2 < x < 2$$

برای نقاط انتهایی بازه داریم:

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \neq 0$$

بنابر آزمون واگرایی، سری فوق به ازای $x=2$ واگرا می‌باشد.

$$x = -2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (-2)^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (-1)^n 2^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$$

با استفاده از آزمون واگرائی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2 \neq 0$$

پس سری به ازای $x=-2$ واگراست.

بنابراین بازه همگرایی $(-2, 2)$ می‌باشد.

---

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\, 3^n}$

به ازای $x=0$ سری همگراست.

برای $x \neq 0$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}\,3^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}\,3^n}{x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{x}{3}\right| = \frac{1}{3}|x| < 1 \Rightarrow -3\,|x| < 3$$

برای $-3<x<3$ سری همگراست.

$$x=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ به ازای $p>1$ همگرا و به ازای $p\leq 1$ واگراست بنابراین در سری فوق $p=\frac{1}{2}$ و سری واگراست.

$$x=-3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\,3^n} = \sum\frac{(-3)^n}{3^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

بر طبق آزمون سریهای متناوب و چون $\frac{1}{\sqrt{n}}$ یک دنباله مثبت و غیر افزایشی است، درنتیجه سری فوق در $x=-3$ همگراست.

بنابراین $[-3,3)$ بازه همگرایی می‌باشد.

---

۵) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

به ازای $x=0$ سری همگرا به صفر می‌باشد.

برای $x\neq 0$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{(-1)^{n-1}x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,x\right| = |x| < 1$$

به ازای $-1<x<1$ سری همگراست.

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

طبق آزمون سری‌های متناوب و از آنجا که $\frac{1}{\sqrt{n}}$ دنباله‌ای مثبت و غیر افزایشی است، سری فوق در $x=1$ همگراست.

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}}$$

سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ با $p=\frac{1}{2}$ می‌باشد و واگراست.

بنابراین بازه $[-1,1)$، بازه همگرایی است.

---

۶) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n}$

به ازای $x=0$ سری همگرا به صفر می‌باشد.

برای $x \neq 0$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{n+1+1} \cdot \frac{n+1}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|(-1)\frac{n+1}{n+2} x^2\right| = |x^2| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

طبق آزمون سریهای متناوب و از آنجا که $\frac{1}{n+1}$ دنباله‌ای مثبت و غیر افزایشی است، سری فوق همگراست.

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{3n} \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

طبق آزمون سریهای متناوب، سری فوق همگراست.

بنابراین بازه همگرایی $[-1,1]$ می‌باشد.

---

۷) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{100^n}$

به ازای $x=0$ سری همگرا به صفر می‌باشد.

برای $x \neq 0$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{100^{n+1}} \cdot \frac{100^n}{n!x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!}{n!}\cdot\frac{100^n}{100^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{100}x\right|=\infty$$

سری فقط به ازای $x=0$ همگراست و به ازای سایر مقادیر x واگرا می‌باشد.

---

۸) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{n+1}$

به ازای $x=0$ سری همگرا به صفر می‌باشد.

برای $x\neq 0$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{(n+1)+1}}{2(n+1)-1}\cdot\frac{2n-1}{(-1)^n x^{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{x^{n+2}}{x^{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)\frac{2n-1}{2n+1}x\right|=|x|<1\Rightarrow -1<x<1$$

$$x=1\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$$

طبق آزمون سریهای متناوب و از آنجا که $\frac{1}{2n-1}$ دنباله‌ای مثبت با جملات غیر افزایشی می‌باشد سری فوق همگراست.

$$x=-1\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$$

با فرض $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ و استفاده از آزمون انتگرال داریم (این تابع برای $x\geq 1$ نامنفی، پیوسته و کاهشی است).

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2}{2x-1}dx$$

$$=\frac{-1}{2}\mathrm{Ln}(2x-1)\Big|_1^{\infty}=\infty$$

لذا $\sum\frac{1}{2n-1}$ واگرا و درنتیجه $-\sum\frac{1}{2n-1}$ نیز واگرا می‌باشد. (از قضیه ۲۴.۲.۲ استفاده شده است) لذا بازه $[-1,1)$، بازه همگرایی می‌باشد.

۹) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(-4)^n}$

به ازای $x=0$ سری همگرا به صفر می‌باشد.

برای $x\neq 0$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{(-4)^{n+1}}\cdot\frac{(-4)^n}{x^{2n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-4)^n}{(-4)^{n+1}}\cdot\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left|x^2\right| < 1 \Rightarrow -2 < x < 2$$

$$x=2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{(-1)^n 2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(-1)^n}$$

با استفاده از آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(-1)^n}\neq 0$$

پس سری فوق واگراست.

$$x=-2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{2n+1}}{(-4)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{2n+1}}{(-1)^n 2^{2n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(-1)^n}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2^{2n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\times 2$$

طبق آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} 2(-1)^{n+1}\neq 0$$

بنابراین سری فوق واگراست

لذا بازهٔ $(-2,2)$ بازه همگرایی می‌باشد

۱۰) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} x^n$

با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n x^n}{n^n}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

لذا سری به ازای کلیه مقادیر x همگرا مطلق می‌باشد و بازه همگرایی سری $(-\infty, \infty)$ می‌باشد.

---

۱۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{(2n)!}$

برای $x=0$ سری همگرا به صفر می‌باشد.

برای $x\neq 0$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{2^n x^{2n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = 0 < 1$$

لذا سری به ازای کلیه مقادیر x همگرا می‌باشد و بازه همگرایی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد.

---

۱۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$

برای $x=0$ سری همگرا به صفر می‌باشد.

برای $x\neq 0$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)! x^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n! x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)n!}{n!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} x\right| = 0 < 1$$

لذا سری به ازای کلیه مقادیر x همگرا می‌باشد و بازه همگرایی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد.

---

۱۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}(x-2)^n}{n+1}$

برای $x=2$ سری همگرا به صفر می‌باشد.

برای $x\neq ۲$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{۳^{۲n+۲}(x-۲)^{n+۱}}{n+۱+۱}\cdot\frac{n+۱}{۳^{۲n}(x-۲)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|۳^۲\cdot\frac{n+۱}{n+۲}(x-۲)\right|=۹\,|x-۲|<۱$$

$$\Rightarrow |x-۲|<\frac{۱}{۹}\Rightarrow\frac{-۱}{۹}<x-۲<\frac{۱}{۹}\Rightarrow\frac{۱۷}{۹}<x<\frac{۱۹}{۹}$$

همگرایی را در نقاط انتهایی و ابتدایی بازه بررسی می‌کنیم.

$$x=\frac{۱۹}{۹}\Rightarrow\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳^{۲n}(x-۲)^n}{n+۱}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳^{۲n}(\frac{۱}{۹})^n}{n+۱}$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳^{۲n}(\frac{۱}{۳^۲})^n}{n+۱}$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n+۱}$$

با فرض $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ و استفاده از آزمون انتگرال داریم:

$$\int_۱^{\infty}f(x)dx=\int_۱^{\infty}\frac{۱}{x+۱}dx=Ln(x+۱)]_۱^{\infty}=\infty$$

پس $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n+۱}$ واگرا می‌باشد و درنتیجه $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n+۱}$ نیز واگراست.

$$x=\frac{۱۷}{۹}\Rightarrow\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳^{۲n}(x-۲)^n}{n+۱}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳^{۲n}(-\frac{۱}{۹})^n}{n+۱}$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳^{۲n}(\frac{-۱}{۳^۲})^n}{n+۱}$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۱}$$

طبق آزمونهای سریهای متناوب و با توجه به اینکه $\frac{۱}{n+۱}$ دنباله با جملات غیر افزایشی و مثبت می‌باشد، سری فوق همگراست.

لذا بازه همگرایی $[\frac{۱۷}{۹},\frac{۱۹}{۹})$ می‌باشد.

---

۱۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n}{n۳^{n+۱}}x^{n+۱}$

به ازای $x=۰$ سری همگرا به صفر است.

برای $x\neq ۰$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{۲^{n+۱}x^{n+۱+۱}}{(n+۱)۳^{n+۱+۲}}\cdot\frac{n۳^{n+۲}}{۲^n x^{n+۱}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{۲^{n+۱}}{۲^n}\cdot\frac{۳^{n+۲}}{۳^{n+۳}}\cdot\frac{x^{n+۲}}{x^{n+۱}}\cdot\frac{n}{n+۱}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{۲}{۳}x\right| = \frac{۲}{۳}|x| < ۱$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{-۳}{۲} < x < \frac{۳}{۲}$$

همگرایی را برای نقاط انتهایی بازه بررسی می‌کنیم.

$$x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n}{n۳^{n+۲}}x^{n+۱} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n}{n۳^{n+۲}}\left(\frac{۳}{۲}\right)^{n+۱}$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(۳)(۲)} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۶n}$$

با فرض $f(x) = \frac{۱}{۶x}$ و استفاده از آزمون انتگرال داریم (این تابع به ازای $x \geq ۱$ نامنفی پیوسته و کاهشی است)

$$\int_۱^{\infty} f(x)dx = \int_۱^{\infty}\frac{۱}{۶x}dx = \frac{۱}{۶}\int_۱^{\infty}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{۱}{۶}Lnx\Big|_۱^{\infty} = \infty \quad \text{واگرا}$$

پس $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۶n}$ واگرا می‌باشد.

$$x = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n}{n۳^{n+۲}}x^{n+۱} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n}{n۳^{n+۲}}\left(-\frac{۳}{۲}\right)^{n+۱}$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{۱}{n(۳)(۲)}$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{۱}{۶n}$$

براساس آزمون سریهای متناوب و با توجه به مثبت و غیر افزاشی بودن جملات دنباله $\frac{۱}{۶n}$، این سری همگرا می‌باشد.

لذا بازه همگرایی سری، بازه $[-\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲})$ می‌باشد.

۱۵) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(x+4)^n}{2^{3n}}$

به ازای $x=-4$ سری همگرا به صفر است.

برای $x\neq-4$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2(x+4)^{n+1}}{2^{3(n+1)}}\cdot\frac{2^{3n}}{n^2(x+4)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{2^{3n}}{2^{3n+3}}\cdot\frac{(x+4)^{n+1}}{x+4}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^3}\cdot(x+4)\right| = \frac{1}{8}|x+4| < 1$$

$$\Rightarrow |x+4| < 8 \Rightarrow -8<x+4<8 \Rightarrow -12<x<4$$

برای نقاط ابتدا و انتهای بازه، همگرایی را بررسی می‌کنیم.

$$x=4 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(x+4)^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 8^n}{(2^3)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 8^n}{8^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} n^2$$

بنابر آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

لذا سری فوق واگراست.

$$x=-12 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(x+4)^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(-8)^n}{(2^3)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(-1)^n 8^n}{8^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2$$

بنابر آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n n^2 \neq 0$$

لذا سری فوق واگراست.

پس بازه همگرایی، بازه $(-12,4)$ می‌باشد.

۱۶) $\sum_{n=۲}^{\infty}(Lnn)x^n$

به ازای $x=۰$ سری به صفر همگراست.

برای $x\neq۰$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Ln(n+۱)x^{n+۱}}{Ln\,n\,x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Ln(n+۱)}{Ln\,n}\right||x|$$

$$=|x|<۱\Rightarrow -۱<x<۱$$

برای محاسبه $\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(n+۱)}{Ln\,n}$ از قضیه هوپیتال استفاده می‌شود.

به ازای نقاط انتها و ابتدای بازه، همگرایی را بررسی می‌کنیم.

$$x=۱\to\sum_{n=۲}^{\infty}(Ln\,n)x^n=\sum_{n=۲}^{\infty}(Ln\,n)$$

طبق آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(Ln\,n)\neq۰$$

لذا سری فوق واگراست.

$$x=-۱\Rightarrow\sum_{n=۲}^{\infty}(Ln\,n)x^n=\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n(Ln\,n)$$

براساس آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-۱)^n(Ln\,n)\neq۰$$

لذا سری فوق واگراست.

بنابراین بازه همگرایی سری، بازه $(-۱,۱)$ می‌باشد.

---

۱۷) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{Ln\,n}{e^n}(x-e)^n$

به ازای $x=e$ سری به صفر همگرا می‌باشد.

برای $x\neq e$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Ln(n+۱)(x-e)^{n+۱}}{e^{n+۱}}\cdot\frac{e^n}{Ln\,n\,(x-e)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Ln(n+۱)}{Ln\,n}\cdot\frac{۱}{e}(x-e)\right|$$

$$=\frac{1}{e}|x-e|<1$$

$$\Rightarrow |x-e|<e \Rightarrow -e<x-e<e \Rightarrow 0<x<2e$$

برای نقاط ابتدا و انتهای بازه، همگرایی را بررسی می‌کنیم.

$$x=2e \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln} n}{e^n}(x-e)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln} n}{e^n}e^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\operatorname{Ln} n$$

با توجه به آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Ln} n\neq 0$$

لذا سری فوق واگراست.

$$x=0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln} n}{e^n}(x-e)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln} n}{e^n}(-1)^n e^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\operatorname{Ln} n$$

با توجه به آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\operatorname{Ln} n\neq 0$$

لذا سری فوق واگراست.

بنابراین بازه همگرایی سری، بازه $(0,2e)$ می‌باشد.

---

۱۸) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln} n}{n^2}x^n$

به ازای $x=0$ سری به صفر همگراست.

برای $x\neq 0$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\operatorname{Ln}(n+1)x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(\operatorname{Ln} n)x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\operatorname{Ln}(n+1)}{\operatorname{Ln} n}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}x\right|$$

$$=|x|<1\Rightarrow -1<x<1$$

توجه: برای محاسبه $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}(n+1)}{\operatorname{Ln} n}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}$ از هوپیتال و به صورت زیر استفاده شده است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(n+۱)}{Ln\,n}\cdot\frac{n^۲}{(n+۱)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(n+۱)}{Ln\,n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{(n+۱)^۲}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\,(n+۱)}{Ln\,n}=\frac{\infty}{\infty}$$

هوپیتال: $\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(n+۱)}{Ln\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{n+۱}}{\frac{۱}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+۱}=۱$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{(n+۱)^۲}=۱$$

همگرایی سری را برای نقاط انتهایی بازه بررسی می‌کنیم؛

$$x=۱\Rightarrow\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{Ln\,n}{n^۲}x^n=\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{Ln\,n}{n^۲}$$

با فرض $f(x)=\frac{Lnx}{x^۲}$ و با توجه به اینکه این تابع برای $x\geq۱$ نامنفی، پیوسته و کاهشی می‌باشد. از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم.

$$\int_۱^{\infty}f(x)dx=\int_۱^{\infty}\frac{Lnx}{x^۲}dx$$

برای محاسبه این انتگرال، از انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء استفاده می‌کنیم.

یادآوری:

$\int udv=uv-\int vdu$ انتگرال‌گیری جزء به جز

با فرض $u=Lnx$ و $v=-\frac{۱}{x}$ داریم:

$$\int udv=\int Lnx(\frac{۱}{x^۲})dx=\int\frac{Lnx}{x^۲}dx$$

$$=\frac{-Lnx}{x}-\int(-\frac{۱}{x})\frac{۱}{x}dx$$

$$=\frac{-Lnx}{x}+\int\frac{۱}{x^۲}dx$$

$$=\frac{-Lnx}{x}-\frac{۱}{۳}\frac{۱}{x^۳}$$

$$\Rightarrow\int_۱^{\infty}\frac{Lnx}{x^۲}dx=\frac{-Lnx}{x}-\frac{۱}{۳}\frac{۱}{x^۳}\Big]_۱^{\infty}$$

برای محاسبه $\frac{Lnx}{x}$ در ∞ از هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-Lnx}{x}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$

هوپیتال : $\lim\left(-\frac{Lnx}{x}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$

$$\Rightarrow\int_1^{\infty}\frac{Lnx}{x^2}dx=(0-0)-\left(0-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln\,n}{n^2}$ همگراست و درنتیجه $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Ln\,n}{n^2}$ هم همگراست.

$$x=-1\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Ln\,n}{n^2}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Ln\,n}{n^2}(-1)^n$$

براساس آزمون سریهای متناوب و با توجه به مثبت و غیر افزایشی بودن جملات دنباله $\frac{Lnn}{n^2}$، این سری همگرا می‌باشد.

لذا بازه همگرایی این سری بازه $[-1,1]$ می‌باشد.

---

۱۹) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x-1)^n}{n6^n}$

از آنجا که سری از $n=0$ شروع می‌شود به ازاء همه مقادیر x حاصل ∞ سری واگرا می‌باشد. در صورتی که سری از $n=1$ شروع گردد داریم:

به ازای $x=\frac{1}{2}$ سری به صفر همگراست.

برای $x\neq\frac{1}{2}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2x-1)^{n+1}}{(n+1)6^{n+1}}\cdot\frac{n6^n}{(-1)^n(2x-1)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2x-1)^{n+1}}{(-1)^n(2x-1)^n}\cdot\frac{n6^n}{(n+1)6^{n+1}}\right|$$

$$=\left|\frac{2x-1}{6}\right|<1\Rightarrow|2x-1|<6$$

$$\Rightarrow-6<2x-1<6\Rightarrow-\frac{5}{3}<x<\frac{7}{2}$$

برای نقاط ابتدا و انتهای بازه همگرایی را بررسی می‌کنیم.

$$x=\frac{7}{2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x-1)^n}{n6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6^n}{n6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

براساس آزمون سریهای متناوب و با توجه به مثبت و غیر افزایشی بودن جملات دنباله $\frac{1}{n}$ این سری همگرا می‌باشد.

$$x=\frac{-5}{2}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x-1)^n}{n6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-6)^n}{n6^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$$

طبق قضیه‌ای در فصل دوم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ به ازای $p>1$ همگرا و به ازای $p\leq 1$ واگراست

لذا بازه همگرایی $[-\frac{5}{2},\frac{7}{2})$ می‌باشد.

---

۲۰) $\sum_{n=0}^{\infty}x^{(n^2)}$

به ازای $x=0$ سری همگرا به صفر می‌باشد.

برای $x\neq 0$ با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x^{(n^2)}\right|}=x^2<1$$

$$\Rightarrow -1<x<1$$

برای نقاط ابتدا و انتهای بازه همگرایی را بررسی می‌کنیم.

$$x=1\to \sum_{n=0}^{\infty}x^{(n^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}1^{(n^2)}$$

با توجه به آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}1^{n^2}\neq 0$$

لذا سری فوق واگراست.

$$x=-1\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}x^{(n^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n^2}$$

با توجه به آزمون واگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n^2}\neq 0$$

بنابراین بازه همگرایی سری، بازه $(-1,1)$ می‌باشد.

۲.۳) مشتقگیری و انتگرالگیری از سریهای توانی

در تمرینهای ۱ تا ۴، فرض کنید $f(x)$ مجموع سری داده شده باشد. $f'(x)$ و $\int_0^x f(t)dt$ را بیابید.

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} x^n\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n-1}}{n+1}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n\right)dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

---

۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^{n+1}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n^2+1} x^{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n^2+1}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} t^{n+1} dt\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{1}{n^2+1} t^{n+1} dt\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n^2+1)(n+2)}$$

---

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d}{dx}((n+1)x^n)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)t^n dt\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x (n+1)t^n dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}$$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} x^{(n^2)}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}x^{(n^2)}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{n}x^{(n^2)}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{n}.n^2x^{n^2-1}$$

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}t^{(n^2)}dt\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x\frac{5}{n}t^{n^2}dt\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}\frac{x^{n^2+1}}{(n^2+1)}$$

با استفاده از سری توانی نمایشگر e^x نشان دهید که به ازای هر x

۵) $\text{Coshx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$

با توجه به متن درس کتاب داریم:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

می‌دانیم:

$$\text{Coshx}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

برای به دست آوردن سری توانی e^{-x}، در سری توانی e^x، x را به -x تبدیل می‌کنیم.

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}$$

$$=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots$$

$$\text{Coshx}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)+\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2+2\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^4}{4!}+\dots\right]$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

۶) $\text{Sinh}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

می‌دانیم:

$$\text{Sinh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Sinh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2x + 2\frac{x^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= \left[x + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

---

۷) یک سری توانی نمایشگر $\frac{e^x - 1}{x}$ بیابید و با استفاده از آن نشان دهید که

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - 1\right]$$

$$= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right)$$

$$= 1$$

---

۸) الف ـ با استفاده از سری نمایشگر $\frac{1}{1-x}$ نشان دهید که اگر $-1 < t < 1$ آنگاه

$$\frac{t^2}{1+t^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n+2}$$

الف)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$x = -t^4 \Rightarrow \frac{1}{1+t^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n}$$

طرفین را در $t^۲$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{t^۲}{۱+t^۴}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^{۴n}.t^۲=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^{۴n+۲}$$

ب ـ با استفاده از بند (الف)، یک سری توانی نمایشگر $\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\frac{t^۲}{۱+t^۴}dt$ **بیابید.**

$$\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\frac{t^۲}{۱+t^۴}dt=\sum_{n=۰}^{\infty}\int_۰^{\frac{۱}{۲}}(-۱)^n t^{۴n+۲}dt$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}[(-۱)^n\frac{t^{۴n+۳}}{۴n+۳}]_۰^{\frac{۱}{۲}}$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۴n+۳}(\frac{۱}{۲})^{۴n+۳}$$

با محاسبه دو جمله اول سریهایت وانی نمایشگر اعداد زیر، مقدار تقریبی آنها را بیابید.

۹) $\int_۰^{\frac{۱}{۳}}\frac{۱}{۱+x^۶}dx$

با توجه به متن کتاب رابطه روبرو را داریم: $\frac{۱}{۱+x}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^n \quad , |x|<۱$

$$x=t^۶\Rightarrow\frac{۱}{۱+t^۶}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^{۶n}$$

$$\int_۰^{\frac{۱}{۳}}\frac{۱}{۱+t^۶}dt=\sum_{n=۰}^{\infty}(\int_۰^{\frac{۱}{۳}}(-۱)^n t^{۶n}dt)$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}\left[(-۱)^n\frac{t^{۶n+۱}}{۶n+۱}\right]_۰^{\frac{۱}{۳}}$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۶n+۱}(\frac{۱}{۳})^{۶n+۱}$$

$$=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۷}(\frac{۱}{۳})^۷+\ldots\simeq ۰/۳۳۳۲۶۸$$

---

۱۰) $\int_۰^{۰/۱}\frac{tg^{-۱}x}{x}dx$

طبق مسأله نمونه‌ای ۱۱.۲.۳ داریم

$$tg^{-۱}x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}x^{۲n+۱} \qquad , |x|<۱$$

$$\frac{tg^{-۱}x}{x}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}x^{۲n}$$

$$\int_۰^{۰/۱}\frac{tg^{-۱}x}{x}dx=\sum_{n=۰}^{\infty}\int_۰^{۰/۱}\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}x^{۲n}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)^۲}x^{۲n+۱}]_۰^{۰/۱}$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)^۲}(\frac{۱}{۱۰})^{۲n+۱}$$

$$=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۳^۲}(\frac{۱}{۱۰})^۳+...\simeq ۰/۰۹۹۸۸$$

۳.۳) سری تیلور

در تمرین‌های ۱ تا ۴، سری تیلور تابع f را حول c بیابید و نشان دهید که سری به دست آمده به ازای هر مقدار x به f(x) همگراست.

۱) $c=\frac{\pi}{۶}\ ,\ \ f(x)=\text{Sinx}$

سری تیلور f(x) حول نقطه c به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{۲!}(x-c)^۲+...$$

$$\begin{cases} f^{(۲k)}(x)=(-۱)^k\text{Sinx}\Rightarrow f^{(۲k)}(\frac{\pi}{۶})=(-۱)^k\frac{۱}{۲} \\ f^{(۲k+۱)}(x)=(-۱)^k\text{Cosx}\Rightarrow f^{(۲k+۱)}(\frac{\pi}{۶})=(-۱)^k\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\ ,f'(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ ,\ f''(\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲},...$$

$$f(x)=\text{Sinx}=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(x-\frac{\pi}{۶})-\frac{۱}{۲\times۲!}(x-\frac{\pi}{۶})^۲+...$$

$$+\frac{(-۱)^k\frac{۱}{۲}(x-\frac{\pi}{۶})^{۲k}}{(۲k)!}+\frac{(-۱)^k\frac{\sqrt{۳}}{۲}(x-\frac{\pi}{۶})^{۲k+۱}}{(۲k+۱)!}$$

برای نشان دادن همگرایی این سری به Sinx باید ثابت کنیم که:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}=0$$

که در آن z بین $\frac{\pi}{6}$ و x می‌باشد و $c=\frac{\pi}{6}$.

داریم:

$$f^{(n+1)}(z)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{Sin}z & \text{اگر } n+1 \text{ زوج باشد}\\ (-1)^{\frac{n}{2}+1}\operatorname{Cos}z & \text{اگر } n+1 \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

پس به ازای هر z $\quad \left|f^{(n+1)}(z)\right|\le 1$

$$\Rightarrow 0\le\left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}\right|\le\left|\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

با استفاده از تذکر ۴.۳.۳ در متن کتاب درسی $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}\right|}{(n+1)!}=0$ می‌باشد.

بنابراین با توجه به قضیه ساندویچ نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$

---

۲) $f(x)=\operatorname{Cos}x \quad , \quad c=\frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases}f^{(2k)}(x)=(-1)^k\operatorname{Cos}x\Rightarrow f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=(-1)^k\frac{1}{2}\\ f^{(2k-1)}(x)=(-1)^k\operatorname{Sin}x\Rightarrow f^{(2k-1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=(-1)^k\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2},f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2},\dots$$

$$f(x)=\operatorname{Cos}x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\frac{1}{2}}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\dots$$

$$+\frac{(-1)^k\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k}}{2k!}+\frac{(-1)^k\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

برای نشان دادن همگرایی این سری به Cosx باید ثابت کنیم که:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}=0$$

که در آن z بین $\frac{\pi}{3}$ و x می‌باشد و $c=\frac{\pi}{3}$.

داریم:

$$f^{(n+1)}(z)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{Cos}z & \text{اگر } n+1 \text{ زوج باشد}\\ (-1)^{\frac{n}{2}+1}\operatorname{Sin}z & \text{اگر } n+1 \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

پس به ازای هر z $\quad \left|f^{(n+1)}(z)\right|\leq 1$

$$\Rightarrow 0\leq\left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right|\leq\left|\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

با استفاده از تذکر ۴.۲.۳ در متن کتاب درسی $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right|}{(n+1)!}=0$ می‌باشد.

بنابراین با توجه به قضیه ساندویچ نتیجه می‌گیریم که $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$

---

۳) $f(x)=e^{2x}\quad , \quad c=0$

$$f(0)=e^0=1\ ,\ f'(x)=2e^{2x}\Rightarrow f'(0)=2e^0=2$$
$$f''(x)=2^2e^{2x}\Rightarrow f''(0)=2^2=4$$
$$f'''(x)=2^3e^{2x}\Rightarrow f'''(0)=2^3=8$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=2^ne^{2x}\Rightarrow f^{(n)}(0)=2^n$$
$$f(x)=e^{2x}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\ldots$$

برای نشان دادن همگرایی سری به e^{2x} باید ثابت کنیم که

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}=0$$

که در آن z بین 0 و x می‌باشد و $c=0$

$$f^{(n)}(x)=2^ne^{2x}$$

اگر $x>0$، آنگاه $0<z<x$ و درنتیجه $e^{2z}<e^{2x}$ پس:

$$0<r_n(x)<2^{n+1}e^{2x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابر تذکر ۴.۲.۳ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}e^{2x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=e^{2x}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$

طبق قضیه ساندویچ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$

اگر $x<\circ$ آنگاه $x<z<\circ$ و درنتیجه $e^{2z}<1$ و

$$\circ<\left|r_n(x)\right|<\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

بنابر تذکر ۴.۳.۲ و طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\circ$

---

۴) $f(x)=e^x \quad , \quad c=-2$

$$f(-2)=e^{-2} \;,\; f'(x)=e^x \Rightarrow f'(-2)=e^{-2}$$

$$f''(x)=e^x \Rightarrow f''(-2)=e^{-2}$$

$$f'''(x)=e^x \Rightarrow f'''(-2)=e^{-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(-2)=e^{-2}$$

$$f(x)=e^x=f(-2)+f'(-2)(x-(-2))+\frac{f''(-2)}{2}(x-(-2))^2+\dots$$

برای نشان دادن همگرایی سری به e^x باید ثابت کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}=\circ$$

که در آن z بین ۲- و x می‌باشد و $c=-2$.

$$f^{(n)}(x)=e^x$$

اگر $x>\circ$، آنگاه $\circ<z<x$ و درنتیجه $e^z<e^x$ پس:

$$\circ<r_n(x)<e^x\frac{(x-(-2))^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابر تذکر ۴.۳.۲ $\lim_{n\to\infty} e^x\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}=e^x\lim_{n\to\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}=\circ$

طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\circ$

اگر $x<\circ$ آنگاه $x<z<\circ$ و درنتیجه $e^z<1$ و

$$\circ<\left|r_n(x)\right|<\left|\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

بنابر تذکر ۴.۳.۲ و طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\circ$

در تمرین‌های ۵ تا ۱۰، سری مکلورن هر تابع را به دست آورید. سپس شعاع همگرائی سری به دست آمده را تعیین کنید. (می‌توانید از تمرینها یا مثالهای متن استفاده کنید)

۵) $f(x)=x^{2}e^{x}$

بنابر مثال ۶.۳.۳ داریم:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\dots+\frac{x^{n}}{n!}+\dots$$

$$\Rightarrow f(x)=x^{2}e^{x}$$

$$=x^{2}+x^{3}+\frac{x^{4}}{2!}+\frac{x^{5}}{5!}+\dots+\frac{x^{n+2}}{n!}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$$

آزمون نسبت: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+3}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^{n+2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0<1$

سری به ازای هر مقدار x همگراست و شعاع همگرایی آن $R=\infty$ می‌باشد.

---

۶) $f(x)=xe^{-2x}$

بنابر مثال ۶.۳.۳ داریم:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\dots+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$

با تبدیل x به $-2x$ داریم

$$e^{-2x}=1-2x+\frac{(-2x)^{2}}{2!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n}x^{n}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}2^{n}x^{n}}{n!}$$

آزمون نسبت: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2x)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-1)^{n}(2x)^{n}}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x}{n+1}\right|=0<1$$

سری به ازای هر مقدار x همگراست و شعاع همگرایی آن $R=\infty$ می‌باشد.

۷) $f(x)=\frac{1}{x+2}$

بنابر بخش ۲.۳ کتاب درسی داریم:

$$\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$f(x)=\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$

آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{(-1)^n x^n}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right|=\left|\frac{x}{2}\right|<1$$

$$\Rightarrow -1<\frac{x}{2}<1\Rightarrow -2<x<2$$

بنابر این شعاع همگرایی سری $R=2$ می‌باشد.

---

۸) $f(x)=Ln(1-2x)$

بنابر مثال ۱۰.۲.۳ داریم:

$$Ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

با تبدیل x به $-2x$ داریم:

$$f(x)=Ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-2x)^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}x^n 2^n}{n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$$

آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-2^{n+1}x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{-2^n x^n}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}|2x|=2|x|<1$$

$$\Rightarrow\frac{-1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

بنابراین شعاع همگرایی سری $R=\frac{1}{2}$ می‌باشد.

---

۹) $f(x)=Cos^2x$ [**راهنمایی**: $Cos^2x=\frac{1+Cos2x}{2}$]

بنابر مسأله نمونه‌ای ۸.۲.۳ داریم:

$$\operatorname{Cos}x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

با تبدیل x به ۲x داریم:

$$\operatorname{Cos}2x=\sum\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow f(x)=\operatorname{Cos}^2x=\frac{1}{2}(1+\operatorname{Cos}2x)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\dots\right)$$

$$=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\dots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{(n+1)!}$$

آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}x^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(-1)^n 2^n x^{n+1}}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x(n+1)!}{(n+2)(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x}{n+2}\right|=0$$

سری به ازای هر مقدار x همگراست و شعاع همگرایی آن $R=\infty$ می‌باشد.

---

۱۰) $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{Sin}x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

بنابر مثال ۷.۳.۲ داریم:

$$\operatorname{Sin}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}=\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

برای $x\neq 0$

$$f(x)=\frac{\operatorname{Sin}x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n}}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(۲n+۱)!}{(۲n+۲)(۲n+۱)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{۲n+۲}\right|=۰<۱$$

سری به ازای هر مقدار x همگراست و شعاع همگرایی آن $R=\infty$ می‌باشد.

۴.۳) سری دو جمله‌ای

در تمرین‌های ۱ تا ۶، با استفاده از قضیه دو جمله‌ای، سری مکلورن تابع داده شده را بیابید. شعاع همگرائی هر سری را تعیین کنید. [از تمرین‌ها و مثال‌های دیگر استفاده کنید.]

۱) $f(x)=\sqrt{۱+x}$

قضیه دو جمله‌ای: اگر $|x|<۱$ آنگاه

$$(۱+x)^k=۱+kx+\frac{k(k-۱)}{۲!}x^۲+\dots+\frac{k(k-۱)(k-۲)\dots(k-n+۱)}{n!}x^n$$

$$=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{k(k-۱)\dots(k-n+۱)}{n!}x^n$$

با فرض $k=\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$f(x)=(۱+x)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱+x}$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}x+\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)}{۲!}x^۲+\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)(\frac{۱}{۲}-۲)}{۳!}x^۳+\dots$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲^۲.۲!}x^۲+\frac{۳}{۲^۳.۳!}x^۳+\dots$$

$$=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)\dots(\frac{۱}{۲}-n+۱)}{n!}x^n$$

چون $|x|<۱$ می‌باشد لذا شعاع همگرایی $R=۱$ می‌باشد.

---

۲) $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$

در تمرین (۱) x را به $-x^۳$ تبدیل می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{۱-x^۳}=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)\dots(\frac{۱}{۲}-n+۱)}{n!}(-x^۳)^n$$

$$=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)\dots(\frac{۱}{۲}-n+۱)(-۱)^n x^{۳n}}{n!}$$

برای شعاع همگرایی چون در مورد قضیه دو جمله‌ای $|x| < 1$ فرض می‌شود و در اینجا x را به $-x^3$ تبدیل کردیم داریم:

$$|-x^3| < 1 \Rightarrow -1 < x^3 < 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

شعاع همگرایی $R = 1$ می‌باشد.

---

۳) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

در قضیه دو جمله‌ای $k = -\frac{1}{2}$ و x را به $-x^2$ تبدیل می‌کنیم.

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)(-x^2)^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

$$|-x^2| < 1 \Rightarrow -1 < x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

بنابراین شعاع همگرایی $R = 1$ می‌باشد.

---

۴) $f(x) = (1+x)^{-\frac{8}{5}}$

$k = \dfrac{-8}{5}$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{8}{5}(\frac{-8}{5}-1)\dots(\frac{-8}{5}-n+1)}{n!} x^n$$

شعاع همگرایی $R = 1$ می‌باشد $|x| < 1 \Rightarrow$

---

۵) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

با استفاده از تمرین (۳) داریم:

$$f(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)(-1)^n}{n!} x^{2n}\right]$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)(-1)^n}{n!} x^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\frac{۱}{۲}\ldots(-\frac{۱}{۲}-n+۱)}{(n+۱)!}x^{۲n+۲}\cdot\frac{n!}{-\frac{۱}{۲}\ldots(-\frac{۱}{۲}-n+۱)x^{۲n+۱}}\right|$$: آزمون نسبت

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+۱}\right| = ۰ < ۱$$

بنابراین x هر عددی می‌تواند باشد ولی طبق صورت قضیه دو جمله‌ای فرض کرده‌ایم که $|x| < ۱$ بنابراین شعاع همگرایی $R = ۱$ می‌باشد.

---

۶) $f(x) = \dfrac{x^{۲}}{\sqrt{۱+x}}$

$k = -\frac{۱}{۲}$

$$f(x) = x^{۲}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+x}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۱+x}} = ۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۱}{۲}-۱)\ldots(-\frac{۱}{۲}-n+۱)}{n!}x^{n}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{۲}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+x}}$$

$$= x^{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۱}{۲}-۱)\ldots(-\frac{۱}{۲}-n+۱)}{n!}x^{n+۲}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-\frac{۱}{۲})\ldots(-\frac{۱}{۲}-n-۱+۱)x^{n+۳}}{(n+۱)!}\cdot\frac{n!}{(-\frac{۱}{۲})\ldots(-\frac{۱}{۲}-n+۱)x^{n+۲}}\right|$$:آزمون نسبت

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+۱}\right| = ۰ < ۱$$

بنابراین x هرعددی می‌تواند باشد ولی طبق صورت قضیه دو جمله‌ای فرض کرده‌ایم که $|x| < ۱$ بنابراین شعاع همگرایی $R=۱$ می‌باشد.

نکته: ضرب x^n $(n>۰)$ در شعاع همگرایی سری تاثیری ندارد.

---

۷) با استفاده از سه جملهٔ اول سری نمایشگر $\int_{۰}^{x}\sqrt{۱-t^{۳}}dt$، یک مقدار تقریبی برای $\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۱-t^{۳}}dt$ بیابید. (از تمرین ۲ استفاده کنید).

$$\sqrt{۱-t^{۳}} = ۱+\frac{۱}{۲}(-t^{۳})+\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)}{۲!}(-t^{۳})^{۲}+\ldots$$

$\simeq ۱-\frac{۱}{۲}t^{۳}-\frac{۱}{۸}t^{۶}$ تقریب سه جمله اول

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^{3}}\,dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1-\frac{1}{2}t^{3}-\frac{1}{8}t^{6})dt$$

$$=(t-\frac{1t^{4}}{24}-\frac{1t^{7}}{87})\Big]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}(\frac{1}{2})^{4}-\frac{1}{56}(\frac{1}{2})^{7}=0/49204$$

---

۸) با استفاده از سه جمله اول سری نمایشگر $\sqrt[3]{1+x}$، یک مقدار تقریبی برای $\sqrt[3]{28}$ بیابید.

$$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}} \qquad k=\frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^{2}+\ldots$$

$\simeq 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^{2}$ تقریب سه جمله اول

$$1+x=28 \Rightarrow x=27$$

این سری به ازای $|x|<1$ به تابع $\sqrt[3]{1+x}$ همگرا می‌باشد، در صورتی که $x=27$ و $|x|>1$ می‌باشد. بنابراین مقدار تقریبی برای $\sqrt[3]{28}$ با استفاده از این سری به دست نمی‌آید.

آزمون چهار گزینه‌ای فصل سوم

۱) بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ برابر است با:

الف) $(-1,1]$ ب) $[-1,1)$ ج) $[-1,1]$ د) $(-1,1)$

۲) بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ برابر است با:

الف) $(-1,1]$ ب) $[-1,1)$ ج) $[-1,1]$ د) $(-1,1)$

۳) بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(-3)^n}x^n$ برابر است با:

الف) $(-3,3)$ ب) $[-3,3)$ ج) $(-3,3]$ د) $[-3,3]$

۴) شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$ برابر است با:

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) ۱ د) ۰

۵) بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ برابر است با:

الف) $(-1,1]$ ب) $[-1,1]$ ج) $[-1,1)$ د) $(-1,1)$

۶) شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$ برابر است با:

الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) ۱ د) ۰

۷) بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ برابر است با:

الف) $(-\infty,\infty)$ ب) $\{0\}$ ج) $(-1,1)$ د) $(0,\infty)$

۸) بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ برابر است با:

الف) $(-1,1]$ ب) $[-1,1)$ ج) $[-1,1]$ د) $(-1,1)$

۹) بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ برابر است با:

الف) $(-1,1]$ ب) $[-1,1)$ ج) $[-1,1]$ د) $(-1,1)$

۱۰) شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ برابر است با:

الف) ۱　　ب) ۱-　　ج) ۰　　د) ∞

۱۱) سری مک لورن نمایشگر Sinx کدام است؟

الف) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$　　ب) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$

ج) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$　　د) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$

۱۲) سری مک لورن نمایشگر Coshx کدام است؟

الف) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$　　ب) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$

ج) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$　　د) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots$

۱۳) سری مک لورن نمایشگر $f(x)=\frac{1}{1-3x}$ کدام است؟

الف) $1+\frac{3x}{1}x+\frac{9x}{2!}x^2+\dots$　　ب) $1+3x+9x^2+27x^3+\dots$

ج) $1-3x+9x^2-27x^3+\dots$　　د) $1+(3x)^2+(3x)^4+(3x)^6+\dots$

۱۴) سری مک لورن نمایشگر $\text{Sinh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ کدام است؟

الف) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$　　ب) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$

ج) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots$　　د) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$

۱۵) فرض کنید به ازای $|x|<2$ داریم

$$f(x)=(\frac{x}{2})^3+(\frac{x}{2})^4+(\frac{x}{2})^5+\dots$$

در این صورت f(x) کدام است؟

الف) $\frac{2}{1-x}$　　ب) $\frac{3}{2-4x}$

ج) $\frac{1}{2-x}$　　د) برابر با این سه عبارت نیست

۱۶) سری مک لورن $\text{Ln}(1+x)$ کدام است؟

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$　　ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

ج) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{+1}}{(n+1)!}$　　د) برابر با این سه سری نیست

۱۷) مقدار Ln۲ با استفاده از چند جمله‌ای ششم سری مک لورن $Ln(1+x)$ برابر است با:

الف) $\frac{1}{60}$ ب) $\frac{10}{60}$ ج) $\frac{50}{60}$ د) $\frac{37}{60}$

۱۸) شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ برابر است با:

الف) ∞ ب) ۰ ج) ۱ د) 10^{6}

۱۹) بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ برابر است با:

الف) $-1<x<1$ ب) $-1\le x<1$ ج) $-1\le x\le 1$ د) $-1<x<1$

۲۰) بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ برابر است با:

الف) $[0,0]=\{0\}$ ب) $(-\infty,\infty)$

ج) $(-\infty,0]$ د) برابر با این سه بازه نیست

پاسخ آزمون چهار گزینه‌ای فصل سوم

۱) گزینه (الف) صحیح است

آزمون نسبت : $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}\cdot\frac{n}{(-1)^{n-1}x^n}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}|x|<1=|x|<1$$

برای نقاط $x=+1$ و $x=-1$ بررسی می‌کنیم.

$$x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

طبق آزمون سریهای متناوب همگرا می‌باشد.

$$x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

طبق آزمون واگرائی، واگرا می‌باشد. لذا باز، همگرائی $[-1,1)$ می‌باشد.

---

۲) گزینه (د) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{x^{n-1}}\right|=|x|<1\Rightarrow-1<x<1$$

$$x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}1^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}1$$

طبق آزمون واگرائی، واگرا می‌باشد.

$$x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$$

طبق آزمون واگرائی، واگرا می‌باشد.

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\neq 0$$

لذا بازه همگرائی $(-1,1)$ می‌باشد.

---

۳) گزینه (الف) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(-3)^{n+1}}\cdot\frac{(-3)^n}{(n+1)x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{۳}\right| = \frac{۱}{۳}|x| < ۱ \Rightarrow |x| < ۳$$

$$x = ۳ \Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n+۱}{(-۳)^n}x^n = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n+۱}{(-۳)^n}۳^n$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n+۱}{(-۱)^n}$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(n+۱)$$

طبق آزمون واگرائی، واگرا می‌باشد.

$$x = -۳ \Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n+۱}{(-۳)^n}x^n = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n+۱}{(-۳)^n}(-۳)^n$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} n+۱$$

طبق آزمون واگرائی واگرا می‌باشد.

لذا بازه همگرائی $(-۳,۳)$ می‌باشد.

---

۴) گزینه (ب) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(۲n+۲)!x^{n+۱}}{((n+۱)!)^۲}\cdot\frac{(n!)^۲}{(۲n)!x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(۲n+۲)(۲n+۱)(۲n)!}{(۲n)!}\cdot\frac{(n!)(n!)}{(n+۱)^۲(n!)(n!)}.x\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(۲n+۲)(۲n+۱)}{(n+۱)^۲}x\right| = |۴x| < ۱ \Rightarrow |x| < \frac{۱}{۴}$$

بنابراین شعاع همگرائی $R = \frac{۱}{۴}$ می‌باشد.

---

۵) گزینه (ب) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-۱)^n x^{۲n}}{۲n}\cdot\frac{۲n-۱}{(-۱)^{n-۱}x^{۲n-۱}}\right| = |x| < ۱$$

$$x = ۱ \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{x^{۲n-۱}}{۲n-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{۲n-۱}$$

طبق آزمون سری‌های متناوب، همگرا می‌باشد.

$$x = -۱ \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{x^{۲n-۱}}{۲n-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{(-۱)^{۲n-۱}}{۲n-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{۳n-۲}}{۲n-۱}$$

طبق آزمون سری‌های متناوب همگراست. بنابراین بازه همگرائی $[-1, 1]$ است.

---

۶) گزینه (الف) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x)^{n+1}}{3x^n}\right| = 3|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{3}$$

---

۷) گزینه (الف) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 0$$

سری به ازای همه مقادیر x همگراست.

---

۸) گزینه (الف) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n-1}x^n}\right| = |x| < 1$$

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

بنابر آزمونهای سریهای متناوب همگراست.

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

طبق آزمون واگرایی، واگرا می‌باشد.

لذا بازه همگرایی $(-1, 1]$ می‌باشد.

---

۹) گزینه (د) صحیح است (این تست تکرار تست ۲ می‌باشد)

---

۱۰) گزینه (الف) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{(x-1)^n}\right| = |x-1| < 1$$

بنابراین گزینه الف درست است.

۱۱) گزینه (الف) صحیح است

نمایش سری مک لورن $f(x) = Sinx = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!} x^n$

$f'(x) = Cosx \Rightarrow f'(۰) = ۱$

$f''(x) = -Sinx \Rightarrow f''(۰) = ۰$

$f'''(x) = -Cosx \Rightarrow f'''(۰) = -۱$

$f^{(۴)}(x) = Sinx \Rightarrow f^{(۴)}(۰) = ۰$

$f^{(۵)}(x) = Cosx \Rightarrow f^{(۵)}(۰) = ۱$

$\Rightarrow Sinx = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}$

---

۱۲) گزینه (د) صحیح است

نمایش سری مک لورن $f(x) = Coshx = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!} x^n$

می‌دانیم:

$Coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$

$f(۰) = Cosh(۰) = ۱$

$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} \Rightarrow f'(۰) = ۰$

$f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \Rightarrow f''(۰) = ۱$

$f'''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} \Rightarrow f'''(۰) = ۰$

$f^{(۴)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \Rightarrow f^{(۴)}(۰) = ۱$

$\vdots$

$\Rightarrow Coshx = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \dots$

---

۱۳) گزینه (ب) صحیح است

با تبدیل x به ۳x داریم:

$\frac{۱}{۱-۳x} = \sum_{n=۰}^{\infty} (۳x)^n = ۱ + ۳x + (۳x)^۲ + \dots$

---

۱۴) گزینه (د) صحیح است

نمایش سری مک لورن $f(x) = Sinhx = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!} x^n$

می‌دانیم:

$$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}$$

$$f(۰)=\sinh(۰)=۰$$

$$f'(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}\Rightarrow f'(۰)=۱$$

$$f''(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}\Rightarrow f''(۰)=۰$$

$$f'''(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}\Rightarrow f'''(۰)=۱$$

$$f^{(۴)}(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}\Rightarrow f^{(۴)}(۰)=۰$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \sinh x=x+\frac{x^{۳}}{۳!}+\frac{x^{۵}}{۵!}+\dots$$

---

۱۵) گزینه (د) صحیح است

$$|x|<۲\Rightarrow\left(\frac{x}{۲}\right)<۱$$

سری هندسی با جمله اول $\left(\frac{x}{۲}\right)^{۳}$ و قدر نسبت $\frac{x}{۲}$ می‌باشد.

$$f(x)=\frac{a_{۱}}{۱-q}=\frac{\left(\frac{x}{۲}\right)^{۳}}{۱-\frac{x}{۲}}=\frac{\frac{x^{۳}}{۲^{۳}}}{\frac{۲-x}{۲}}=\frac{x^{۳}}{۲^{۶}(۲-x)}$$

---

۱۶) گزینه (الف) صحیح است

$$\ln(۱+x)=\int\frac{۱}{۱+x}dx$$

$$|x|<۱\Rightarrow\frac{۱}{۱+x}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}x^{n}$$

$$\int\frac{۱}{۱+x}dx=\int\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}x^{n}=\sum_{n=۰}^{\infty}\int(-۱)^{n}x^{n}$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{x^{n+۱}}{n+۱}$$

---

۱۷) گزینه (د) صحیح است

از تست شماره ۱۶: $\ln(۱+x)=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{x^{n+۱}}{n+۱}$

$$\ln(۱+x)=x-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۴}}{۴}+\frac{x^{۵}}{۵}-\frac{x^{۶}}{۶}+\dots$$

شش جمله اول به ازای $x = ۱$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x+۱=۲ \Rightarrow x=۱$$

$$Ln۲ = ۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}=\frac{۶۰-۳۰+۲۰-۱۵+۱۲-۱۰}{۶۰}=\frac{۳۷}{۶۰}$$

---

۱۸) گزینه (الف) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!}\cdot\frac{(۲n+۱)!}{x^{۲n+۱}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^۲}{(۲n+۳)(۲n+۲)}\right| = ۰ < ۱$$

سری به ازای همه مقادیر x همگراست.

---

۱۹) گزینه (ج) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)^۲}\cdot\frac{n^۲}{x^n}\right| = |x| < ۱$$

$$x=۱ \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n}{n^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$$

می‌دانیم طبق قضیه‌ای در فصل ۲، $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^p}$ به ازای $p > ۱$ همگراست.

$$x=-۱ \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n}{n^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲}$$

طبق آزمون سری‌های متناوب همگراست. بنابراین گزینه ج درست می‌باشد.

---

۲۰) گزینه (ب) صحیح است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}\,\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+۱}\right| = ۰ < ۱$$

لذا سری به ازای کلیه مقادیر x همگراست.

تمرینات فصل چهارم

۱.۴) بردار در صفحه:

در تمرین‌های زیر، $۴\vec{a}+۵\vec{b}$ و $۴\vec{a}-۵\vec{b}$ را بیابید.

۱) $\vec{b}=(۱,۴)$ ، $\vec{a}=(۲,-۳)$

$۴\vec{a}=۴(۲,-۳)=(۸,-۱۲)$

$۵\vec{b}=۵(۱,۴)=(۵,۲۰)$

$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۸,-۱۲)-(۵,۲۰)=(۳,-۳۲)$

$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۸,-۱۲)+(۵,۲۰)=(۱۳,۸)$

---

۲) $\vec{b}=(۰,۱,\sqrt{z})$ ، $\vec{a}=(۱,۲,۱)$

$۴\vec{a}=(۴,۸,۴)$, $۵\vec{b}=(۰,۵,۵\sqrt{۲})$

$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۴,۸,۴)+(۰,۵,۵\sqrt{۲})=(۴,۱۳,۴+۵\sqrt{۲})$

$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۴,۸,۴)-(۰,۵,۵\sqrt{۲})=(۴,۳,۴-۵\sqrt{۲})$

---

۳) $\vec{b}=۳\vec{i}+\sqrt{۲}\,\vec{j}$ ، $\vec{a}=۵\vec{i}-۲\vec{j}$

$\vec{a}=(۵,-۲)\Rightarrow ۴\vec{a}=(۲۰,-۸)$

$\vec{b}=(۳,\sqrt{۲})\Rightarrow ۵\vec{b}=(۱۵,۵\sqrt{۲})$

$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۲۰,-۸)+(۱۵,۵\sqrt{۲})=(۳۵,-۸+۵\sqrt{۲})$

$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۲۰,-۸)-(۱۵,۵\sqrt{۲})=(۵,-۸-۵\sqrt{۲})$

---

۴) $\vec{b}=\vec{i}-۲\vec{k}$ ، $\vec{a}=۸\vec{i}+\vec{j}$

$\vec{a}=(۸,۱,۰)\Rightarrow ۴\vec{a}=(۳۲,۴,۰)$

$\vec{b}=(۱,۰,-۲)\Rightarrow ۵\vec{b}=(۵,۰,-۱۰)$

$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۳۲,۴,۰)+(۵,۰,-۱۰)=(۳۷,۴,-۱۰)$

$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۳۲,۴,۰)-(۵,۰,-۱۰)=(۲۷,۴,۱۰)$

در تمرین‌های زیر بردار نمایشگر $\overline{PQ}$ و اندازه آن را تعیین کنید.

۵) $P(۱,-۴)$ ، $Q(۵,۰)$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = (۵,۰) - (۱,-۴) = (۴,۴)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{۴^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۳۲}$$

---

۶) $P(۱,۲,۰)$ ، $Q(-۱,۱,-۲)$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = (-۱,۱,-۲) - (۱,۲,۰) = (-۲,-۱,-۲)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-۲)^۲ + (-۱)^۲ + (-۲)^۲} = \sqrt{۹}$$

در تمرین‌های ۷ و ۸ بردار واحد هم جهت با بردار داده شده را تعیین کنید.

۷) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{u} = \frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۳}$$

$$\vec{u} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{i} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{j} - \frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{k}$$

---

۸) $b = ۷\vec{i} + ۱۲\sqrt{۲}\vec{j} - ۱۲\sqrt{۲}\vec{k}$

$$\vec{u} = \frac{۱}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{۷^۲ + (۱۲\sqrt{۲})^۲ + (-۱۲\sqrt{۲})^۲} = \sqrt{۶۲۵} = ۲۵$$

$$\vec{u} = \frac{۱}{۲۵}(۷\vec{i} + ۱۲\sqrt{۲}\vec{j} - ۱۲\sqrt{۲}\vec{k})$$

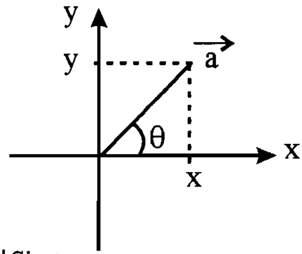
$$= \frac{۷}{۲۵}\vec{i} + \frac{۱۲}{۲۵}\sqrt{۲}\vec{j} - \frac{۱۲}{۲۵}\sqrt{۲}\vec{k}$$

---

۹) فرض کنید $\vec{a}$ بردار ناصفری در صفحه‌ی مختصات و θ زاویه بین محور x و بردار $\vec{a}$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد. نشان دهید که:

$$\vec{a} = |\vec{a}|(\mathrm{Cosx}\theta\vec{i} + \mathrm{Sin}\theta\vec{j})$$

۹) با توجه به شکل داریم:



$x = |\vec{a}|\cos\theta \quad , \quad y = |\vec{a}|\sin\theta$

$\vec{a} = (x,y) = (|\vec{a}|\cos\theta\,,\ |\vec{a}|\sin\theta)$

$= |\vec{a}|\cos\theta\,\vec{i} + |\vec{a}|\sin\theta\,\vec{j} = |\vec{a}|(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$

---

۱۰) فرض کنید $\vec{u}$ یک بردار واحد در صفحه باشد. با استفاده از تمرین ۹ نشان دهید که به ازای عددی چون θ،

$$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

با توجه به تمرین ۹، اگر به جای $\vec{a}$، $\vec{u}$ قرار دهیم داریم:

$\vec{u} = |\vec{u}|(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

توجه داریم که چون $\vec{u}$ بردار واحد می‌باشد $|\vec{u}| = ۱$ می‌باشد.

۲.۴) ضرب عددی

در تمرین‌های ۱ و ۲، $\vec{a}.\vec{b}$ و کسینوس زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

۱) $\vec{b} = (۲,-۳,۴)$ ، $\vec{a} = (۱,۱,-۱)$

$\vec{a}.\vec{b} = (۱,۱,-۱).(۲,-۳,۴) = (۱)(۲)+(۱)(-۳)+(-۱)(۴) = -۵$

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-۵}{(\sqrt{۱^۲+۱^۲+(-۱)^۲})(\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲+۴^۲})} = \frac{-۵}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۲۹}} = \frac{-۵}{\sqrt{۸۷}}$$

---

۲) $\vec{b} = (-\sqrt{۲},-\sqrt{۳},۲)$ ، $\vec{a} = (\sqrt{۲},۴,\sqrt{۳})$

$\vec{a}.\vec{b} = (\sqrt{۲})(-\sqrt{۲})+(۴)(-\sqrt{۳})+(\sqrt{۳})(۲) = -\sqrt{۴} -۴\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳} = -۲-۲\sqrt{۳}$

$$\text{Cos}\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{-۲-۲\sqrt{۳}}{(\sqrt{۲+۱۶+۳})(\sqrt{۲+۳+۴})} = \frac{-۲-۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲۱}\sqrt{۹}} = \frac{-۲-۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۸۹}}$$

---

۳) نشان دهید که بردارهای $\vec{a}=(۲,۱,-۱)$ ، $\vec{b}=(۳,۷,۱۳)$ و $\vec{c}=(۲۰,-۲۹,۱۱)$ دو به دو بر هم عمودند.

شرط عمود بودن: $\vec{a}.\vec{b}=۰$

$$\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۳)+(۱)(۷)+(-۱)(۱۳)=۶+۷-۱۳=۰$$

$$\vec{a}.\vec{c}=(۲)(۲۰)+(۱)(-۲۹)+(-۱)(۱۱)=۴۰-۲۹-۱۱=۰$$

$$\vec{b}.\vec{c}=(۳)(۲۰)+(۷)(-۲۹)+(۱۳)(۱۱)=۶۰-۲۰۳+۱۴۳=۰$$

پس دو به دو بر هم عمودند.

---

۴) فرض کنید $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,۰,۰)$. بردار $\text{Pr}_{\vec{a}}\vec{b}$ را تعیین کنید.

$$\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^۲}\vec{a}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(-۱)(۰)+(۲)(۰)=۲$$

$$|\vec{a}|^۲=۴+۱+۴=۹$$

$$\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^۲}\vec{a}=\frac{۲}{۹}(۲,-۱,۲)=(\frac{۴}{۹},\frac{-۲}{۹},\frac{۴}{۹})$$

---

۵) با یک مثال نشان دهید که بردارهایی چون $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ وجود دارند به طوری که $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$

اگر فرض کنیم:

$$\vec{a}=(۱,۱,۱)\quad,\quad \vec{b}=(۲,۲,۰)\quad,\quad \vec{c}=(۰,۲,۲)$$

$$\vec{b}\neq\vec{c}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=۲+۲+۰=۴\quad,\quad \vec{a}.\vec{c}=۰+۲+۲=۴ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$$

---

۶) نامساوی کوشی ـ شوارتس را ثابت کنید:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\leq|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}.\vec{b}|=\big||\vec{a}|\,|\vec{b}|\text{Cos}\theta\big|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\text{Cos}\theta|$$

$$\xrightarrow{|\text{Cos}\theta|\leq ۱} |\vec{a}.\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\text{Cos}\theta|\leq|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

۷) با استفاده از تمرین ۶ نشان دهید که به ازای هر a_1، a_2، a_3، b_1، b_2، b_3 داریم:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

فرض می‌کنیم:

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\quad,\quad \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}\qquad,\qquad |\vec{b}|=\sqrt{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}$$

با توجه به تمرین ۶:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\Rightarrow |\vec{a}.\vec{b}|^2\le|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

---

۸) نشان دهید که به ازای هر a_1، a_2، a_3 داریم.

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2\le\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}$$

فرض می‌کنیم:

$$a=(a_1,a_2,a_3)\qquad,\qquad b=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

با توجه به تمرین ۷ داریم:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{3}a_3\right)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\frac{1}{3}$$

---

۹)بااستفاده از قضیه ۳.۲.۴ و تمرین‌های ۶ تا ۸، نامساوی مثلثی را اثبات کنید.

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

با توجه به تمرین ۶ داریم:

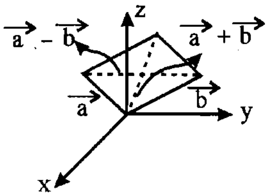
$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + ۲\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^۲ \le |\vec{a}|^۲ + ۲|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^۲$$

$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^۲ \le (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^۲ \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

---

۱۰) با استفاده از $|\vec{a}+\vec{b}|^۲ = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$ و $|\vec{a}-\vec{b}|^۲ = (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$ قانون متوازی‌الاضلاع را ثابت کنید.



$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲ + |\vec{a}-\vec{b}|^۲ = ۲|\vec{a}|^۲ + ۲|\vec{b}|^۲$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲ = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^۲ + ۲\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^۲$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲ = (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^۲ - ۲\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^۲$$

$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^۲ + |\vec{a}-\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + ۲\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^۲ + |\vec{a}|^۲ - ۲\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^۲$$

$$= ۲|\vec{a}|^۲ + ۲|\vec{b}|^۲$$

---

۱۱) با استفاده از راه حل تمرین ۱۰، اتحاد زیر را اثبات کنید.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲ - |\vec{a}-\vec{b}|^۲ = ۴\vec{a}.\vec{b}$$

از تمرین ۱۰ داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + ۲\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^۲$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ - ۲\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^۲$$

$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^۲ - |\vec{a}-\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + ۲\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^۲ - |\vec{a}|^۲ + ۲\vec{a}.\vec{b} - |\vec{b}|^۲ = ۴\vec{a}.\vec{b}$$

---

۱۲) با استفاده از تمرین ۱۱ نشان دهید که قطرهای یک متوازی‌الاضلاع برابرند اگر و تنها اگر این متوازی‌الاضلاع یک مستطیل باشد.

با استفاده از شکل کشیده شده در تمرین ۱۰ می‌بینیم که قطرهای متوازی‌الاضلاعی به اضلاع $\vec{a}$ و $\vec{b}$، $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ می‌باشند و داریم:

اگر $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}-\vec{b}|^۲$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^۲$$

$$\Rightarrow ۲\vec{a}.\vec{b}=-۲\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow ۴\vec{a}.\vec{b}=۰ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=۰$$

پس باید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یعنی اضلاع متوازی‌الاضلاع بر هم عمود باشند که نتیجه مستطیل خواهد شد.

---

۱۳) ثابت کنید که:

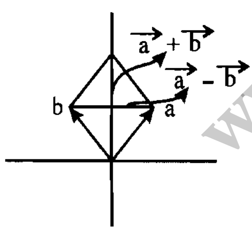
$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲$$

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}$$
$$=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲$$

می‌دانیم که $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

---

۱۴) ثابت کنید که قطرهای یک لوزی بر هم عمودند.



۱۴) می‌دانیم که در یک لوزی اندازه اضلاع با هم برابرند و از طرف دیگر با توجه به شکل، در لوزی به اضلاع $\vec{a}$ و $\vec{b}$، قطرها $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ می‌باشند و طبق تمرین ۱۳ داریم:

$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲=۰ \Rightarrow$ قطرها بر هم عمودند.

توجه داریم که در یک لوزی $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ولی $\vec{a}\neq\vec{b}$

---

۱۵) فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشند و $\vec{c}=|\vec{b}|\vec{a}-|\vec{a}|\vec{b}$. ثابت کنید که اگر $\vec{c}\neq\vec{0}$، آنگاه $\vec{c}$ نیمساز زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

فرض می‌کنیم زاویه بین بردار $\vec{a}$ و $\vec{c}$، $\theta_۱$ و زاویه بین بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$، $\theta_۲$ باشد داریم:

$$Cos\theta_۱=\frac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{\vec{a}.(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{|\vec{b}||\vec{a}|^۲+|\vec{a}|\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{|\vec{b}||\vec{a}|+\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{c}|}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \text{Cos}^{-1} \frac{|\vec{b}||\vec{a}| + \vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{c}|}$$

$$\text{Cos}\,\theta_2 = \frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{\vec{b}(|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b})}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{|\vec{b}|\vec{a}.\vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}|^2}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{c}|}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \text{Cos}^{-1} \frac{\vec{a}.\vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{c}|} \quad \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow$$ $\vec{c}$ نیمساز بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است

* توجه شود که در صورت سوال می‌بایست $C = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ تعریف شود.

---

۱۶) نشان دهید که α، β و γ زاویه‌های هادی بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ باشند، آنگاه:

$$\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\text{Cos}\,\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \quad , \quad \text{Cos}\,\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\vec{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_3}{|\vec{a}|}\right)^2$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 1$$

۳.۴) ضرب برداری

در تمرین‌های ۱ تا ۴، بردارهای $\vec{a} \times \vec{b}$ و $c.(\vec{a} \times \vec{b})$ را تعیین کنید.

۱) $c = (-1, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (0, 1, 1)$ ، $\vec{a} = (1, 1, 0)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (1)\vec{i} - (1)\vec{j} + (1)\vec{k} = (1, -1, 1)$$

$$\vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b}) = (-1, -3, 4).(1, -1, 1) = (-1)(1) + (-3)(-1) + (4)(1) = 6$$

۲) $\vec{a}=(۱,۱,۱)$ ، $\vec{b}=(۱.۰,-۱)$ ، $c=(۱,۱,-۱)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۱&۱\\ ۱&۰&-۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱&۱\\ ۰&-۱\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۱&۱\\ ۱&-۱\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۱&۱\\ ۱&۰\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-۱-۰)\vec{i}-(-۱-۱)\vec{j}+(۰-۱)\vec{k}=(-۱,۲,-۱)$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(۱,۱,-۱).(-۱,۲,-۱)=(۱)(-۱)+(۱)(۲)+(-۱)(-۱)=۲$$

---

۳) $\vec{a}=(۳,۴,۱۲)$ ، $\vec{b}=(۳,۴,-۱۲)$ ، $c=(\frac{۱}{۸},\frac{-۱}{۱۲},\frac{۱}{۶})$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۳&۴&۱۲\\ ۳&۴&-۱۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۴&۱۲\\ ۴&-۱۲\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۳&۱۲\\ ۳&-۱۲\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۳&۴\\ ۳&۴\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-۴۸-۴۸)\vec{i}-(-۳۶-۳۶)\vec{j}+(۱۲-۱۲)\vec{k}$$

$$=۹۶\vec{i}+۷۲\vec{j}=(-۹۶,۷۲,۰)$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(\frac{۱}{۸},-\frac{۱}{۱۲},\frac{۱}{۶}).(-۹۶,۷۲,۰)=(\frac{۱}{۸})(-۹۶)+(\frac{-۱}{۱۲})(۷۲)=-۱۸$$

---

۴) $\vec{a}=(۳,۴,۱۲)$ ، $\vec{b}=(۳,۴,۱۲)$ ، $c=(۱,۱,۰)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۳&۴&۱۲\\ ۳&۴&۱۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۴&۱۲\\ ۴&۱۲\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۳&۱۲\\ ۳&۱۲\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۳&۴\\ ۳&۴\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(۴۸-۴۸)\vec{i}-(۳۶-۳۶)\vec{j}+(۱۲-۱۲)\vec{k}=(۰,۰,۰)$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(۱,۱,۰).(۰,۰,۰)=۰$$

---

۵) با استفاده از ضرب برداری، سینوس زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داده شده در تمرین ۲ را حساب کنید.

طبق قسمت ب قضیه ۶.۳.۴ کتاب داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

از تمرین ۲: $\vec{a}\times\vec{b}=(-۱,۲,-۱)$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-۱)^۲+(۲)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۶}$$

$$\vec{a}=(1,1,1)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$\vec{b}=(1,0,-1)\Rightarrow|\vec{b}|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}\,\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=1\Rightarrow\theta=\mathrm{Sin}^{-1}(1)=90^\circ$$

---

۶) ثابت کنید که $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

با فرض $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ داریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\b_1&b_2&b_3\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_2&b_3\\a_2&a_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_1&b_3\\a_1&a_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}b_1&b_2\\a_1&a_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(b_2a_3-a_2b_3)\vec{i}-(b_1a_3-a_1b_3)\vec{j}+(b_1a_2-a_1b_2)\vec{k}$$

$$=-\left[(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\right]$$

$$=-(\vec{a}\times\vec{b})$$

---

۷) ثابت کنید که $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

با فرض $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ داریم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(b_2c_3-b_3c_2)\vec{i}-(b_1c_3-b_3c_1)\vec{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\vec{k}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_2c_3-b_3c_2&b_3c_1-b_1c_3&b_1c_2-b_2c_1\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \vec{j}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3)\,\vec{i}$$

$$- (a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 - a_3b_2c_3 + a_3b_3c_2)\,\vec{j}$$

$$+ (a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2)\,\vec{k}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (c_1, c_2, c_3) = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} = (a_1c_1, a_2c_2, a_3c_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c} = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(c_1, c_2, c_3)$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c} = (a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1)\,\vec{i}$$

$$+ (a_1c_1b_2 + a_2c_2b_2 + a_3c_3b_2)\,\vec{j}$$

$$+ (a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 + a_3c_3b_3)\,\vec{k}$$

$$- (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)\,\vec{i}$$

$$- (a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_2)\,\vec{j}$$

$$- (a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3 + a_3b_3c_3)\,\vec{k}$$

$$= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3)\,\vec{i}$$

$$- (a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 - a_3b_2c_3 + a_3b_3c_2)\,\vec{j}$$

$$+ (a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2)\,\vec{k}$$

$$= \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

---

۸) ثابت کنید که $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b} \times \vec{a}$

با فرض $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ داریم:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_۱+b_۱ & a_۲+b_۲ & a_۳+b_۳\\ a_۱-b_۱ & a_۲-b_۲ & a_۳-b_۳\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_۲+b_۲ & a_۳+b_۳\\ a_۲-b_۲ & a_۳-b_۳\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_۱+b_۱ & a_۳+b_۳\\ a_۱-b_۱ & a_۳-b_۳\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_۱+b_۱ & a_۲+b_۲\\ a_۱-b_۱ & a_۲-b_۲\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_۲a_۳-a_۲b_۳+a_۳b_۲-b_۲b_۳-a_۲a_۳-a_۲b_۳+a_۳b_۲+b_۲b_۳)\vec{i}$$

$$-(a_۱a_۳-a_۱b_۳+b_۱a_۳-b_۱b_۳-a_۱a_۳-b_۳a_۱+a_۳b_۱+b_۱b_۳)\vec{j}$$

$$+(a_۱a_۲-a_۱b_۲+b_۱a_۲-b_۱b_۲-a_۲a_۱-b_۲a_۱+a_۲b_۱+b_۲b_۱)\vec{k}$$

$$=(۲a_۳b_۲-۲a_۲b_۳)i-(۲a_۳b_۱-۲a_۱b_۳)j+(۲a_۲b_۱-۲a_۱b_۲)\vec{k}$$

$$۲\vec{b}\times\vec{a}=۲\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\\ a_۱ & a_۲ & a_۳\end{vmatrix}=۲\left(\begin{vmatrix}b_۲ & b_۳\\ a_۲ & a_۳\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_۱ & b_۳\\ a_۱ & a_۳\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}b_۱ & b_۲\\ a_۱ & a_۲\end{vmatrix}\vec{k}\right)$$

$$=۲\left[(a_۳b_۲-a_۲b_۳)\vec{i}-(a_۳b_۱-a_۱b_۳)\vec{j}+(a_۲b_۱-a_۱b_۲)\vec{k}\right]$$

$$=(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$$

---

۹) با یک مثال نشان دهید که ممکن است $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$، $\vec{a}\neq\vec{۰}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$

$\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\vec{a}=(۲,۲,۰)\ ,\ \vec{b}=(۱,۱,۱)\ ,\ \vec{c}=(۳,۳,۱)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۲ & ۲ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=(۲-۰)\vec{i}-(۲-۰)\vec{j}+(۲-۲)\vec{k}=(۲,-۲,۰)$$

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۲ & ۲ & ۰\\ ۳ & ۳ & ۱\end{vmatrix}=(۲-۰)\vec{i}-(۲-۰)\vec{j}+(۶-۶)\vec{k}=(۲,-۲,۰)$$

---

۱۰) ثابت کنید که $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{۰}$

از نتیجه تمرین ۷ استفاده می‌کنیم:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{b}.\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$$

$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$=(a.\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\,\vec{c}+(\vec{b}.\vec{a})\,\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\,\vec{a}+(\vec{c}.\vec{b})\,\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\,\vec{b}$$

از رابطه $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ استفاده شده است.

---

۱۱) فرض کنید $P(۱,-۱,۲)$ و $Q(۰,۳,-۱)$ و $R(۳,-۴,۱)$ سه نقطه باشند:

الف) برداری بیابید که بر صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد عمود باشد.

می‌دانیم که دو بردار $\overrightarrow{RP}$ و $\overrightarrow{RQ}$ در یک صفحه قرار دارند. برای یافتن بردار عمود بر صفحه در حقیقت باید بردار عمود بر این دو بردار را بیابیم که همان $\overrightarrow{RQ}\times\overrightarrow{RP}$ خواهد بود.

$$\overrightarrow{RP}=(۱-۳,-۱-(-۴),۲-۱)=(-۲,۳,۱)$$

$$\overrightarrow{RQ}=(۰-۳,۳-(-۴),-۱-۱)=(-۳,۷,-۲)$$

$$\overrightarrow{RQ}\times\overrightarrow{RP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۳ & ۷ & -۲\\ -۲ & ۳ & ۱\end{vmatrix}=(۷+۵)\,\vec{i}-(-۳-(+۴))\,\vec{j}+(-۹+۱۴)\,\vec{k}$$

$$=(۱۳,۷,۵)$$

ب) مساحت مثلث PQR را محاسبه کنید.

$$S=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{RQ}\times\overrightarrow{RP}\right|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳^۲+۷^۲+۵^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۴۳}$$

---

۱۲) فرض کنید P، Q و R سه نقطه داده شده در تمرین ۱۱ باشند. حجم متوازی‌السطوحی را که سه ضلع مجاور آن $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{OR}$ هستند، را حساب کنید.

بنابر مسؤله نمونه‌ای ۱۱.۳.۴ کتاب حجم متوازی‌السطوحی که $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه ضلع مجاور آن باشند برابر است با:

$|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$

$V=|\overline{OP}.(\overline{OQ}\times\overline{OR})|$

$$\overline{OQ}\times\overline{OR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۰ & ۳ & -۱\\ ۳ & -۴ & ۱\end{vmatrix}=(۳\text{-}۴)\,\vec{i}-(۰-(-۳))\,\vec{j}+(۰-۹)\,\vec{k}$$

$=(-۱,-۳,-۹)$

$V=|(۱,-۱,۲).(-۱,-۳,-۹)|=|(-۱+۳-۱۸)|=۱۶$

۴.۴) خط در فضا

در تمرین‌های ۱ تا ۴، معادلات پارامتری و متقارن خط l را که از نقطه p می‌گذرد و با بردار $\vec{a}$ موازی است، بنویسید.

۱) $p(-۲,۱,۰)$ ، $\vec{a}=(۳,-۱,۵)$

معادلات پارامتری خط
$$\begin{cases}x=x_۰+ta_۱\\ y=y_۰+ta_۲\\ z=z_۰+ta_۳\end{cases}$$

معادلات متقارن یا دکارتی
$$\frac{x-x_۰}{a_۱}=\frac{y-y_۰}{a_۲}=\frac{z-z_۰}{a_۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۲+۳t\\ y=۱-t\\ z=۵t\end{cases}\quad,\quad \frac{x-(-۲)}{۳}=\frac{y-۱}{-۱}=\frac{z}{۵}$$

---

۲) $p(۰,۰,۰)$ ، $\vec{a}=(۱۱,-۱۳,-۱۵)$

$(x,y,z)=(x_۰,y_۰,z_۰)+t\vec{a}$

معادلات پارامتری
$$\begin{cases}x=۱۱t\\ y=-۱۳t\\ z=-۱۵t\end{cases}$$

معادلات متقارن
$$\frac{x}{۱۱}=\frac{y}{-۱۳}=\frac{z}{-۱۵}$$

---

۳) $p(-۳,۶,۲)$ ، $\vec{a}=(۱,-۱,۰)$

معادلات پارامتری
$$\begin{cases}x=-۳+t\\ y=۶-t\\ z=۲\end{cases}$$

معادلات متقارن $z=۲\ ,\ \frac{x-(-۳)}{۱}=\frac{y-۶}{-۱}$

---

۴) $\vec{a}=(۰,۲,۳)$ ، $p(۲,۰,۵)$

معادلات پارامتری
$$\begin{cases} x=۲ \\ y=۲t \\ z=۵+۳t \end{cases}$$

معادلات متقارن $x=۲\ ,\ \frac{y}{۲}=\frac{z-۵}{۳}$

---

۵) معادلات پارامتری و متقارن خطی را که از دو نقطه $p_۱(۵,-۲,۴)$ و $p_۲(۲,۶,۱)$ می‌گذرد، بنویسید.

چون $p_۱$ و $p_۲$ دو نقطه‌ی متمایز روی خط هستند، پس بردار $\overrightarrow{p_۱p_۲}$ موازی با خط است.

$$\overrightarrow{p_۱p_۲}=p_۲-p_۱=(-۳,۸,-۳)$$

با انتخاب $p_۱$ به عنوان نقطه‌ی $p_۰$ و بردار $\overrightarrow{p_۱p_۲}$ به عنوان بردار موازی خط، معادلات پارامتری متقارن به صورت زیر خواهد بود.

معادلات پارامتری
$$\begin{cases} x=۵-۳t \\ y=-۲+۸t \\ z=۴-۳t \end{cases}$$

معادلات متقارن $\frac{x-۵}{-۳}=\frac{y-(-۲)}{۸}=\frac{z-۴}{-۳}$

---

۶) معادلات متقارن خطی را بنویسید که از دو نقطه $p_۱(-۱,۱,۰)$ و $p_۲(-۱,۵,۷)$ می‌گذرد.

بردار موازی خط $\overrightarrow{p_۲p_۱}=p_۲-p_۱=(۰,۴,۷)$

معادلات متقارن $x=-۱,\ \frac{y-۱}{۴}=\frac{z}{۷}$

نقطه $p_۱$ به عنوان $p_۰$ انتخاب شده است.

---

۷) معادلات متقارن خطی را بنویسید که از نقطه $p(۳,-۱,۲)$ می‌گذرد و با خط زیر موازی است:

$$\frac{x-۱}{۴}=\frac{y+۳}{۲}=z$$

با توجه به معادلات متقارن خط داده شده بردار موازی خط به صورت $(۴,۲,۱)$ می‌باشد.

معادلات متقارن خط

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-(-1)}{2}=\frac{z-2}{1}$$

---

۸) نشان دهید خطی که از دو نقطه‌ی $p_1(0,0,5)$ و $p_2(1,-1,4)$ می‌گذرد، بر خط زیر عمود است:

$$\frac{x}{7}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+9}{3}$$

بردار موازی خط گذرنده از p_1 و p_2 به صورت زیر می‌باشد.

$$\overrightarrow{p_1p_2}=p_2-p_1=(1,-1,-1)$$

بردار موازی خط داده شده عبارتست از:

$$\vec{a}=(7,4,3)$$

برای این که دو خط بر هم عمود باشند باید بردارهای موازی آنها بر هم عمود باشند، لذا باید حاصلضرب داخلی دو بردار صفر باشد.

$$\overrightarrow{p_1p_2}\cdot\vec{a}=(1,-1,-1).(7,4,3)=7-4-3=0$$

لذا دو خط بر هم عمودند.

---

۹) فاصله نقطه $p_0(5,0,-4)$ را از خط داده شده در تمرین ۵ حساب کنید.

معادله خط تمرین ۵:

$$\frac{x-5}{-3}=\frac{y+2}{8}=\frac{z-4}{-3}$$

بردار $\vec{a}=(-3,8,-3)$ موازی با خط و نقطه $p_1(5,-2,4)$ روی خط قرار دارد.

$$\overrightarrow{p_1p_0}=(0,2,-8)$$

فاصله نقطه تا خط از فرمول روبرو محاسبه می‌گردد.

$$d=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{p_0p_1}|}{|\vec{a}|}$$

که در آن $\vec{a}$ بردار موازی خط و p_0 نقطه‌ای روی خط و p_1 نقطه‌ای است که می‌خواهیم فاصله‌اش را تا خط محاسبه کنیم.

$$\vec{a}\times\overrightarrow{p_1p_0}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&8&-3\\0&2&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&-3\\2&-8\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3&-3\\0&-8\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3&8\\0&2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-58\vec{i}-24\vec{j}-6\vec{k}$$

$$|\vec{a}\times\overrightarrow{p_1p_0}|=\sqrt{(-58)^2+(-24)^2+(-6)^2}=\sqrt{3976}=60/05$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+8^2+(-3)^2}=\sqrt{82}=9/05$$

$$\Rightarrow d=\frac{60/05}{9/05}=6/63$$

توجه شود که در این مثال جای p_0 و p_1 جابجا گردیده است و این تنها ناشی از اسم‌گذاری است و در نتیجه تغییری ایجاد نمی‌کند.

---

۱۰) **فاصله نقطه** $p_1(2,1,0)$ **از خط با معادلات** $x=-2$، $y+1=z$ **را حساب کنید.**

بردار $\vec{a}=(0,1,1)$ بردار موازی خط و $p_0(-2,-1,0)$ روی خط قرار دارد.

$$\overrightarrow{p_0p_1}=(4,2,0)$$

$$\vec{a}\times\overrightarrow{p_0p_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&1\\4&2&0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$$

$$|\vec{a}\times\overrightarrow{p_0p_1}|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{36}=6$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{0+1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \vec{d}=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{p_0p_1}|}{|\vec{a}|}=\frac{6}{\sqrt{2}}=4/24$$

---

۱۱) **نقطه تلاقی دو خط** «$x=1+2t$، $y=1-4t$، $z=5-t$» و «$x=4-s$، $y=-1+6s$، $z=4+s$» **را تعیین کنید.**

برای یافتن نقطه تلاقی دو خط، مقادیر x، y و z دو خط باید با هم برابر باشند.

$$\begin{cases}1+2t=4-s\\1-4t=-1+6s\\5-t=4+s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t+s=3 & (1)\\-4t-6s=-2 & (2)\\-t-s=-1 & (3)\end{cases}$$

از معادله (۳) داریم:

$$t+s=1\Rightarrow t=1-s$$

در معادله (۲) جایگذاری می‌کنیم.

$$-۴(۱-s)-۶s=-۲ \Rightarrow -۴+۴s-۶s=-۲ \Rightarrow -۲s=۲ \Rightarrow s=-۱ \Rightarrow t=۱-s=۱-(-۱)=۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۱+۲t=۵ \\ y=۱-۴t=-۷ \\ z=۵-t=۳ \end{cases}$$

---

۱۲) آیا دو خط «$x=۳+t$ ، $y=۳+۲t$ ، $z=t$» **و** «$x=۴-s$ ، $y=۳+s$ ، $z=-۲+۳s$» **متقاطع هستند؟**

$$\begin{cases} ۳+t=۴-s \\ ۳+۲t=۳+s \\ t=-۲+۳s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+s=۱ & (۱) \\ ۲t-s=۰ & (۲) \\ t-۳s=-۲ & (۳) \end{cases}$$

معادله (۲) $\Rightarrow ۲t-s=۰ \Rightarrow s=۲t$

جایگذاری در (۳) $\Rightarrow t-۳(۲t)=-۲ \Rightarrow t=\frac{۲}{۵}$, $s=\frac{۴}{۵}$

اما این مقادیر در معادله (۱) صدق نمی‌کنند پس دو خط متقاطع نیستند.

می‌بینیم که سه معادله فوق همزمان با هم قابل حل نیستند، لذا دارای جواب نیستند.

---

۱۳) کسینوس زاویه‌ی بین دو خط داده شده در تمرین ۱۱ را بیابید.

بردارهای موازی دو خط عبارتند از:

$$\vec{a}_۱=(۲,-۴,-۱) \quad , \quad \vec{a}_۲=(-۱,۶,۱)$$

$$\vec{a}_۱.\vec{a}_۲=|\vec{a}_۱||\vec{a}_۲|\,Cos\theta \Rightarrow Cos\theta=\frac{\vec{a}_۱.\vec{a}_۲}{|\vec{a}_۱||\vec{a}_۲|}$$

$$\vec{a}_۱.\vec{a}_۲=(۲,-۴,-۱)(-۱,۶,۱)=-۲-۲۴-۱=-۲۷$$

$$|\vec{a}_۱|=\sqrt{۴+۱۶+۱}=\sqrt{۲۱} \quad , \quad |\vec{a}_۲|=\sqrt{۱+۳۶+۱}=\sqrt{۳۸}$$

$$\Rightarrow Cos\,\theta=\frac{\vec{a}_۱.\vec{a}_۲}{|\vec{a}_۱||\vec{a}_۲|}=\frac{-۲۷}{\sqrt{۲۱}\sqrt{۳۸}}=-۰/۹۵۵۷$$

---

۱۴) کسینوس زاویه بین دو خط داده شده در تمرین ۱۲ را بیابید.

بردارهای موازی دو خط عبارتند از:

$$\vec{a}_1=(1,2,1)\ ,\ \vec{a}_2=(-1,1,3)$$

$$\vec{a}_1.\vec{a}_2=|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}_1.\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\,|\vec{a}_2|}$$

$$\vec{a}_1.\vec{a}_2=(1,2,1).(-1,1,3)=-1+2+3=4$$

$$|\vec{a}_1|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}\quad,\quad |\vec{a}_2|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}_1.\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\,|\vec{a}_2|}=\frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{11}}=0/4923$$

۵.۴) صفحه در فضا

۱) معادله‌ی صفحه‌ای را که از نقطه‌ی $p_0(-1,2,3)$ می‌گذرد و بر $\vec{N}=(-4,15,\frac{-1}{2})$ عمود است، بنویسید.

معادله صفحه‌ای که از نقطه‌ی $p_0(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و بر $\vec{N}(a,b,c)$ عمود باشد به صورت زیر است.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

بنابراین معادله صفحه مورد نظر عبارتست از:

$$-4(x-(-1))+15(y-2)+(-\frac{1}{2})(z-3)=0$$

$\Rightarrow$ معادله صفحه : $-4x+15y-\frac{1}{2}z-\frac{65}{2}=0$

---

۲) معادله صفحه‌ای را که از نقطه‌ی $p_0(\pi,0,-\pi)$ می‌گذرد و بر $\vec{N}=(2,3,-4)$ عمود است، بنویسید.

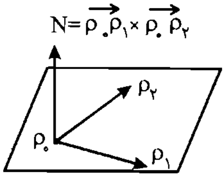
معادله صفحه : $2(x-\pi)+3(y-0)-4(z-(-\pi))=0$

$\Rightarrow$ معادله صفحه : $2x+3y-4z-6\pi=0$

---

۳) معادله صفحه‌ای را که از نقاط $p_0(2,-1,4)$ ، $p_1(5,3,5)$ و $p_2(2,4,3)$ می‌گذرد، بنویسید.

N بردار عمود بر صفحه می‌باشد.



$\overrightarrow{p_۰p_۱} = p_۱ - p_۰ = (۳,۴,۱)$

$\overrightarrow{p_۰p_۲} = p_۲ - p_۰ = (۰,۵,-۱)$

$$\vec{n} = \overrightarrow{p_۰p_۱} \times \overrightarrow{p_۰p_۲} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ \end{vmatrix} = (-۹)\,\vec{i} - (-۳)\,\vec{j} + ۱۵\,\vec{k}$$

بنابراین معادله صفحه عمود بر $\vec{N}$ و گذرنده از یکی از نقاط مثلاً $p_۰$ را می‌نویسیم:

$-۹(x-۲)+۳(y+۱)+۱۵(z-۴)=۰$

$-۹x+۳y+۱۵z-۳۹=۰$

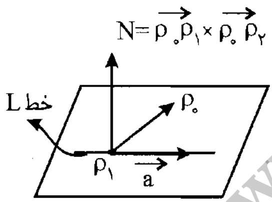
---

۴) معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل نقطه‌ی $p_۰\ (۱,-۱,۲)$ و خط زیر باشد:

$x+۲=y+۱=\frac{z+۵}{۲}$

برای نوشتن معادله صفحه باید بردار عمود بر صفحه را بیابیم.

بردار موازی خط و در نتیجه صفحه عبارتست از $\vec{a}=(۱,۱,۲)$ و نقطه‌ی $p_۱(-۲,-۱,-۵)$ روی خط و در نتیجه صفحه می‌باشد. پس بردار حاصل از $\overrightarrow{p_۰p_۱}\times\vec{a}$ بردار عمود بر صفحه می‌باشد.



$\overrightarrow{p_۰p_۱} = p_۱ - p_۰ = (-۳,۰,-۷)$

$$N = \overrightarrow{p_۰p_۱}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۳ & ۰ & -۷ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۷i - (-۶+۷)\,\vec{j} - ۳\vec{k} = (۷,-۱,-۳)$$

بنابراین معادله صفحه عمود بر $\vec{N}$ که از نقطه $p_۰$ می‌گذرد عبارتست از:

$۷(x-۱)-(y+۱)-۳(z-۲)=۰$

$\Rightarrow ۷x-y-۳z-۲=۰$

---

۵) معادله صفحه‌ای را که از نقطه‌ی $(۲,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ می‌گذرد و بر خط $z=۹t$، $y=۲\pi+۵t$، $x=\pi+۲t$ عمود است را بنویسید.

معادله پارامتری خط داده شده است پس بردار موازی خط که همان عمود بر صفحه می‌باشد عبارتست از $\vec{a}=(۲,۵,۹)$

$\Rightarrow$ معادله صفحه : $۲(x-۲)+۵(y-\frac{۱}{۲})+۹(z-\frac{۱}{۳})=۰$

$\Rightarrow ۲x+۵y+۹z-\frac{۱۹}{۲}=۰$

---

۶) معادله خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(۲,-۱,۰)$ می‌گذرد و بر صفحه $۲x-۳y+۴z=۵$ عمود است.

بردار عمودبر صفحه، بردار موازی خط مطلوب می‌باشد. پس، $\vec{a}=(۲,-۳,۴)$ بردار موازی خط می‌باشد.

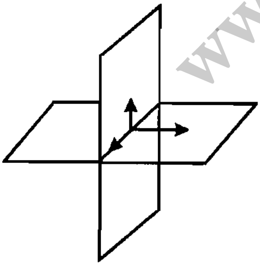
$\Rightarrow$ معادله صفحه : $\frac{x-x_۰}{a_۱}=\frac{y-y_۰}{a_۲}=\frac{z-z_۰}{a_۳}$

$\Rightarrow \frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۱}{-۳}=\frac{z}{۴}$

---

۷) محل تلاقی دو صفحه‌ی $x-z=۱$ و $۲x-۳y+۴z=۲$ خط l است. معادلات پارامتری l را بیابید.

با توجه به شکل می‌بینیم که حاصلضرب خارجی دو بردار عمود بر صفحه‌ها، بردار موازی خط حاصل از تلاقی دو صفحه را می‌دهد. پس:



$\vec{a}=\vec{N}_۱\times\vec{N}_۲$

$N_۱$: بردار عمود بر صفحه اول

$N_۲$: بردار عمود بر صفحه دوم

$\vec{N}_۱=(۱,۰,-۱)\quad,\quad \vec{N}_۲=(۲,-۳,۴)$

$$\vec{a}=\vec{N}_۱\times\vec{N}_۲=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۰&-۱\\ ۲&-۳&۴\end{vmatrix}=(-۳)\vec{i}-(۴-(-۲))\vec{j}+(-۳)\vec{k}=(-۳,-۶,-۳)$$

حال کافی است که یک نقطه از خط مورد نظر را داشته باشیم بنابراین باید معادلات صفحه را تلاقی داده و نقطه‌ای مشترک در دو صفحه بیابیم.

معادله صفحه اول $x-z=۱\Rightarrow x=۱+z \qquad (۱)$

معادله صفحه دوم $2x - 3y + 4z = 2$ (۲)

$2(1+z) - 3y + 4z = 2 \Rightarrow \quad 6z - 3y = 0$

اگر $z = 0 \Rightarrow 6(0) - 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \;,\; x = 1+z = 1$

پس نقطه $(1,0,0)$ روی هر دو صفحه و در نتیجه روی خط قرار دارد.

معادله خط: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{-3}$

---

۸) محل تلاقی خط $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = -z$ **را با صفحه** $2x - 3y - 4z = 2$ **بیابید.**

بردار موازی خط $\vec{a} = (2,3,-1)$ و نقطه $(-1,-3,0)$ روی خط قرار دارد.

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t - 3 \\ z = -t \end{cases}$$
معادلات پارامتری خط

با جایگذاری این معادلات در معادله صفحه مقدار t را به دست می‌آوریم.

$2(2t-1) - 3(3t-3) - 4(-t) = 2 \Rightarrow -t = -5 \Rightarrow t = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 1 = 2(5) - 1 = 9 \\ y = 3t - 3 = 3(5) - 3 = 12 \\ z = -t = -5 \end{cases}$$

---

۹) فاصله نقطه‌ی $p(3,-1,4)$ **را از صفحه** $2x - y + z = 5$ **محاسبه کنید.**

فاصله نقطه‌ی $p(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $ax + by + cz + d = 0$ برابر است با:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

معادله صفحه: $2x - y + z - 5 = 0$

$$h = \frac{|2(3) + (-1)(-1) + (1)(4) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}}$$

---

۱۰) نشان دهید که دو صفحه‌ی $2x - 3y + 4z = 5$ **و** $4x - 6y + 8z = -1$ **موازیند و سپس فاصله‌ی بین آنها را حساب کنید.**

برای نشان دادن موازی بودن دو صفحه باید نشان دهیم که بردارهای عمود آنها موازیند. دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر و تنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{۰}$

$$\vec{N}_۱=(۲,-۳,۴)\quad,\quad \vec{N}_۲=(۴,-۶,۸)$$

$$\vec{N}_۱\times\vec{N}_۲=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۴ & -۶ & ۸\end{vmatrix}=(-۲۴+۲۴)\,\vec{i}-(۱۶-۱۶)\,\vec{j}+(-۱۲+۱۲)\,\vec{k}=\vec{۰}$$

پس دو صفحه موازیند.

برای پیدا کردن فاصله دو صفحه موازی از هم، کافی است فاصله یک نقطه از یک صفحه را از صفحه دیگر بدست آوریم. پس یک نقطه از صفحه اول را بدست می‌آوریم:

$$۲x-۳y+۴z=۵\rightarrow x=۰,y=۰\Rightarrow z=\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow h=\frac{|۴(۰)+(-۶)(۰)+۸(\frac{۵}{۴})+۱}{\sqrt{۴^۲+(-۶)^۲+(۸)^۲}}=\frac{۱۱}{\sqrt{۱۱۶}}$$

---

۱۱) نقطه‌ی تلاقی سه صفحه‌ی $x+y=۱$ ، $y+z=۲$ و $x+z=۳$ را تعیین کنید.

$$x+y=۱\Rightarrow y=۱-x$$

$$y+z=۲\Rightarrow z=۲-y\Rightarrow z=۲-(۱-x)=۲-۱+x=۱+x$$

$$x+z=۳\Rightarrow\quad x+۱+x=۳\Rightarrow ۲x=۲\Rightarrow x=۱$$

$$y=۱-x\Rightarrow y=۱-۱=۰$$

$z=۱+x\Rightarrow z=۲\Rightarrow p(۱,۰,۲)$ محل تلاقی سه صفحه

آزمون چهار گزینه‌ای فصل چهارم

۱) فرض کنید $\vec{a}=(-۲,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۱,۲,۰)$ در این صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

الف) $(-۵,-۱۱,۲)$ ب) $(-۵,۰,۱۱)$ ج) $(۵,۰,۰)$ د) $(-۵,۰,۰)$

۲) معادلات پارامتری خط گذرنده از نقطه $(۱,-۳,۰)$ و موازی با بردار $(۱,۳,۲)$ عبارتند از:

الف) $x=۱+۲t\ ,\ y=۳+۳t\ ,\ z=t$ ب) $x=۱+۲t\ ,\ y=-۳-۳t\ ,\ z=t$

ج) $x=۱-۲s\ ,\ y=-۳-۳s\ ,\ z=-s$ د) هر سه گزینه نادرست است.

۳) نقطه‌ی تلاقی دو خط $۵-z=\frac{y-۱}{-۴}=\frac{x-۱}{۲}$ و $z-۴=\frac{y+۱}{۶}=۴-x$ برابر است با:

الف) $(۳,۷,۵)$ ب) $(۱,۰,۰)$ ج) $(۳,-۷,۵)$ د) $(۰,۰,۰)$

۴) معادله صفحه‌ای که از نقطه‌ی $(۱,-۳,۲)$ می‌گذرد و بر خط گذرنده از نقاط $(۲,۳,۵)$ و $(-۴,۸,۶)$ عمود است کدام است؟

الف) $۲-x+۵y+۶z=۰$ ب) $x+۵y+۶z+۲=۰$

ج) $x+۵y+۶z-۲=۰$ د) $x+۵y-۶z=۰$

۵) تصویر بردار $\vec{b}=(۱,-۳,۲)$ در جهت بردار $\vec{a}=(-۲,-۱,۳)$ برابر است با:

الف) $\left[\frac{۸}{۷},-\frac{۴}{۷},\frac{۱۲}{۷}\right]$ ب) $\left[-۱,-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right]$

ج) $\left[\frac{-۱۴}{\sqrt{۱۴}},\frac{-۷}{\sqrt{۱۴}},\frac{۲۱}{\sqrt{۱۴}}\right]$ د) برابر با این سه بردار نیست

۶) فرض کنید $\vec{a}=(۰,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۰,-۲,-۱)$. در این صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ کدام است؟

الف) $(-۵,-۱۱,۲)$ ب) $(-۵,-۱۱,۰)$ ج) $(-۵,۰,۰)$ د) $(۵,۰,۰)$

۷) فاصله نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ تا خط گذرنده از نقاط $B(-۱,۲,۱)$ و $C(۴,۳,۲)$ برابر است با:

الف) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۵}$ ب) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۶}$ ج) $\frac{۲۴}{۹}$ د) ۱

۸) معادلات خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(۴,-۶,۵)$ و $(۰,۰,-۵)$ عبارتند از:

الف) $\frac{x}{۲}=\frac{y}{-۳}=\frac{z+۵}{۵}$ ب) $\frac{x}{۴}=\frac{y}{۶}=\frac{z+۵}{۱۰}$

ج) $\frac{x-۴}{۲}=\frac{y+۶}{-۳}=\frac{z-۵}{۵}$ د) هر سه گزینه نادرست هستند.

۹) کسینوس کوچکترین زاویه بین دو خط $(۱+۲t, ۱-۴t, ۵-t)$ و $(۴+t, -۱+۶t, ۴-t)$ برابر است با:

الف) $\frac{۲۷}{\sqrt{۷۹۸}}$ ب) $-\frac{۲۷}{\sqrt{۷۹۸}}$

ج) $\frac{\sqrt{۷۹۸}}{۲۷}$ د) این دو خط موازیند

۱۰) معادله صفحه‌ای که از نقطه‌ی $\left[\frac{۱}{۲},۰,۳\right]$ می‌گذرد و بر خط $\frac{x+۱}{۴}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z}{۵}$ عمود است، عبارت است از:

الف) $۴x+y-۱۰z=۱۷$ ب) $۸x-۲y+۱۰z=۳۴$

ج) $x+y+z=۱$ د) $x-y-z=۱$

۱۱) فرض کنید $\vec{a}=(-۲,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۱,۲,۰)$. در این صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

الف) $(۲,-۱۱,-۵)$ ب) $(۱۱,۰,-۵)$ ج) $(۰,۰,-۵)$ د) $(۰,۰,۵)$

۱۲) کدام عبارت زیر نادرست است؟

الف) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ ب) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

ج) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ د) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{۰}$

۱۳) معادله صفحه‌ای که از نقاط $(۱,۱,۱)$ و $(۲,۰,۰)$ و $(۱,۱,۰)$ می‌گذرد عبارتست از:

الف) $x+y-۲=۰$ ب) $x-y-۲=۰$ ج) $x+y+z-۲=۰$ د) $۲x+y-z=۲$

۱۴) معادله برداری خط گذرنده از نقاط (۵,۳-,۷) و (۱,۸,۲-) عبارتست از:

الف) $(x,y,z)=(۷,-۳,۵)+t(-۹,۱۱,-۴)$

ب) $(x,y,z)=(۷,-۳,۵)+t(-۲,۸,۱)$

ج) $(x,y,z)=(-۲,۸,۱)+t(۷,-۳,۵)$

د) هر سه گزینه نادرست است.

۱۵) نقطه تلاقی دو خط با معادلات پارامتری $(t,-۶t+۱,۲t-۸)$ **و** $(۳t+۱,۲t,۰)$ **برابر است با:**

الف) $(\frac{۱}{۲},۱,۰)$ ب) $(۴,۸,۰)$

ج) $(۱۳,۸,۰)$ د) این دو خط متقاطع نیستند

۱۶) محل تلاقی خط $(۲+۳t,-۳+۵t,۴-۶t)$ **با صفحه‌ی** $x-\frac{۳}{۲}y-\frac{۳}{۲}z=۲$ **کدام است؟**

الف) $(۳,-\frac{۴}{۳},۲)$ ب) $(۲,-۳,۴)$

ج) $(۹,-۴,۶)$ د) این خط، صفحه داده شده را قطع نمی‌کند.

۱۷) معادله خط محل تلاقی دو صفحه $x+y-۲z=-۳$ **و** $x-۳y-۴z=-۱۹$ **کدام است؟**

الف) $(x,y,z)=(-۷,۴,۰)+۴(۵,-۱,۲)t$

ب) $(x,y,z)=(-۷,۴,۰)+(۵,-۱,۱)t$

ج) $(x,y,z)=(\frac{۵}{۲},-\frac{۱}{۲},۱)+(-۷,۴,۰)t$

د) برابر با این سه معادله نیست.

۱۸) تصویر بردار $\vec{b}=(۲,-۳,۲)$ **در جهت بردار** $\vec{a}=(۴,-۱,-۲)$ **کدام است؟**

الف) $\frac{۱}{۳}(۱۲\vec{i}-۴\vec{j}-۸\vec{k})$ ب) $\left[\frac{۱۴}{\sqrt{۲۱}},\frac{-۲۱}{\sqrt{۲۱}},\frac{۱۴}{\sqrt{۲۱}}\right]$

ج) $(\frac{۲}{۳},-۱,\frac{۲}{۳})$ د) برابر با این سه بردار نیست.

۱۹) نقطه‌ی تلاقی خط گذرنده از مبدأ و موازی با بردار $(۱,۱,۲)$ با صفحه $x + y + ۲z = ۵$ عبارتست از:

الف) $(۱,۱,\frac{۳}{۲})$ ب) $(۰,۱,۲)$ ج) $(\frac{۵}{۶},\frac{۵}{۶},\frac{۵}{۳})$ د) $(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},۱)$

۲۰) فاصله نقطه‌ی $(۲,۰,-۱)$ تا صفحه $۳x - ۲y + ۸z = -۱$ برابر است با:

الف) $\sqrt{۵}$ ب) $\frac{-۱}{\sqrt{۷۷}}$ ج) $\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۷۷}}$ د) $\frac{\sqrt{۷۷}}{۷۷}$

پاسخ آزمون چهار گزینه‌ای فصل چهارم

۱) گزینه (د) صحیح است

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (۰ - ۰)\,\vec{i} - (۰ - ۰)\,\vec{j} + (-۴ - ۱)\,\vec{k} = (۰, ۰, -۵)$$

---

۲) گزینه (ج) صحیح است

$$\begin{cases} x = x_۰ + ta_۱ \\ y = y_۰ + ta_۲ \\ z = z_۰ + ta_۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲t + ۱ \\ y = ۳t - ۳ \\ z = t \end{cases}$$

با جایگذاری s=-t داریم:

$$\begin{cases} x = -۲s + ۱ \\ y = -۳s - ۳ \\ z = -s \end{cases}$$

---

۳) گزینه (ج) صحیح است

معادلات پارامتری خط‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_۱ = ۲t + ۱ \\ y_۱ = -۴t + ۱ \\ z_۱ = -t + ۵ \end{cases}$$

در معادله خط اول ضریب z، منفی می‌باشد که با ضرب صورت و مخرج در (۱-) داریم: $\frac{z-۵}{-۱} = ۵-z$

$$\begin{cases} x_۲ = -s + ۴ \\ y_۲ = ۶s - ۱ \\ z_۲ = s + ۴ \end{cases}$$

حال دو دسته معادله را با هم حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_۱ = x_۲ \\ y_۱ = y_۲ \\ z_۱ = z_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲t + ۱ = -s + ۴ & (۱) \\ -۴t + ۱ = ۶s - ۱ & (۲) \\ -t + ۵ = s + ۴ & (۳) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 2t+s=3 \quad (2) \Rightarrow 6s+4t=2 \quad \Rightarrow \begin{cases} 2t+s=3 \\ 4t+6s=2 \end{cases} \Rightarrow t=2\ ,\ s=-1$$

t و s به دست آمده در معادله سوم نیز صدق می‌کنند پس دو خط همدیگر را قطع می‌کنند و نقطه تلاقی از قرار دادن t یا s به دست آمده در معادلات خطوط به دست می‌آید.

$$(x,y,z)=(5,-7,3)$$

---

۴) گزینه ( ) صحیح است

بردار $\vec{a}$ یعنی خط گذرنده از دو نقطه (۲,۳,۵) و (۴-,۸,۶)، بردار عمود بر صفحه است لذا معادله صفحه بصورت زیر است.

$$\vec{N}=\overrightarrow{p_0 p_1}=(1,5,-2)$$

$$1(x-1)+5(y+3)+(-6)(z-2)=0$$

$$\Rightarrow x+5y-6z+26=0$$

بنابراین هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشند.

---

۵) گزینه (ب) صحیح است

تصویر بردار $\vec{b}$ در جهت $\vec{a}$ برابر است با:

$$pr_{\vec{a}}\ \vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,-1,-2)\cdot(2,-3,1)=(3)(2)+(-1)(-3)+(-2)(1)=7$$

$$|\vec{a}|^2=3^2+(-1)^2+(-2)^2=14$$

$$pr_{\vec{a}}\ \vec{b}=\frac{7}{14}(3,-1,-2)=(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},-1)$$

---

۶) گزینه (ج) صحیح است

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-5\vec{k}=(0,0,-5)$$

۷) گزینه (ب) صحیح است

$$D=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{p_۰p_۱}|}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a}$ بردرا موازی خط، $p_۱$ نقطه‌ای که می‌خواهیم فاصله‌اش را با خط حساب کنیم و $p_۰$ نقطه‌ای بر روی خط می‌باشد.

$$\overrightarrow{p_۰p_۱}=p_۱-p_۰=(۱,۲,۳)-(-۱,۲,۱)=(۲,۰,۲)$$

$$\vec{a}=p_۲-p_۰=(۴,۳,۲)-(-۱,۲,۱)=(۵,۱,۱)$$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\overrightarrow{p_۰p_۱}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۵ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & ۲\end{vmatrix}=(۲)\vec{i}-(۱۰-۲)\vec{j}+(-۲)\vec{k}=(۲,-۸,-۲)$$

$$\Rightarrow d=\frac{\sqrt{۲^۲+(-۸)^۲+(-۲)^۲}}{\sqrt{۵^۲+۱^۲+۱^۲}}=\frac{\sqrt{۷۲}}{\sqrt{۲۷}}=\sqrt{\frac{۷۲}{۲۷}}=\sqrt{\frac{۲۴}{۹}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

---

۸) گزینه (ج) صحیح است

بردار موازی خط $\overrightarrow{p_۰p_۱}=p_۱-p_۰=(۴,-۶,۵)-(۰,۰,-۵)=(۴,-۶,۱۰)$

خط گذرنده از $(۰,۰,-۵)$: $\frac{x}{۴}=\frac{y}{-۶}=\frac{z+۵}{۱۰}$

خط گذرنده از $(۴,-۶,۵)$: $\frac{x-۴}{۴}=\frac{y+۶}{-۶}=\frac{z-۵}{۱۰}$

با توجه به اینکه $(۴,-۶,۵)=۲(۲,-۳,۱۰)$ پس بردار $(۲,-۳,۱۰)$ نیز موازی خط می‌باشد یعنی معادله خط به صورت روبروست.

$$\frac{x-۴}{۲}=\frac{y+۶}{-۳}=\frac{z-۵}{۵}$$

---

۹) گزینه (الف) صحیح است

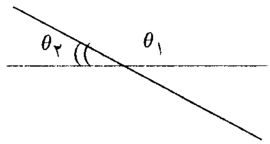
بردارهای موازی با دو خط عبارتند از:

$\vec{a}=(۲,-۴,-۱)$, $\vec{a_۲}=(-۱,۶,۱)$

$$\vec{a}_1 . \vec{a}_2 = |\vec{a}_1|\,|\vec{a}_2| \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}_1 . \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\,|\vec{a}_2|}$$

$$\cos\theta = \frac{-2-24-1}{\sqrt{(2^2)+(-4)^2+(-1)^2}\,.\sqrt{(-1)^2+6^2+1^2}} = \frac{-27}{\sqrt{798}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{-27}{\sqrt{798}}\right] = 162/89$$



$$\theta_2 = \pi - \theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta_2 = -\cos\theta = \frac{27}{\sqrt{798}}$$

توجه شود در این مسأله کوچکترین زاویه خواسته شده است.

---

۱۰) گزینه (ب) صحیح است

بردا عمود بر صفحه: $\vec{N} = (4, -1, 5)$

معادله صفحه $4(x - \frac{1}{2}) - 1(y-0) + 5(z-3) = 0$

$$\Rightarrow 4x - y + 5z = 17 \xrightarrow{\text{طرفین} \times 2} 8x - 2y + 10z = 34$$

---

۱۱) گزینه (ج) صحیح است

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -5\vec{k} = (0, 0, -5)$$

---

۱۲) گزینه (ج) صحیح است

طبق قضیه ۴.۳.۴ کتاب، گزینه‌های الف، ب و د، درست می‌باشند.

---

۱۳) گزینه (الف) صحیح است

$p_0(1, 1, 1)$, $p_1(2, 0, 0)$, $p_2(1, 1, 0)$

$$\vec{N} = \overrightarrow{p_0p_1} \times \overrightarrow{p_0p_2} = (1, -1, -1) \times (0, 0, -1)$$

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۱ & -۱ & -۱\\ ۰ & ۰ & -۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-۱ & -۱\\ ۰ & -۱\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & -۱\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۰\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\vec{i}+\vec{j}=(۱,۱,۰)$$

معادله صفحه گذرنده از $p_۰$ و عمود بر $\vec{N}$

$$۱(x-۱)+۱(y-۱)+۰(z-۱)=۰\Rightarrow x+y-۲=۰$$

---

۱۴) گزینه (الف) صحیح است

$\vec{a}=\overrightarrow{p_۰p_۱}=(-۹,۱۱,-۴)$ بردار موازی خط

معادله برداری خط : $p=p_۰+ta$

$$\Rightarrow(x,y,z)=(۷,-۳,۵)+t(-۹,۱۱,-۴)$$

---

۱۵) گزینه (د) صحیح است

در معادلات خط دوم، s را با t جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{cases}x_۱=t\\ y_۱=-۶t+۱\\ z_۱=۲t-۸\end{cases}\qquad\begin{cases}x_۲=۳s+۱\\ y_۲=۲s\\ z_۲=۰\end{cases}$$

$$\begin{matrix}x_۱=x_۲\\ y_۱=y_۲\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}t=۳s+۱\\ -۶t+۱=۲s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳s-t=-۱\\ ۲s+۶t=۱\end{cases}\Rightarrow t=\frac{۱}{۴}\ ,\ \ s=-\frac{۱}{۴}$$

این مقادیر را در معادله سوم یعنی روابط $z_۱$ و $z_۲$ قرار می‌دهیم.

$$z_۱=۲t-۸=۲(\frac{۱}{۴})-۸=-\frac{۱۵}{۲}\neq ۰=z_۲$$

بنابراین دو خط متقاطع نیستند.

---

۱۶) گزینه (الف) صحیح است

از معادلات خط، x، y و z را در معادلات صفحه قرار می‌دهیم. داریم:

$$(۲+۳t)-\frac{۳}{۲}(-۳+۵t)-\frac{۳}{۲}(۴-۶t)=۲$$

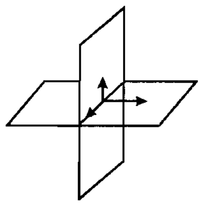
$$\Rightarrow\frac{۹}{۲}t=\frac{۳}{۲}\Rightarrow t=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2+3t = 3 \\ y = -3+5t = -\frac{4}{3} \\ z = 4-6t = 2 \end{cases}$$

---

۱۷) گزینه (الف) صحیح است

بردار موازی خط، حاصلضرب خارجی بردارهای عمود بر صفحات است.



$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (-10)\,\vec{i} - (-2)\,\vec{j} + (-4)\,\vec{k} = (-10, 2, -4)$$

حال یک نقطه از خط مورد نظر را بدست می‌آوریم.

معادله صفحه اول: $x + y - 2z = -3 \Rightarrow x = -3 - y + 2z$

معادله صفحه دوم: $x - 3y - 4z = -19 \Rightarrow -3 - y + 2z - 3y - 4z = -19$

$\Rightarrow -2z - 4y = -16$

$z = 0 \Rightarrow y = 4\,,\ x = -3-4+2(0) = -7 \Rightarrow (-7, 4, 0)$

$\Rightarrow p = p_0 + ta$

$(x,y,z) = (-7, 4, 0) + t(-10, 2, -4)$

دو بردار $4(5,-1,2)$ و $(-10,2,-4)$ موازی هستند.

---

۱۸) گزینه (د) صحیح است

$$pr_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} = \frac{8+3-4}{4^2+(-1)^2+(-2)^2}(4,-1,-2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

---

۱۹) گزینه (ج) صحیح است

ابتدا معادلات پارامتری خط را بدست می‌آوریم:

مبدأ: $p_0(0,0,0)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = ۲t \end{cases}$$

در معادله صفحه قرار می‌دهیم:

$$t + t + ۴t = ۵ \rightarrow t = \frac{۵}{۶}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۵}{۶}\ ,\ y = \frac{۵}{۶}\ ,\ z = \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳}$$

---

۲۰) گزینه (د) صحیح است

فاصله نقطه $(x_۰, y_۰, z_۰)$ از صفحه $ax + by + cz + d = ۰$ برابر است با:

$$h = \frac{|ax_۰ + by_۰ + cz_۰ + d|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{|۳(۲) - ۲(۰) + ۸(-۱) + ۱|}{\sqrt{۳^۲ + (-۲)^۲ + ۸^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۷۷}}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۷۷}} \times \frac{\sqrt{۷۷}}{\sqrt{۷۷}} = \frac{\sqrt{۷۷}}{۷۷}$$

تمرینات فصل پنجم

۱.۵) بردار و ماتریس

۱) فرض کنید $u=(۲,۰,۱,۰)$ ، $v=(۱,۲,۰,-۱)$، معادله $۳w-۲u=v$ را نسبت به w حل کنید.

$$۳w-۲u=v \Rightarrow ۳w=v+۲u \Rightarrow w=\frac{۱}{۳}(v+۲u)$$

$$w=\frac{۱}{۳}((۱,۲,۰,-۱)+۲(۲,۰,۱,۰))=\frac{۱}{۳}((۱,۲,۰,-۱)+(۴,۰,۲,۰))$$

$$=\frac{۱}{۳}(۵,۲,۲,-۱)=(\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{-۱}{۳})$$

---

۲) فرض کنید u و v بردارهای داده شده در تمرین ۱ باشند. طول بردارهای u و v و u+v را بیابید.

$$u=(۲,۰,۱,۰) \Rightarrow |u|=\sqrt{۲^۲+۰^۲+۱^۲+۰^۲}=\sqrt{۵}$$

$$v=(۱,۲,۰,-۱) \Rightarrow |v|=\sqrt{۱^۲+۲^۲+۰^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۶}$$

$$u+v=(۲,۰,۱,۰)+(۱,۲,۰,-۱)=(۲+۱,۲,۰+۱,۰-۱)=(۳,۲,۱,-۱)$$

$$\Rightarrow |u+v|=\sqrt{۳^۲+۲^۲+۱^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۱۵}$$

---

۳) فرض کنید u یک بردار مرتبهٔ n و α یک عدد حقیقی باشد نشان دهید که: $|\alpha u|=|\alpha|\,|u|$

با فرض $u=(u_۱,u_۲,\dots,u_n)$

$$\alpha u=(\alpha u_۱,\alpha u_۲,\dots,\alpha u_n)$$

$$|\alpha u|=\sqrt{(\alpha u_۱)^۲+(\alpha u_۲)^۲+\dots+(\alpha u_n)^۲}=\sqrt{\alpha^۲(u_۱^۲+u_۲^۲+\dots+u_n^۲)}$$

$$=\sqrt{\alpha^۲}\sqrt{(u_۱^۲+u_۲^۲+\dots+u_n^۲)}=|\alpha|\,|u|$$

---

۴) فرض کنید u یک بردار مرتبه n و α یک عدد حقیقی باشد. ثابت کنید $\alpha u=\theta$ اگر و تنها اگر $\alpha=۰$ یا $u=\theta$.

با فرض $u=(u_۱,u_۲,...,u_n)$ داریم:

$$\alpha u=(\alpha u_۱,\alpha u_۲,...,\alpha u_n)$$

از طرفی می‌دانیم که $\theta=(۰,۰,...,۰)$

$$\alpha u=\theta \Rightarrow (\alpha u_۱,\alpha u_۲,...,\alpha u_n)=(۰,۰,...,۰)$$

$$\begin{cases} \alpha u_۱=۰ \Leftrightarrow \alpha=۰ \text{ یا } u_۱=۰ \\ \alpha u_۲=۰ \Leftrightarrow \alpha=۰ \text{ یا } u_۲=۰ \\ \vdots \\ \alpha u_n=۰ \Leftrightarrow \alpha=۰ \text{ یا } u_n=۰ \end{cases}$$

۲.۵) ماتریس

۱) x، y و z را به قسمی بیابید که

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & y & ۷ \\ ۴ & ۹ & ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲x+۱ & y & ۷ \\ ۴ & ۹ & z \end{bmatrix}$$

برای تساوی دو ماتریس هم مرتبه لازم است که درایه‌های نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

$$۲=۲x+۱ \rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$۸=z$$

y هر عددی می‌تواند باشد

---

۲) مقادیر a، b، c و d را به قسمی بیابید که

$$\begin{bmatrix} ۲a+۳ & ۲b-۲ & ۲+۱ \\ a & ۴ & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-۵ & b+۱ & ۲c+۳ \\ -۸ & ۴ & ۲d \end{bmatrix}$$

$$a=-۸ \,,\, d=۲d \Rightarrow d=۰$$

$$c+۱=۲c+۳ \Rightarrow c=-۲$$

$$۲b-۲=b+۱ \Rightarrow b=۳$$

---

۳) فرض کنید

$$B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

ماتریسهای A+B، ۲A+۳B، ۳A-۲B و A + ۲(B-A) را محاسبه کنید.

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲-۱ & -۱+۳ & ۳+۰ \\ ۰+۲ & ۱-۱ & ۲+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$۲A+۳B=\begin{bmatrix} ۲(۲) & ۲(-۱) & ۲(۳) \\ ۲(۰) & ۲(۱) & ۲(۲) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳(-۱) & ۳(۳) & ۳(۰) \\ ۳(۲) & ۳(-۱) & ۳(۱) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۴-۳ & -۲+۹ & ۶+۰ \\ ۰+۶ & ۲-۳ & ۴+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۶ \\ ۶ & -۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$۳A-۲B=\begin{bmatrix} ۳(۲) & ۳(-۱) & ۳(۳) \\ ۳(۰) & ۳(۱) & ۳(۲) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲(-۱) & ۲(۳) & ۲(۰) \\ ۲(۲) & ۲(-۱) & ۲(۱) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۶-(-۲) & -۳-۶ & ۹-۰ \\ ۰-۴ & ۳-(-۲) & ۶-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & -۹ & ۹ \\ -۴ & ۵ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A+۲(B-A)=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} -۱-۲ & -۳-(-۱) & ۰-۳ \\ ۲-۰ & -۱-۱ & ۱-۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲+۲(-۳) & -۱+۲(۴) & ۳+۲(-۳) \\ ۰+۲(۲) & ۱+۲(-۲) & ۲+۲(-۱) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & ۷ & -۳ \\ ۴ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

---

۴) ماتریس C را به قسمی بیابید که

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}+۲C=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$۲c=\begin{bmatrix} ۱-۱ & ۴-۱ & ۵-۱ \\ ۰-۲ & ۲-۰ & ۱-۱ \\ ۰-(-۱) & ۰-۱ & ۱-۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۴ \\ -۲ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$c=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۴ \\ -۲ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}(۰) & \frac{۱}{۲}(۳) & \frac{۱}{۲}(۴) \\ \frac{۱}{۲}(-۲) & \frac{۱}{۲}(۲) & \frac{۱}{۲}(۰) \\ \frac{۱}{۲}(۱) & \frac{۱}{۲}(-۱) & \frac{۱}{۲}(۱) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۳}{۲} & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

---

۵) ماتریسهای A و B مذکور در تمرین ۳ را در نظر بگیرید. ماتریس D را به قسمی بیابید که $۲(-A+۳B)+۳D=A$

$$۲(-A+۳B)+۳D=A \Rightarrow ۳D=A-۲(-A+۳B)$$

$$\Rightarrow ۳D = A+۲A-۶B = ۳A-۶B \Rightarrow D = A-۲B$$

$$D = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} -۲\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۲ & ۶ & ۰ \\ ۴ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲-(-۲) & -۱-۶ & ۳-۰ \\ ۰-۴ & ۱-(-۲) & ۲-۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۷ & ۳ \\ -۴ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

---

۶) حاصل‌ضرب‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۰ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱(۵)+۲(۰) & ۱(-۲)+۲(\sqrt{۲}) \\ ۳(۵)+۱(۰) & ۳(-۲)+\sqrt{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۲+۲\sqrt{۲} \\ ۱۵ & -۶+\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰(۰)+۱(۱) & ۰(۰)+۱(۵) \\ ۲(۰)+۳(۱) & ۲(۰)+۳(۵) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۳ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱(۰)+۰(۱)+۱(۰) & ۱(۰)+۰(۰)+۱(۱) & ۱(۱)+۰(۱)+۱(۰) \\ ۲(۰)+۱(۱)+۰(۰) & ۲(۰)+۱(۰)+۰(۱) & ۲(۱)+۱(۱)+۰(۰) \\ ۳(۰)+۱(۱)+۰(۰) & ۳(۰)+۱(۰)+۰(۰) & ۳(۱)+۱(۱)+۰(۰) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳(۲) & ۳(۱) & ۳(۳) \\ -۲(۲) & -۲(۱) & -۲(۳) \\ ۰(۲) & ۰(۱) & ۰(۳) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۳ & ۹ \\ -۴ & -۲ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

---

۷) فرض کنید

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریسهای $A(B+C)$، $(AB)C$، $(AC)^T$ و $A^T(BC)$ را محاسبه کنید.

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱+۲ & -۱-۱ \\ ۳+۳ & ۲-۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲(۳)-۱(۶) & ۲(-۲)-۱(۱) \\ ۰(۳)+۱(۶) & ۰(-۲)+۱(۱) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۵ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \left[\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲(۱)-۱(۳) & ۲(-۱)-۱(۲) \\ ۰(۱)+۱(۳) & ۰(-۱)+۱(۲) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1(2)-4(3) & -1(-1)-4(-1)\\ 3(2)+2(3) & 3(-1)+2(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14 & 5\\ 12 & -5\end{bmatrix}$$

$$(AC)^T=\left[\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right]^T=\left[\begin{bmatrix}2(2)-1(3) & 2(-1)-1(-1)\\ 0(2)+1(3) & 0(-1)+1(-1)\end{bmatrix}\right]^T$$

$$=\left[\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right]^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^T(BC)=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^T\left[\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}1(2)-1(3) & 1(-1)-1(-1)\\ 3(2)+2(3) & 3(-1)+2(-1)\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 12 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2(-1)+0(12) & 2(0)+0(-5)\\ -1(-1)+1(12) & -1(0)+1(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 13 & -5\end{bmatrix}$$

---

۸) معادله ماتریس زیر را حل کنید.

$$\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(x)+5(y)\\ 2(x)+5(y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+5y\\ 2x+5y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$$

حال دستگاه دو معادله دو مجهول زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x+5y=1\\ 2x+5y=4\end{cases}\Rightarrow (2)-(1)\Rightarrow x=3\Rightarrow y=\frac{-2}{5}$$

---

۹) اگر قرار دهیم $XX=X^2$، آیا $X=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ در معادله $X^2-3X+2I=0$ صدق می‌کند؟

$$x^2=xx=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(3)+1(-2) & 3(1)+1(0)\\ -2(3)+0(-2) & -2(1)+0(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 3\\ -6 & -2\end{bmatrix}$$

$$x^2-3x+2I=\begin{bmatrix}7 & 3\\ -6 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3(3) & 3(1)\\ 3(-2) & 3(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2(1) & 2(0)\\ 2(0) & 2(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7-9+2 & 3-3+0\\ -6+6+0 & -2-0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

پس رابطه بالا صحیح می‌باشد.

۱۰) با یک مثال نشان دهید که مربع یک ماتریس ناصفر می‌تواند صفر باشد.

راهنمایی: ماتریس زیر را در نظر بگیرید $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\right)^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱(۱)+۱(-۱) & ۱(۱)+۱(-۱) \\ -۱(۱)-۱(-۱) & -۱(۱)-۱(-۱) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس مربع یک ماتریس غیر صفر می‌تواند ماتریس صفر باشد. در واقع مربع هر ماتریس به فرم $\begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix}$ صفر می‌باشد.

---

۱۱) فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۵ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$. **نشان دهید که** $AB=I=BA$. **در این صورت هر یک از این دو ماتریس را وارون ماتریس دیگر می‌نامیم.**

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۵ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱(-۵)+۳(۲) & ۱(۳)+۳(-۱) \\ ۲(-۵)+۵(۲) & ۲(۳)+۵(-۱) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I_۲$$

$$BA=\begin{bmatrix} -۵ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۵(۱)+۳(۲) & -۵(۳)+۳(۵) \\ ۲(۱)-۱(۲) & ۲(۳)-۱(۵) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I_۲$$

---

۱۲) نشان دهید که برای هر ماتریس مربعی A، ماتریس AA^T متقارن است.

می‌دانیم برای دو ماتریس مربعی A و B داریم: $(AB)^T=B^TA^T$

و ماتریس مربعی A را متقارن می‌گوئیم اگر $A^T=A$

$$\Rightarrow (AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$$

بنابراین ماتریس AA^T متقارن است.

---

۱۳) هر ماتریس A با ویژگی $AA^T=I$ را یک ماتریس متعامد می‌گوئیم. نشان دهید که ماتریسهای زیر متعامد هستند.

$$A=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{-\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

$$AA^T=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) & \frac{۱}{۲}(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\frac{۱}{۲}) \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

$$BB^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})+\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})+\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

$$C=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$CC^T=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\\ -\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha+\sin^2\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

$$D=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$DD^T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$II^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

---

۱۴) فرض کنید $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. **نشان دهید که A متعامد است اگر و تنها اگر:**

$$ac+bd=0,\ c^2+d^2=1,\ a^2+b^2=1$$

برای اینکه ماتریس A متعامد باشد باید $AA^T = I$

$$AA^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(a)+b(b) & a(c)+b(d) \\ c(a)+d(b) & c(c)+d(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲+b^۲=۱ \\ ac+bd=۰ \\ c^۲+d^۲=۱ \end{cases}$$

۳.۵ دترمینان

۱) قضیه ۹.۳.۵ را برای ماتریس‌های ۲×۲ ثابت کنید.

ماتریس $A_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم

۱) اگر ماتریس A شامل یک سطر یا ستون صفر باشد، آنگاه $|A| = ۰$.

فرض: یک سطر A صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = ۰(a_{۲۲}) - a_{۲۱}(۰) = ۰$$

یک ستون A صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} ۰ & a_{۱۲} \\ ۰ & a_{۲۲} \end{vmatrix} = ۰(a_{۲۲}) - ۰(a_{۱۲}) = ۰$$

۲) اگر تمام عناصر یک سطر (یا ستون) ماتریس A در عدد ضرب شود مقدار دترمینان این ماتریس در آن عدد ضرب می‌شود.

$$|A| = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha a_{۱۱} & \alpha a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \alpha a_{۱۱}a_{۲۲} - \alpha a_{۱۲}a_{۲۲} = \alpha |A|$$

۳) اگر دو سطر (یا ستون) یک ماتریس را با هم عوض کنیم، علامت مقدار دترمینان تغییر می‌کند.

$$B = \begin{bmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۱۱} & a_{۱۲} \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = a_{۲۱}a_{۱۲} - a_{۱۱}a_{۲۲} = -|A|$$

۴) اگر دو سطر (یا ستون) ماتریس یکسان باشند، مقدار دترمینان آن ماتریس صفر است.

$$|A| = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}$$

اگر $a_{۱۱} = a_{۲۱}, a_{۱۲} = a_{۲۲} \Rightarrow |A| = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۲}a_{۱۱} = ۰$

۵) اگر مضرب اسکالری از یک سطر (یا ستون) را با سطر (یا ستون) دیگری جمع کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11}+a_{21} & \alpha a_{12}+a_{22}\end{bmatrix}$$

$$|B|=a_{11}(\alpha a_{12}+a_{22})-a_{12}(\alpha a_{11}+a_{21})$$

$$=\alpha a_{11}a_{12}+a_{11}a_{22}-\alpha a_{12}a_{11}-a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=|A|$$

۶) اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ باشد، آنگاه

$$|AB|=|A|\,|B|$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$$

$$|AB|=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})-(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})$$

$$=[a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}+a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{22}]$$

$$-[a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}+a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}+a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}+a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}]$$

$$=a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}+a_{12}a_{21}b_{21}b_{12}-a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}-a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})=|A|\,|B|$$

۷) اگر A یک ماتریس قطری باشد، دترمینان A برابر با حاصلضرب عناصر قطری آن است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=a_{11}a_{22}-0=a_{11}a_{22}$$

۸) $|A|=\left|A^T\right|$

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow \left|A^T\right|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=|A|$$

۹) $|I|=1$

$$[I]_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow |I_2|=1\times 1-0\times 0=1$$

---

۲) دترمینانهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 1\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 1\end{vmatrix}=8(1)-2(0)=8$$

ب) $\begin{vmatrix} a-b & ۰ \\ ۱ & c-d \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a-b & ۰ \\ ۱ & c-d \end{vmatrix} = (a-b)(c-d)-۱(۰)=ac-ad-bc+bd$$

---

۳) مقدار x را به قسمی بیابید که

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ x & -۲ \end{vmatrix} = ۰$$

$$(۱)(-۲)-x(۳)=۰ \Rightarrow -۲-۳x=۰ \Rightarrow -۳x=۲ \Rightarrow x=\frac{-۲}{۳}$$

---

۴) مقادیر x را به قسمی بیابید که

$$\begin{vmatrix} x & ۲ \\ ۸ & x \end{vmatrix} > ۰$$

$$\begin{vmatrix} x & ۲ \\ ۸ & x \end{vmatrix} = x.x-۲(۸)=x^۲-۱۶>۰ \Rightarrow x^۲>۱۶ \Rightarrow |x|>۴$$

---

۵) فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس‌های A+B و AB را بیابید.

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱+۱ & -۲+۲ \\ ۰+۱ & ۱+۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A+B| = ۲(۶)-۱(۰)=۱۲$$

$$|AB| = |A|\,|B| = (۱(۵)-۱(۲))(۱(۱)-۰(-۲)) = ۳\times ۱=۳$$

---

۶) فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $xI - A$ را حساب کنید.

$$xI-A=\begin{bmatrix} x & ۰ \\ ۰ & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{bmatrix}$$

$$|xI-A| = (x-a)(x-d)-(-b)(-c)$$

---

۷) تمرین ۵ را برای $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix}$ حل کنید. سپس ریشه‌های معادله $\det(XI-A)$ را تعیین کنید. (در بخش ۷.۵ خواهیم دید که ریشه‌های این معادله مقایر ویژه A هستند)

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱+۱ & -۱-۲ \\ ۳+۰ & -۳+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$|A+B| = ۲(-۲)-(۳)(-۳) = -۴+۹=۵$$

$$|AB| = |A|\,|B| = ((۱)(-۳)-(۳)(-۱))((۱)(۱)-۰(-۲))=۰(۱)=۰$$

$$xI-A=\begin{bmatrix} x & ۰ \\ ۰ & x \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-۱ & ۱ \\ -۳ & x+۳ \end{bmatrix}$$

$$|xI-A|=(x-۱)(x+۳)-(-۳)(۱)$$

$$=x^۲+۲x-۳+۳=x^۲+۲x=۰\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=-۲$$

---

۸) دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{vmatrix} ۴ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}$

الف) با استفاده از هر سطر یا ستون که بخواهیم می‌توان مقدار دترمینان را محاسبه کرد ولی چون در سطر سوم عنصر صفر وجود دارد، راحت‌تر است که دترمینان با استفاده از این سطر محاسبه شود.

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}=۱(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}+۰(A_{۳۲})+۲(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$=(۴+۱)+۲(-۴-۶)=۵-۲۰=-۱۵$$

ب) $\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۵ & ۴ \\ ۹ & ۵ & ۳ \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۵ & ۴ \\ ۹ & ۵ & ۳ \end{vmatrix}=(-۱)(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۵ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{vmatrix}+۳(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۹ & ۳ \end{vmatrix}+۲(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۹ & ۵ \end{vmatrix}$$

$$=-(۱۵-۲۰)-۳(۳-۳۶)+۲(۵-۴۵)=۲۴$$

---

۹) نشان دهید که اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ و $\vec{c}=(c_۱,c_۲,c_۳)$ سه ضلع یک متوازی‌السطوح باشند. آنگاه حجم این متوازی‌السطوح برابر با قدر مطلق دترمینان ماتریس زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{bmatrix}$$

از فصل قبل داریم:

$$\text{حجم متوازی‌السطوح}=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=a_۱\begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix}-a_۲\begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ c_۱ & c_۳ \end{vmatrix}+a_۳\begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right| = ||A||$$

---

۱۰) فرض کنید $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ سه بردار باشند. ثابت کنید که:

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

طبق تمرین ۹ داریم:

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

---

۱۱) نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

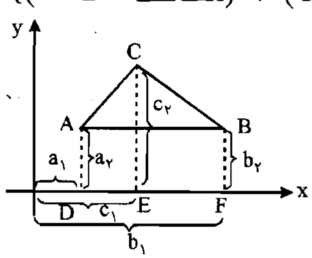
با انتخاب ستون سوم دترمینان را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

---

۱۲) فرض کنید که سه نقطهٔ $A(a_1,a_2)$، $B(b_1,b_2)$ و $C(c_1,c_2)$ سه راس یک مثلث باشند.بااستفاده‌ازتمرین ۱۱ نشان دهید که مساحت مثلث ABC برابر است با قدر مطلق {(مساحت ADFB) ـ (مساحت CEFB) + (مساحت ADEC)} که برابر است با قدر مطلق



$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

مساحت ذوزنقه CEFB $= \dfrac{(b_۲+c_۲)(b_۱-c_۱)}{۲}$

$$= \frac{b_۲b_۱-b_۲c_۱+c_۲b_۱-c_۲c_۱}{۲}$$

مساحت ذوزنقه ADEC $= \dfrac{(a_۲+c_۲)(c_۱-a_۱)}{۲}$

$$= \frac{a_۲c_۱-a_۲a_۱+c_۲c_۱-c_۲a_۱}{۲}$$

مساحت مستطیل ADFB $= a_۲(b_۱-a_۱) = a_۲b_۱-a_۲a_۱$

مساحت مثلث ABC = |مساحت ADEC + مساحت CEFB - مساحت ADFB|

مساحت ABC $= \left| \dfrac{a_۲c_۱-a_۲a_۱+c_۲c_۱-c_۲a_۱+b_۲b_۱-b_۲c_۱+c_۲b_۱-c_۲c_۱}{۲} -a_۲b_۱+a_۲a_۱ \right|$

$$= \left| \frac{a_۲c_۱-a_۲a_۱+c_۲c_۱-c_۲a_۱+b_۲b_۱-b_۲c_۱+c_۲b_۱-c_۲c_۱-۲a_۲b_۱+۲a_۲a_۱}{۲} \right|$$

$$= \left| \frac{۱}{۲}(b_۱c_۲-c_۱b_۲-a_۱c_۲+a_۲c_۱+a_۱b_۲-b_۱a_۲) \right|$$

$$= \left| \frac{۱}{۲}\left[\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix} \right] \right|$$

$$= \frac{۱}{۲} \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & ۱ \\ b_۱ & b_۲ & ۱ \\ c_۱ & c_۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

---

۱۳) مساحت مثلث به رأسهای (۳ و ۲)، (۴ و ۵) و (۷ و ۴) را تعیین کنید.

با استفاده از تمرین ۱۲ داریم:

مساحت مثلث $= \dfrac{۱}{۲} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۱ \\ ۴ & ۷ & ۱ \end{vmatrix}$

$$= \frac{۱}{۲}\left[۲(-۱)^{۱+۱} \begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۷ & ۱ \end{vmatrix} + ۳(-۱)^{۱+۲} \begin{vmatrix} ۵ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix} + ۱(-۱)^{۱+۳} \begin{vmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۷ \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{۱}{۲}(۲(۴-۷)-۳(۵-۴)+(۳۵-۱۶)) = ۵$$

---

۱۴) مساحت مثلث به رأسهای (x , y)، (۲ و ۱) و (۱ و ۳) را تعیین کنید.

مساحت مثلث $= \dfrac{۱}{۲} \begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$

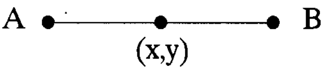
$$=\frac{1}{2}\left[x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}+y(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}+1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(x(2-1)-y(1-3)+(1-6))=\frac{1}{2}(x+2y-5)$$

---

۱۵) مساحت مثلث مذکور در تمرین ۱۴ وقتی صفر است که نقطهٔ (x , y) بر روی خطی که از نقاط (۲ و ۱) و (۱ و ۳) می‌گذرد قرار داشته باشد. با استفاده از این مطلب، معادلهٔ خطی که از نقاط (۲ و ۱) و (۱ و ۳) می‌گذرد را پیدا کنید.

در تمرین ۱۴ می‌دانیم که اگر (x,y) روی خط واصل نقاط (۲ و ۱) و (۱ و ۳) قرار گیرد مساحت صفر می‌گردد.



پس معادله $\frac{1}{2}(x+2y-5)=0$ معادله خطی است که از این دو نقطه می‌گذرد.

---

۱۶) سه خط غیر موازی $a_1x+b_1y=c_1$, $a_2x+b_2y+c_2$, $a_3x+b_3y=c_3$ یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کند اگر

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=0$$

نشان دهید که سه خط $x-2y=-3$ ، $3x-y=1$ و $5x-2y=1$ از یک نقطه می‌گذرند.

$$\begin{vmatrix}1&-2&-3\\3&-1&1\\5&-2&1\end{vmatrix}=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&1\\-2&1\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1\\5&1\end{vmatrix}+(-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&-1\\5&-2\end{vmatrix}$$

$$=(-1+2)+2(3-5)-3(-6+5)=0$$

بنابراین این سه خط یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

---

۱۷) مقدار x را به قسمی بیابید که

$$\begin{vmatrix}1&2&5\\1&x&5\\3&-1&2\end{vmatrix}=0$$

با استفاده از بسط حول سطر دوم دترمینان را محاسبه می‌کنیم.

$$1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&5\\-1&2\end{vmatrix}+x(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&5\\3&2\end{vmatrix}+5(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}$$

$$=-(4+5)+x(2-15)-5(-1-6)=-13x+26=0\Rightarrow x=2$$

۱۸) مقدار x را به قسمی بیابید که

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۱ & x & -۳ \\ ۱ & ۴ & -x \end{vmatrix} = ۰$$

حول سطر اول بسط می‌دهیم:

$$۱(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} x & -۳ \\ ۴ & -x \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & -۳ \\ ۱ & -x \end{vmatrix} - ۳(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow (-x^{۲}+۱۲)-۲(-x+۳)-۳(۴-x)=۰$$

$$\Rightarrow -x^{۲}+۵x-۶=۰ \to x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵-۲۴}}{-۲}=+۲ \quad \text{یا} \quad ۳$$

---

۱۹) دترمینان زیر را محاسبه کنید:

$$A=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

بنا به قسمت ۵ قضیه ۹.۳.۵ اگر مضرب اسکالری از یک سطر (یا ستون) را با سطر (یا ستون) دیگری جمع کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

$$\xrightarrow{R_۱-R_۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$R_۱-R_۲$ یعنی سطر دوم را از اول کم کنیم

$$\xrightarrow{R_۱-۲R_۴}\begin{vmatrix} -۷ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = -۷(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = (۰)(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} + (-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$=-(-۱)+۲(۴-۱)=۷$$

$$\Rightarrow A=-۷(۷)=-۴۹$$

---

۲۰) دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-R_1}\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-R_2}\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0$$

از آنجا که یک سطر صفر وجود دارد، مقدار دترمینان صفر می‌گردد.

۴.۵ وارون ماتریس

وارون ماتریسهای زیر را به هر دو روش مذکور در این بخش تعیین کنید.

۱) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$

الف) به روش تحویل سطری

$$A_M=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-2R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-3&-2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{R_2}{-3}}\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&+1&\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}\end{array}\right]\xrightarrow{R_1-2R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{-1}{3}&+\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}\end{array}\right]\quad\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{10}{3}\end{bmatrix}$$

ب) به روش ماتریس الحاقی

$$B=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}\Rightarrow adj(A)=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$$ همساز ماتریس A

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}B=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

---

۲) $A=\begin{bmatrix}-1&2\\1&3\end{bmatrix}$

الف) به روش تحویل سطری

$$A_M=\left[\begin{array}{cc|cc}-1&2&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right]\overset{-1\times R_1}{=}\left[\begin{array}{cc|cc}+1&-2&-1&0\\1&3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲-R_۱}\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۱ & ۱ \end{array}\right]\xrightarrow{\frac{۱}{۵}R_۲}\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱+۲R_۲}\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & -\frac{۳}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{array}\right]\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

ب) به روش ماتریس الحاقی

همساز ماتریس A $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow adj(A)=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$

توجه: در ماتریس ۲×۲ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم: $adj(A)=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}.adj(A)=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-۳}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

---

۳) $A=\begin{bmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ -Sin\theta & -Cos\theta \end{bmatrix}$

الف) به روش تحویل سطری

$$A_M=\left[\begin{array}{cc|cc} Cos\theta & -Sin\theta & ۱ & ۰ \\ -Sin\theta & -Cos\theta & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{Cos\theta}\times R_۱}\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -tan\theta & \frac{۱}{Cos\theta} & ۰ \\ -Sin\theta & -Cos\theta & ۰ & ۱ \end{array}\right]\xrightarrow{tan\theta\times R_۱+R_۲}\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -tan\theta & \frac{۱}{Cos\theta} & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{Cos\theta} & tan\theta & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-Cos\theta.R_۲}\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -tan\theta & \frac{۱}{Cos\theta} & ۰ \\ ۰ & ۱ & -Sin\theta & -Cos\theta \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱+tan\theta R_۲}\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & Cos\theta & -Sin\theta \\ ۰ & ۱ & -Sin\theta & -Cos\theta \end{array}\right]\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ -Sin\theta & -Cos\theta \end{bmatrix}$$

ب) به روش ماتریس الحاقی

$$adj(A)=\begin{bmatrix} -Cos\theta & sin\theta \\ Sin\theta & Cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}adj(A)=\frac{۱}{-Cos^۲\theta-Sin^۲\theta}\begin{bmatrix} -Cos\theta & Sin\theta \\ sin\theta & Cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ -Sin\theta & -Cos\theta \end{bmatrix}$$

۴) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

الف) به روش تحویل سطری

$$A_M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{R_2\times(-\frac{1}{3})}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & +\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{R_3(\frac{1}{3})}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2+\frac{2}{3}R_3]{R_1-\frac{4}{3}R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ب) به روش ماتریس الحاقی

به دست آوردن ماتریس همسازه:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-7$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$ $\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-6$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3$ $\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=+4$ $\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3$ ⇒ ماتریس همسازه $=\begin{bmatrix} -7 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} -۷ & -۶ & ۴ \\ -۱ & ۳ & -۲ \\ ۳ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۱\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} -۲\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} +(۰)\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = -۹ \Rightarrow A^{-۱}=\frac{-۱}{۹}\begin{bmatrix} -۷ & -۶ & ۴ \\ -۱ & ۳ & -۲ \\ ۳ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

---

۵)
$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

الف) روش‌تحویل سطری

$$A_M=\left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۲+R_۳]{R_۴-R_۱}\left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۴+R_۲]{R_۳-R_۲}\left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-(R_۳+R_۴)]{R_۲+R_۳}\left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱-R_۲}\left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right] \Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

ب) روش ماتریس الحاقی

ماتریس همسازه
$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از سطر سوم داریم:

$$|A| = 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow A^{-1}=(-1)\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

۶) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

الف) روش تحویل سطری

$$A_M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow[R_3+R_2]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\times(\frac{-1}{4})}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right]\xrightarrow[R_2+R_3]{R_1-3R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ب) روش ماتریس الحاقی

ابتدا ماتریس همسازه را می‌یابیم.

$A_{۱۱}=(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۱$ $\quad$ $A_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۱$

$A_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=-۳$ $\quad$ $A_{۲۱}=(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۱$

$A_{۲۲}=(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=-۳$ $\quad$ $A_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۱$

$A_{۳۱}=(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=-۳$ $\quad$ $A_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۱$

$$A_{۳۳}=(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=۱ \Rightarrow adjA=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۳ \\ ۱ & -۳ & ۱ \\ -۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A|=(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}+۲(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=۱-(-۱)+۲(-۳)=-۴$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}adjA=-\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۳ \\ ۱ & -۳ & ۱ \\ -۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

---

۷) تعیین کنید که به ازای چه مقادیری از x، هر یک از ماتریسهای زیر وارونپذیر است.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & x \\ x & ۴ \end{bmatrix}$$

برای آنکه ماتریس وارونپذیر باشد باید دترمینان آن مخالف صفر باشد.

$$|A|=۴-x^۲\neq ۰ \Rightarrow ۴\neq x^۲ \Rightarrow x\neq \pm ۲$$

$$B=\begin{bmatrix} x & -۱ & ۰ \\ -۱ & x & -۱ \\ ۰ & -۱ & x \end{bmatrix}$$

$$|B|=x(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} x & -۱ \\ -۱ & x \end{vmatrix}-۱(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} -۱ & -۱ \\ ۰ & x \end{vmatrix}+(۰)(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} -۱ & x \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$=x(x^۲-۱)+(-x)=x(x^۲-۲)\neq ۰$$

$$x(x^۲-۲)\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۰ \,, x^۲\neq ۲ \Rightarrow x\neq \pm\sqrt{۲}$$

---

۸) به دو روش نشان دهید که ماتریس زیر وارونپذیر است.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

روش اول:

$$|A| = ۱(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} + ۰(A_{۱۲}) + ۱(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۱+۰+(-۱) = ۰$$

درنتیجه A وارونپذیر نیست

روش دوم: در روش تحویل سطری اگر یک سطر صفر در نیمه چپ ماتریس مرکب به دست آمد، A وارونپذیر نیست.

$$A_M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳-۳R_۱]{R_۲-۲R_۱} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & -۳ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۳-R_۲} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ \end{array}\right]$$

بنابراین A وارونپذیر نیست.

---

۹) ماتریس ۲×۲ای چون x بیابید به طوری که

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

می‌دانیم: $AA^{-۱} = I$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\right)^{-۱}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}}_{I} x = \left(\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\right)^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱+۱۵ & -۲+۳۰ \\ ۱-۱۰ & ۲-۲۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & ۲۸ \\ -۹ & -۱۸ \end{bmatrix}$$

---

۱۰) با استفاده از وارون ماتریس‌ها، معادلهٔ ماتریسی زیر را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$I\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱+۱۸ \\ ۱-۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۷ \\ -۱۱ \end{bmatrix}$$

۵.۵) دستگاه معادلات خطی

دستگاه‌های معادلات خطی ۱ تا ۴ را به روش حذفی گاوس حل کنید.

۱) $2x_1+4x_2+x_3=1$

$5x_1+13x_2+7x_3=1$

$3x_1+5x_2=1$

$$A_M=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1\\ 5 & 13 & 7 & 1\\ 3 & 5 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times R_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 5 & 13 & 7 & 1\\ 3 & 5 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-5R_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 3 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow[R_3+R_2]{R_1-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]$$

سطر آخر به صورت (۱- | ۰, ۰, ۰) درآمد، پس این دستگاه هیچ جوابی ندارد.

---

۲) $x_1+x_2-x_3=1$

$2x_1+x_2+x_3=6$

$x_1+3x_2-7x_3-7$

$$A_M=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 6\\ 1 & 3 & -7 & -7\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & -6 & -8\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & -4\\ 0 & 2 & -6 & -8\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

به دلیل وجود سطر صفر، عملیات را متوقف می‌کنیم.

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1+2x_3=-3\\ x_2-3x_3=4\end{cases}$$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد که به ازای مقداردهی هر یک از متغیرها و به دست آوردن بقیه به دست می‌آیند.

مثلاً $x_3=0 \Rightarrow x_1=-3\,, x_2=4$

$x_3=1 \Rightarrow x_1=-5\,, x_2=7$

$x_3=2 \Rightarrow x_1=-7\,, x_2=10$

---

۳)

$$x_1+x_2+x_3=1$$
$$2x_1+x_2=-1$$
$$3x_1+2x_2+x_3=0$$

$$A_M=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&1&0&-1\\3&2&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&-1&-2&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&-1&-2&-3\end{array}\right]\xrightarrow[R_3+R_2]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

به دلیل وجود سطر صفر، عملیات را متوقف می‌کنیم

$$\begin{cases}x_1-x_3=-2\\x_2+2x_3=3\end{cases}$$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. با عددگذاری برای x_3 جواب‌ها به دست می‌آیند.

$x_3=0 \Rightarrow x_1=-2\,, x_2=3$

$x_3=1 \Rightarrow x_1=-1\,, x_2=1$

⋮

---

۴)

$$x_1+x_2+x_3+x_4=3$$
$$x_1+2x_2+x_3+2x_4=1$$
$$2x_1+3x_2+2x_3+3x_4=4$$

$$A_M=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&3\\1&2&1&2&1\\2&3&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

به دلیل وجود سطر صفر، عملیات را متوقف می‌کنیم.

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

با فرض $x=x_1+x_3$ داریم:

$$x+x_2+x_4=3$$
$$x+2x_2+2x_4=1$$
$$2x+3x_2+3x_4=4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&2&2&1\\2&3&3&4\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&-2\\0&1&1&-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-R_2]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x_2+x_4=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3=5 \\ x_2+x_4=-2 \end{cases}$$

با عددگذاری به جای x_4 و x_3 داریم:

$$x_3=x_4=0 \Rightarrow x_1=5\,,\ x_2=-2$$

$$x_3=0\,,x_4=1 \Rightarrow x_1=5\,,\ x_2=-3$$

$$\vdots$$

---

۵) دستگاه معادلات خطی زیر را با استفاده از وارون ماتریس ضرائب حل کنید.

$$x_1+x_2+x_3=1$$

$$x_1+x_2=2$$

$$x_2+x_3=1$$

$$Ax=B \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$x=A^{-1}B$$

ماتریس A^{-1} را می‌یابیم.

$$A_M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

جای سطر ۲ و ۳ را عوض می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\quad}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\times(-1)]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & +1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & +1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱(۱)+(۰)(۲)-۱(۱) \\ -۱(۱)+۱(۲)+۱(۱) \\ ۱(۱)-۱(۲)+۰(۱) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

---

۶) هر یک از دستگاه‌های معادلات خطی زیر را با استفاده از دستور کرامر حل کنید:

الف) $x_۱+۲x_۲=۱$

$۲x_۱-x_۲=۵$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۱(-۱)-۲(۲)=-۵$$

$$B_۱=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |B_۱|=۱(-۱)-۵(۲)=-۱۱$$

$$B_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow |B_۲|=۱(۵)-۱(۲)=۳$$

ماتریس‌های $B_۱$ و $B_۲$ از قرار دادن ماتریس $b=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ به جای ستونهای ۱ و ۲ ماتریس A حاصل شده‌اند.

$$\Rightarrow x_۱=\frac{|B_۱|}{|A|}=\frac{-۱۱}{-۵}=\frac{۱۱}{۵}$$

$$x_۲=\frac{|B_۲|}{|A|}=\frac{۳}{-۵}=-\frac{۳}{۵}$$

ب) $-x_۱+x_۲=۰$

$۲x_۱+x_۲=۳$

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(-۱)(۱)-۲(۱)=-۳$$

$$B_۱=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |B_۱|=۰(۱)-۳(۱)=-۳$$

$$B_۲=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow |B_۲|=-۱(۳)-۲(۰)=-۳$$

ماتریس‌های $B_۱$ و $B_۲$ از قرار دادن ماتریس $b=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ به جای ستونهای ۱ و ۲ ماتریس A حاصل شده‌اند.

$$x_۱=\frac{|B_۱|}{|A|}=\frac{-۳}{-۳}=۱\ ,\ x_۲=\frac{|B_۲|}{|A|}=\frac{-۳}{-۳}=۱$$

۷) **به ازای چه مقادیری از a و b، دستگاه زیر جواب دارد؟**

$$\begin{cases} ۲x_۱+۴x_۲=a \\ x_۱+۲x_۲=b \end{cases}$$

$$A_M=\left[\begin{array}{cc|c} ۲ & ۴ & a \\ ۱ & ۲ & b \end{array}\right] \xrightarrow{R_۱\times\frac{۱}{۲}} \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۲ & \frac{a}{۲} \\ ۱ & ۲ & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲-R_۱} \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۲ & \frac{a}{۲} \\ ۰ & ۰ & b-\frac{a}{۲} \end{array}\right]$$

برای اینکه دستگاه جواب داشته باشد باید $b-\frac{a}{۲}=۰$ باشد. پس

$$b-\frac{a}{۲}=۰ \Rightarrow a=۲b$$

---

۸) **به ازای چه مقادیری از a، b و c، دستگاه زیر جواب دارد؟**

$$\begin{cases} ۲x_۱+۴x_۲+x_۳=a \\ ۵x_۱+۱۳x_۲+۷x_۳=b \\ ۳x_۱+۵x_۲=c \end{cases}$$

$$A_M=\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۴ & ۱ & a \\ ۵ & ۱۳ & ۷ & b \\ ۳ & ۵ & ۰ & c \end{array}\right] \xrightarrow{R_۱\times(\frac{۱}{۲})} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & \frac{۱}{۲} & \frac{a}{۲} \\ ۵ & ۱۳ & ۷ & b \\ ۳ & ۵ & ۰ & c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳-۳R_۱]{R_۲-۵R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & \frac{۱}{۲} & \frac{a}{۲} \\ ۰ & ۳ & \frac{۹}{۲} & b-\frac{۵}{۲}a \\ ۰ & -۱ & -\frac{۳}{۲} & c-\frac{۳}{۲}a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲\times(\frac{۱}{۳})} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & \frac{۱}{۲} & \frac{a}{۲} \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} & \frac{b}{۳}-\frac{۵}{۶}a \\ ۰ & -۱ & -\frac{۳}{۲} & c-\frac{۳}{۲}a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳+R_۲]{R_۱-۲R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & -\frac{۵}{۲} & \frac{a}{۲}-\frac{۲b}{۳}+\frac{۱۰}{۶}a \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} & \frac{b}{۳}-\frac{۵}{۶}a \\ ۰ & ۰ & ۰ & c+\frac{b}{۳}-\frac{۱۴}{۶}a \end{array}\right]$$

برای اینکه دستگاه جواب داشته باشد باید $c+\frac{b}{۳}-\frac{۷}{۳}a=۰$ باشد.

$$c+\frac{b}{۳}-\frac{۷}{۳}a=۰\Rightarrow ۳c+b-۷a=۰$$

---

۹) به ازای چه مقادیری از a، b و c، دستگاه زیر جواب دارد؟

$$x_۱+x_۲+x_۳=a$$
$$۲x_۱+x_۲+x_۳=b$$
$$x_۱+۳x_۲-۷x_۳=c$$

$$A_M=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & a \\ ۲ & ۱ & ۱ & b \\ ۱ & ۳ & -۷ & c \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳-R_۱]{R_۲-۲R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & a \\ ۰ & -۱ & -۱ & b-۲a \\ ۰ & ۲ & -۸ & c-a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_۲(-۱)} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & a \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲a-b \\ ۰ & ۲ & -۸ & c-a \end{array}\right] \xrightarrow[R_۳-۲R_۲]{R_۱-R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & -a+b \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲a-b \\ ۰ & ۰ & -۱۰ & c-۳a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۳\times(\frac{-۱}{۱۰})} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & -a+b \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲a-b \\ ۰ & ۰ & ۱ & -(\frac{c-۳a}{۱۰}) \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲-R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & -a+b \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲a-b+\frac{c-۳a}{۱۰} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -(\frac{c-۳a}{۱۰}) \end{array}\right]$$

دستگاه به ازای همه مقادیر a و b و c جواب دارد.

۶.۵) پایه و بعد

۱) از مجموعه‌های زیر کدامها دارای استقلال خطی هستند.

$$A=\{(۱,۲,۳),(۱,۰,۲),(۲,۲,۵)\}$$

مجموعه $\{u_۱,u_۲,\dots,u_k\}$ از اعضای فضای برداری R^n دارای استقلال خطی است.

اگر $a_۱u_۱+a_۲u_۲+\dots+a_ku_k=(۰,\dots,۰)$ نتیجه دهد: $a_۱=a_۲=\dots=۰$

$$\Rightarrow x_۱(۱,۲,۳)+x_۲(۱,۰,۲)+x_۳(۲,۲,۵)=(۰,۰,۰)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_۱+x_۲+۲x_۳=۰ \\ ۲x_۱+۲x_۳=۰ \\ ۳x_۱+۲x_۲+۵x_۳=۰ \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} + ۰ + ۲(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$$

چون دترمینان ماتریس ضرائب صفر است، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد و این مجموعه دارای وابستگی خطی می‌باشد.

$B = \{(۱,۲,۳),(۱,۰,۲)\}$

$x_۱(۱,۲,۳) + x_۲(۱,۰,۲) = (۰,۰,۰)$

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۰ \\ ۲x_۱ = ۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ = ۰ \end{cases}$$

$\Rightarrow x_۱ = ۰ \Rightarrow x_۲ = ۰$

بنابراین این مجموعه دارای استقلال خطی است.

---

۲) از مجموعه‌های زیر کدامها پایه‌ای برای $R^۲$ تشکیل می‌دهند.

$A = \{(۲,۲),(-۲,۳)\}$

$x_۱(۲,۲) + x_۲(-۲,۳) = (۰,۰)$

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۲x_۲ = ۰ \\ ۲x_۲ + ۳x_۲ = ۰ \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} = ۶ + ۴ = ۱۰ \neq ۰$$

پس مجموعه A دارای استقلال خطی است. بنابراین پایه‌ای برای $R^۲$ می‌باشد.

$B = \{(۳,۱),(۳,۴)\}$

$x_۱(۳,۱) + x_۲(۳,۴) = (۰,۰)$

$$\begin{cases} ۳x_۱ + ۳x_۲ = ۰ \\ x_۱ + ۴x_۲ = ۰ \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۱۲ - ۳ = ۹ \neq ۰$$

پس مجموعه B دارای استقلال خطی است. بنابراین پایه‌ای برای $R^۲$ می‌باشد.

---

۳) آیا مجموعهٔ $\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱)\}$ می‌تواند پایه‌ای برای $R^۲$ باشد؟

$x_۱(۱,۱) + x_۲(۲,۱) + x_۳(۳,۱) = (۰,۰)$

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \\ (۰)x_۱ + (۰)x_۲ + (۰)x_۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

بنابراین این مجموعه دارای وابستگی خطی می‌باشد و نمی‌تواند پایه‌ای برای R^2 باشد. بطور کلی هر زیر مجموعه‌ای از R^n که دارای بیش از n عضو باشد، وابستگی خطی دارد.

---

۴) آیا مجموعهٔ $\{(-3,-3),(1,1)\}$ پایه‌ای برای R^2 است؟

$x_1(-3,-3)+x_2(1,1)=(0,0)$

$$\begin{cases}-3x_1+x_2=0\\-3x_1+x_2=0\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}-3 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-3+3=0$$

بنابراین این مجموعه را بستگی خطی دارد و نمی‌تواند پایه‌ای برای R^2 باشد. بطور کلی هرگاه یکی از بردارها، مضربی از بردار دیگر باشد، آن مجموعه وابستگی خطی خواهد داشت.

از مجموعه‌های زیر کدامها پایه‌ای برای فضای برداری R^3 هستند.

۵) $\{(1,1,1),(1,0,2),(0,1,2)\}$

$x_1(1,1,1)+x_2(1,0,2)+x_3(0,1,2)=(0,0,0)$

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1+x_3=0\\x_1+2x_2+2x_3=0\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&2\end{vmatrix}=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1\\2&2\end{vmatrix}+1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}+0=-3\neq 0$$

بنابراین این مجموعه دارای استقلال خطی است و می‌تواند پایه‌ای برای R^3 باشد.

---

۶) $\{(1,0,1),(2,0,2),(1,3,0)\}$

$x_1(1,0,1)+x_2(2,0,2)+x_3(1,3,0)=(0,0,0)$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\3x_3=0\\x_1+2x_2=0\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۰+۰+۳(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$$

بنابراین این مجموعه دارای وابستگی خطی است و نمی‌تواند پایه‌ای برای $R^۳$ باشد.

مختصات هر یک از بردارهای زیر را نسبت به پایهٔ $\{(۲,۲),(-۲,۳)\}$ تعیین کنید. (از ماتریس تغییر مختصات استفاده کنید)

۷) $(۱,۱)$

فرض $(x_۱,x_۲)$ مختصات $(۱,۱)$ در پایه $\{(۲,۲),(-۲,۳)\}$ باشد.

$$(۱,۱) = x_۱(۲,۲) + x_۲(-۲,۳)$$

$$\begin{cases} ۲x_۱-۲x_۲=۱ \\ ۲x_۱+۳x_۲=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۱۰} & \frac{۱}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۰ \end{bmatrix}$$

---

۸) $(-۱,۲)$

$$(-۱,۲) = x_۱(۲,۲) + x_۲(-۲,۳)$$

$$\begin{cases} ۲x_۱-۲x_۲=-۱ \\ ۲x_۱+۳x_۲=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۱۰} & \frac{۱}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۰} \\ \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$$

مختصات هر یک از بردارهای زیر را نسبت به پایه $\{(۱,۱,۱),(۱,۰,۲),(۰,۱,۲)\}$ تعین کنید.

۹) $(۱,۲,۳)$

از ماتریس تغییر مختصات استفاده می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_2]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&0&3&-2&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3(\frac{1}{3})}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]\xrightarrow[R_2+R_3]{R_1-R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

---

۱۰) $(1,1,1)$

$$(1,1,1)=x_1(1,1,1)+x_2(1,0,2)+x_3(0,1,2)$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

۱۱) به ازای چه مقادیری از x مجموعه $\{(0,x,1),(x,1,x),(1,x,0)\}$ پایه‌ای برای R^3 تشکیل می‌دهد؟

$$x_1(0,x,1)+x_2(x,1,x)+x_3(1,x,0)=(0,0,0)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0+(-1)^{1+2}x\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

$$=x^2+x^2-1=2x^2-1\neq 0$$

$$\Rightarrow 2x^2\neq 1\Rightarrow x^2\neq\frac{1}{2}\Rightarrow x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

---

۱۲) به ازای چه مقادیری از x مجموعه $\{(x,x,0),(x,0,x),(0,x,x)\}$ پایه‌ای برای R^3 تشکیل می‌دهد؟

$$x_1(x,x,0)+x_2(x,0,x)+x_3(0,x,x)=(0,0,0)$$

$$\begin{vmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}x\begin{vmatrix} 0 & x \\ x & x \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}x\begin{vmatrix} x & x \\ 0 & x \end{vmatrix}+0$$

$$=-x^3-x^3=-2x^3\neq 0\Rightarrow x\neq 0$$

به ازای همه مقادیر x به جز $x=0$ این مجموعه پایه‌ای برای R^3 می‌باشد.

۷.۵) تبدیل خطی و بردار ویژه

۱) نشان دهید که تابع $T:R^3\to R^2$ با تعریف $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x+y \\ y+z \end{bmatrix}$ یک تبدیل خطی است. ماتریس نمایشگر T را بیابید.

فرض: $u=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$$T(u+v)=T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ y_1+y_2+z_1+z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ y_1+z_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ y_2+z_2 \end{bmatrix}$$

$$=T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}+T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}=T(u)+T(v)$$

$$T\left[\alpha\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right]=T\begin{bmatrix}\alpha x\\\alpha y\\\alpha z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x+\alpha y\\\alpha y+\alpha z\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}x+y\\y+z\end{bmatrix}=\alpha T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

پس T یک تبدیل خطی می‌باشد.

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

---

۲) نشان دهید که تابع $T:R^3\to R^3$ با تعریف

$$T\left[\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z\end{bmatrix}$$

که در آن هر a_{ij} یک اسکالر است، یک تبدیل خطی است. ماتریس نمایشگر این تبدیل خطی را بیابید.

$$u=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix},\ v=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}$$

$$T(u+v)=T\left[\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}a_{11}(x_1+x_2)+a_{12}(y_1+y_2)+a_{13}(z_1+z_2)\\a_{21}(x_1+x_2)+a_{22}(y_1+y_2)+a_{23}(z_2+z_3)\\a_{31}(x_1+x_2)+a_{32}(y_1+y_2)+a_{33}(z_2+z_3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1\\a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1\\a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2\\a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23}z_2\\a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_3\end{bmatrix}$$

$$=T(u)+T(v)$$

$$T(\alpha u)=\begin{bmatrix}a_{11}(\alpha x_1)+a_{12}\alpha y_1+a_{13}\alpha z_1\\a_{21}\alpha x_1+a_{22}\alpha y_1+a_{23}\alpha z_1\\a_{31}\alpha x_1+a_{32}\alpha y_1+a_{33}\alpha z_1\end{bmatrix}$$

$$=\alpha\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1\\a_{21}x_1+a_{21}y_1+a_{23}z_1\\a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1\end{bmatrix}=\alpha T(u)$$

بنابراین T یک تبدیل خطی می‌باشد.

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

---

۳) یک تبدیل خطی چون $T:R^3\to R^2$ به قسمی تعریف کنید که ماتریس نمایشگر آن، ماتریس زیر باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+z \\ 2x+y+z \end{bmatrix}$$

---

۴) مقادیر ویژهٔ ماتریس‌های زیر را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-3)(x-2)+2=x^2-5x+8=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-32}}{2}=\frac{5}{2}\pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$$

چون ریشه‌ها اسکالر نیستند، ماتریس A فاقد مقدار ویژه است.

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x)=|xI-B|=\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)(x-1)=0\Rightarrow x=2\,,\,x=1$$

بنابراین مقادیر ویژه ماتریس B، $x=1$ و $x=2$ می‌باشند.

---

۵) مقادیر ویژه ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$f(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$=\circ+\circ+(x+2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ \circ & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+2)(x-1)(x-1)=\circ \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

بنابراین مقادیر ویژه ماتریس A، {۱, ۱, ۲-} می‌باشند.

---

۶) فضای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه ماتریس B مذکور در تمرین ۴ را مشخص کنید.

$B=\begin{bmatrix} 2 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$

$\lambda_1=1 \Rightarrow (B-\lambda I)x=\circ$

$$\Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 2 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

فضای برداری متناظر $\lambda=1$ خط روبروست. $\Rightarrow x_1=\circ$

$$\lambda=2 \Rightarrow (B-\lambda I)x=\circ \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 2 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & \circ \\ \circ & 2 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

فضای بردار متناظر $\lambda=2$ خط روبرو می‌باشد: $\Rightarrow -x_2=\circ \Rightarrow x_2=\circ$

---

۷) فضای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه ماتریس A مذکور در تمرین ۵ را مشخص کنید.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & -2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$

$$\lambda=1 \Rightarrow (A-\lambda I)x=\circ \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۲+x_۳=۰ \\ x_۲=۰ \\ -۳x_۳=۰ \end{cases} \Rightarrow x_۲=۰\ ,\ x_۳=۰$$

فضای برداری متناظر $\lambda=۱$، $x_۲=x_۳=۰$ می‌باشد.

$$\lambda=-۲ \Rightarrow (A-\lambda I)x=۰ \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

فضای برداری متناظر $\lambda=-۲$:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x_۱+x_۲+x_۳=۰ \\ ۳x_۲+x_۳=۰ \end{cases}$$

---

۸) نشان دهید که چند جمله‌ای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با

$$f(x)=x^۲-(a+d)x+\det A$$

$$f(x)=|xI-A|=\left|\begin{bmatrix} x & ۰ \\ ۰ & x \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)(x-d)-bc=x^۲-(a+d)x+ad-bc$$

$$=x^۲-(a+d)x+\det A$$

آزمون چهار گزینه‌ای فصل پنجم

۱) فرض کنید A، B و C سه ماتریس باشند، کدام حکم زیر نادرست است؟

الف) $(A+A^T)^T=A+A^T$ ب) $(AB)^T=B^TA^T$

ج) $(AB)=\circ \Rightarrow A=\circ$ یا $B=\circ$ د) $A(BC)=(AB)C$

۲) کدام حکم یر نادرست است؟

الف) اگر ماتریس مربعی A شامل یک سطر صفر باشد آنگاه $|A| = \circ$

ب) $|AB| = |A|\ |B|$

ج) اگر تمام عناصر ماتریس A را در عددی ضرب کنیم مقدار دترمینان آن در این عدد ضرب می‌شود.

د) اگر مضرب اسکالری از یک ماتریس را با سطر دیگر آن جمع کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

۳) کدام حکم زیر نادرست است؟

الف) مجموعه $\{(۱,\circ,\circ),(\circ,\circ,۱),(۲,\circ,۲)\}$ دارای وابستگی خطی است.

ب) مجموعه $\{(۱,۳,۱),(۲,۲,۱),(۱,۲,۱),(۱,۱,۱)\}$ دارای وابستگی خطی است.

ج) مجموعه $\{(\circ,۵,۱)\}$ دارای استقلال خطی است.

د) مجموعه $\{(\circ,\circ,\circ),(۱,\circ,\circ),(\circ,\circ,۱)\}$ دارای استقلال خطی است.

۴) فرض کنید $A=\{(x,x,\circ),(x,\circ,x),(\circ,۱,۱)\}$ کدام حکم زیر درست است؟

الف) مجموعه A به ازای هر $x\in R$ ناصفر یک پایه $R^۳$ است.

ب) مجموعه A به ازای هر $x=۱$ یک پایه $R^۳$ است.

ج) مجموعه A به ازای هیچ مقدار x یک پایه برای $R^۳$ نیست.

د) هر سه حکم نادرست هستند.

۵) اگر $T:R^n\rightarrow R^n$ یک تبدیل خطی باشد، کدام حکم زیر نادرست است؟

الف) تعداد مقادیر ویژه حقیقی متمایز T همواره برابر n است.

ب) تعداد مقادیر ویژه حقیقی متمایز T حداقل برابر با n است.

ج) تعداد مقادیر ویژه حقیقی متمایز T حداکثر برابر با n است.

د) T حداقل یک مقدار ویژه حقیقی دارد.

۶) مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **عبارتند از:**

الف) ۱ و ۴　　　ب) ۲ و ۲

ج) ۱ و ۲　　　د) A مقدار ویژهٔ حقیقی ندارد

۷) وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ **برابر است با:**

الف) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$　　　ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \frac{1}{5} & 3 \\ 1 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$　　　ج) $\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$　　　د) $\begin{bmatrix} -40 & 13 & 5 \\ 16 & -5 & -2 \\ 9 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

۸) مختصات (۵ و ۴) نسبت به پایه مرتب {(۲,۳),(۱,۲)} عبارتند از:

الف) (۳,-۲)　　　ب) (-۳,۲)　　　ج) (۵,۴)　　　د) (۰,۰)

۹) یک بردار ویژه نظیر مقدار ویژه $\lambda=3$ **برای** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **برابر است با:**

الف) $\vec{i}+2\vec{j}$　　　ب) $\vec{i}-2\vec{j}$　　　ج) $2\vec{j}$　　　د) $\vec{i}-\vec{j}$

۱۰) وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **برابر است با:**

الف) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$　　　ب) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$　　　ج) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$　　　د) A وارون ندارد

۱۱) یک بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه $\lambda=2$ **برای ماتریس** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **عبارتست از:**

الف) (۱ و ۱)　　　ب) (۲ و ۱)　　　ج) (۲ و ۲)　　　د) (۱ و ۰)

۱۲) شرط لازم و کافی برای این که دستگاه زیر جواب داشته باشد عبارتست از:

$$\begin{cases} x+y+2z=a \\ -2x-z=b \\ x+3y+5z=0 \end{cases}$$

الف) $b-c-3a=0$ ب) $b+c+3a=0$

ج) $b=3a$ د) این دستگاه همواره جواب دارد

۱۳) به ازای چه مقادیری از a، دستگاه زیر جواب منحصر به فرد دارد؟

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases}$$

الف) به ازای هر a به طوری که $a\neq 2$ و $a\neq -3$

ب) به ازای هر a

ج) به ازای هر a به طوری که $a\neq 0$

د) به ازای هر a به طوری که $a\neq 2$

۱۴) فرض کنید $A=\{(1,1,-1),(2,-3,1),(8,-7,1)\}$ و $B=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ **در این صورت:**

الف) A و B هر دو دارای استقلال خطی هستند.

ب) A و B هر دو دارای وابستگی خطی هستند.

ج) A دارای استقلال خطی و B دارای وابستگی خطی است.

د) A دارای وابستگی خطی و B دارای استقلال خطی است.

۱۵) مقادیر ویژه حقیقی $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **عبارتند از:**

الف) ۲ و ۳ ب) تنها ۲

ج) تنها ۳ د) A مقدار ویژه حقیقی ندارد

پاسخ آزمون چهار گزینه‌ای فصل پنجم

۱) گزینه (ج) صحیح است

گزینه (الف) درست است زیرا: $(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$

گزینه (ب) درست است زیرا طبق قضیه ۱۷.۲.۵ داریم: $(AB)^T = B^T A^T$

گزینه (ج) طبق قضیه ۱۲.۲.۵ درست است.

گزینه (د) نادرست است و برای آن مثال نقض می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, A \neq ۰, B \neq ۰$$

---

۲) گزینه (ج) صحیح است

طبق قضیه ۹.۳.۵ بند ۵ و ۶ گزینه‌های د و ب صحیح هستند.

گزینه الف نیز صحیح است زیرا کافی است مقدار دترمینان را با بسط حول سطر صفر به دست آوریم که نتیجه صفر خواهد شد.

---

۳) گزینه (د) صحیح است

گزینه الف را بررسی می‌کنیم.

$$x_۱(۲,۰,۲) + x_۲(۱,۰,۰) + x_۳(۰,۰,۱) = (۰,۰,۰)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۰ \\ ۲x_۱ + x_۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

بنابراین این مجموعه دارای وابستگی خطی می‌باشد.

در گزینه ب می‌بینیم که در فضای $R^۳$، ۴ بردار داریم پس دارای وابستگی خطی می‌باشد. (رجوع شود به تمرین ۳ بخش ۶.۵)

و گزینه ج صحیح است زیرا هر بردار به تنهائی دارای استقلال خطی می‌باشد.

در مورد گزینه د داریم:

$$x_۱(۱,۰,۰) + x_۲(۰,۰,۱) + x_۳(۰,۰,۰) = (۰,۰,۰)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

بنابراین این مجموعه دارای وابستگی خطی می‌باشد.

---

۴)
$$x_1(x, x, 0) + x_2(x, 0, x) + x_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} xx_1 + xx_2 = 0 \\ xx_1 + x_3 = 0 \\ xx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} + x(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= x(-x) - x(x) = -2x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

بنابراین این مجموعه به ازای هر x مخالف صفر پایه‌ای برای R^3 است.

---

۵) گزینه (ب) صحیح است

طبق تمرین ۵ بخش ۷.۵ گزینه‌های الف و ب رد می‌شود و طبق تمرین ۴ قسمت اول، گزینه د نیز رد می‌شود.

از آنجا که مقادیر ویژه حقیقی متمایز، بردارهای ویژهٔ مستقل خطی ارائه می‌دهند و می‌دانیم در فضای R^n حداکثر n بردار مستقل خطی وجود دارد، لذا تعداد مقادیر ویژهٔ حقیقی متمایز T حداکثر برابر n است.

---

۶) گزینه (ج) صحیح است

$$f(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + (x-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$$

۷) گزینه (ج) صحیح است

از روش تحویل سطری استفاده می‌کنیم.

$$A_M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۳ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۸ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow[R_۳-R_۱]{R_۲-۲R_۱} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۵ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳+۲R_۲]{R_۱-۲R_۲} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۹ & ۵ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۵ & ۲ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۳(-۱)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۹ & ۵ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۵ & -۲ & -۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۲+۳R_۳]{R_۱-۹R_۳} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -۴۰ & ۱۶ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱۳ & -۵ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۵ & -۲ & -۱ \end{array}\right]$$

---

۸) گزینه (الف) صحیح است

فرض می‌کنیم $(x_۱,x_۲)$ مختصات (۵ و ۴) نسبت به پایه فوق باشد.

$$(۴,۵)=x_۱(۲,۳)+x_۲(۱,۲)$$

$$\begin{cases} ۲x_۱+x_۲=۴ \\ ۳x_۱+۲x_۲=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

---

۹) گزینه (الف) صحیح است

$$\lambda=۳\Rightarrow(A-\lambda I)x=۰\Rightarrow\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -۲x_۱+x_۲=۰ \\ -۲x_۱+x_۲=۰ \end{cases}\Rightarrow x_۲=۲x_۱$$

$x_۱=۱\Rightarrow x_۲=۲\Rightarrow \vec{i}+۲\vec{j}$ بردار ویژه

---

۱۰) گزینه (الف) صحیح است

از روش تحویل سطری استفاده می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۲ & ۲ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۱\times\frac{۱}{۲}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & ۱ & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲\times\frac{۱}{۲}}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & ۱ & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳-۲R_۲]{R_۱-R_۲}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & -۱ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۳(\frac{۱}{۲})}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱-R_۳}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{array}\right]$$

---

۱۱) گزینه‌های (الف و ج) صحیح است

$$\lambda=۲\Rightarrow(A-\lambda I)x=۰\Rightarrow\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} -x_۱+x_۲=۰ \\ -۲x_۱+۲x_۲=۰ \end{array}\right.\Rightarrow x_۱=x_۲$$

---

۱۲) گزینه درست وجود ندارد

$$A_M=\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & a \\ -۲ & ۰ & -۱ & b \\ ۱ & ۳ & ۵ & c \end{array}\right]\xrightarrow[R_۳-R_۱]{R_۲+۲R_۱}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & a \\ ۰ & ۲ & ۳ & b+۲a \\ ۰ & ۲ & ۳ & c-a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲\times\frac{۱}{۲}}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & a \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} & \frac{b+۲a}{۲} \\ ۰ & ۲ & ۳ & c-a \end{array}\right]\xrightarrow[R_۳-۲R_۱]{R_۱-R_۲}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۲} & -\frac{b}{۲} \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} & \frac{b+۲a}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ & c-b-۳a \end{array}\right]$$

برای اینکه دستگاه جواب داشته باشد، باید سطر آخر صفر گردد بنابراین:

$c-b-۳a=۰$

---

۱۳) گزینه (الف) صحیح است

دترمینان ماتریس ضرائب باید مخالف صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & a \\ ۱ & a & ۳ \end{vmatrix} = ۱(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۳ & a \\ a & ۳ \end{vmatrix} + ۱(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۲ & a \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} - ۱(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & a \end{vmatrix}$$

$$=(۹-a^۲)-(۶-a)-(۲a-۳)$$

$$=-a^۲-a+۶\neq ۰$$

$$\Rightarrow a\neq \frac{۱\pm\sqrt{۱+۲۴}}{-۲} \Rightarrow \begin{cases} a\neq -۳ \\ a\neq ۲ \end{cases}$$

---

۱۴) گزینه (ب) صحیح است

در مورد مجموعه A داریم:

$$x_۱(۱,۱,-۱)+x_۲(۲,-۳,۱)+x_۳(۸,-۷,۱)=(۰,۰,۰)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱+۲x_۲+۸x_۳=۰ \\ x_۱-۳x_۲-۷x_۳=۰ \\ -x_۱+x_۲+x_۳=۰ \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۸ \\ ۱ & -۳ & -۷ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = (-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} -۳ & -۷ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & -۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} + ۸(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & -۳ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=۴+۱۲-۱۶=۰$$

پس A دارای وابستگی خطی است.

برای مجموعه B داریم:

$$x_۱(۱,۲)+x_۲(۲,۳)+x_۳(۳,۴)=(۰,۰)$$

$$\begin{cases} x_۱+۲x_۲+۳x_۳=۰ \\ ۲x_۱+۳x_۲+۴x_۳=۰ \\ (۰)x_۱+(۰)x_۲+(۰)x_۳=۰ \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

پس B نیز دارای وابستگی خطی است.

---

۱۵) گزینه (الف) صحیح است

$$f(x) = |xI-A| = \begin{vmatrix} x & ۰ \\ ۰ & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-۱ & -۱ \\ ۲ & x-۴ \end{vmatrix}$$

$$=(x-۱)(x-۴)+۲=x^۲-۵x+۶$$

$$=(x-۳)(x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=۲ \end{cases}$$

تمرینات فصل ششم

تمرین ۶.۱) حد، مشتق و انتگرال

در تمرین‌های ۱ تا ۴، (الف) بازه‌ای که $\vec{F}$ در آن پیوسته است و (ب) $\vec{F}'(t)$ و $\vec{F}''(t)$ را تعیین کنید.

۱) $\vec{F}(t)=\sqrt{t-1}\,\vec{i}+\sqrt{2-t}\,\vec{j}$

جواب: (الف) برای یافتن بازه پیوستگی تابع ابتدا دامنه آن را می‌یابیم. می‌دانیم که دامنه تابع مجموعه همه اعداد حقیقی t است که به ازای آنها تابع با معنی باشد. لذا:

$t-1\geq 0 \Rightarrow t\geq 1$

$2-t\geq 0 \Rightarrow t\leq 2$

در نتیجه اشتراک دو بازه فوق یعنی $[1,2]$ دامنه تابع $\vec{F}$ می‌باشد.

چون توابع حقیقی $\sqrt{t-1}$ و $\sqrt{2-t}$ در این بازه پیوسته هستند پس $\vec{F}$ در $[1,2]$ پیوسته است.

ب) بنابر قضیه ۶.۱.۱۱ کتاب درسی داریم:

$$\vec{F}'(t)=\frac{d\vec{F}}{dt}=\left(\frac{1}{2\sqrt{t-1}},\frac{-1}{2\sqrt{2-t}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}\vec{i}-\frac{1}{2\sqrt{2-t}}\vec{j}$$

$$F''(t)=\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)=\left(\frac{-1}{4\sqrt{(t-1)^3}},\frac{-1}{4\sqrt{(2-t)^3}}\right)$$

$$=\frac{-1}{4\sqrt{(t-1)^3}}\vec{i}+\frac{-1}{4\sqrt{(2-t)^3}}\vec{j}$$

---

۲) $\vec{F}(t)=\frac{1}{t}\vec{i}+\sin 3t\vec{j}+\vec{k}$

جواب: الف) دامنه تابع فوق همه اعداد حقیقی به جز $t=0$ می‌باشد. یعنی $R-\{0\}$

ب)

$$\vec{F}(t)=\frac{d\vec{F}}{dt}=\left(\frac{-1}{t^2},3\cos t,0\right)=\frac{-1}{t^2}\vec{i}+3\cos 3t\vec{j}$$

$$F''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)=\left(\frac{2}{t^3},-9\sin 3t,0\right)=\frac{2}{t^3}\vec{i}-9\sin 3t\,\vec{j}$$

۳) $\vec{F}(t)$

جواب: الف) دامنه توابع حقیقی $-۴t$ و $t^۲+۸t$ کلیه اعداد حقیقی می‌باشد و دامنه تابع حقیقی $t_g\, t$ مجموعه $R-\left\{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\right\}$ می‌باشد که k عدد حقیقی است.

$k=۰,\pm۱,\pm۲,...$

بنابراین دامنه تابع فوق از اشتراک دامنه‌های تک تک توابع بدست می‌آید و عبارتست از:

$$k=۰,\pm۱,\pm۲,... \qquad , \qquad R-\left\{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\right\}$$

چون که توابع حقیقی $t_g\, t$، $t^۲+۸t$ و $-۴t$ در این بازه پیوسته هستند لذا بازه پیوستگی $\vec{F}$ همان دامنه تابع $\vec{F}$ می‌باشد.

ب)

$$\vec{F}'(t)=\frac{d\vec{F}}{dt}=(۱+t_g^۲t\ ,\ ۲t+۸,-۴)$$

$$=\left[۱+t_g^۲t\right]\vec{i}\ (۲t+)\vec{j}-۴\vec{k}$$

$$\vec{F}''(t)=\frac{d}{dt}(d\vec{F}'(t))=\left[۲t_g t\left[۱+t_g^۲t\right],۲,۰\right]$$

$$=\left[۲t_g t\left[۱+t_g^۲t\right]\right]\vec{i}+۲\vec{j}$$

---

۴) $\vec{F}(t)=\left[e^{t^۲},\frac{Sint}{t},t+\sqrt{۲}\right]$

جواب: الف) دامنه تابع فوق $R-\{۰\}$ می‌باشد. و چون توابع حقیقی $t+\sqrt{۲}$، $\frac{Sint}{t}$ و $e^{t^۲}$ در این بازه پیوسته هستند، لذا $\vec{F}$ در این بازه پیوسته می‌باشد.

ب)

$$F'(t)=\frac{dF}{dt}=\left[۲te^{t^۲},\frac{t(Cost)-Sint}{t^۲},۱\right]$$

$$F''(t)=\frac{d}{dt}(F'(t))=\left[۲e^{t^۲}+۴t^۲e^{t^۲},\frac{t^۲(Cost-tSint-Cost)-۲t(tCost-Sint)}{t^۴},۰\right]$$

$$=\left[۲e^{t^۲}+۴t^۲e^{t^۲},\frac{-t^۲Sint-۲tCost+۲Sint}{t^۳},۰\right]$$

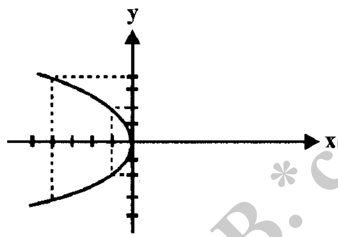
در تمرینهای ۵ و ۶، نمودار نگاره $\vec{F}$ را رسم کنید و به ازای مقدار داده شده برای t ، بردارهای $\vec{F}(t)$ و $\vec{F'}(t)$ را روی نمودار نشان دهید.

۵) $t=۲ \ , \ \vec{F}(t)=\left[-\frac{t^۴}{۴}, t^۲\right]$

جواب: دامنه $\vec{F}$ کل مجموعه R می‌باشد و داریم:

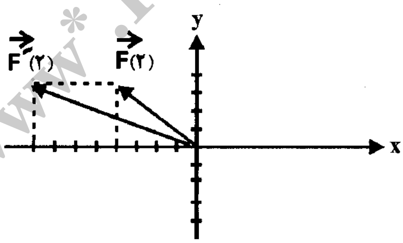
$$x=-\frac{t^۴}{۴} \quad , \quad y=t^۲ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}y^۲$$

پس نگاره $\vec{F}$ یک سهمی به صورت زیر می‌باشد.



$$t=۲ \Rightarrow \vec{F}(t=۲)=(-۴,۴)$$

$$\vec{F'}(t)=\left[-t^۳, ۲t\right] \Rightarrow \vec{F}(t=۲)=(-۸,۴)$$



---

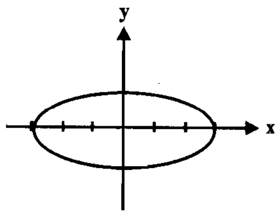
۶) $t=\frac{۳\pi}{۴} \ , \ \vec{F}(t)=۴\text{Cos}t\ \vec{i}+۲\text{Sin}t\ \vec{j}$

جواب: دامنه $\vec{F}$ کل مجموعه R می‌باشد و داریم:

$$\begin{cases} x=۴\text{Cos}t \Rightarrow \frac{x}{۴}=\text{Cos}t \\ y=۲\text{Sin}t \Rightarrow \frac{y}{۲}=\text{Sin}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{۴}\right]^۲+\left[\frac{y}{۲}\right]^۲=\text{Cos}^۲t+\text{Sin}^۲t=۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۴}\right]^۲+\left[\frac{y}{۲}\right]^۲=۱$$

که نمودار یک بیضی می‌باشد.



$$t=\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \vec{F}\left[t=\frac{۳\pi}{۴}\right] = ۴\mathrm{Cos}\frac{۳\pi}{۴}\,\vec{i} + ۲\mathrm{Sin}\frac{۳\pi}{۴}\,\vec{j}$$

$$= -۲\sqrt{۲}\,\vec{i} + \sqrt{۲}\,\vec{j} = \left[-۲\sqrt{۲},\sqrt{۲}\right]$$

$$\vec{F}'(t) = \left[-۴\mathrm{Sin}t, ۲\mathrm{Cos}t\right] \Rightarrow \vec{F}'\left[t=\frac{۳\pi}{۴}\right] = \left[-۲\sqrt{۲},-\sqrt{۲}\right]$$

---

۷) قضیه ۶.۱.۶ را ثابت کنید.

جواب: قضیه ۶.۱.۶ فرض کنیم $\vec{F}$ و $\vec{G}$ دو تابع برداری و f یک تابع حقیقی باشد. اگر $\lim_{t\to a}\vec{F}(t)$ و $\lim_{t\to a}\vec{G}(t)$ و $\lim_{t\to a} f(t)$ موجود باشند آنگاه:

الف) $\lim_{t\to a}\left[\vec{F}(t)+\vec{G}(t)\right] = \lim_{t\to a}\vec{F}(t) + \lim_{t\to a}\vec{G}(t)$

ب) $\lim_{t\to a}\left[\vec{F}(t)-\vec{G}(t)\right] = \lim_{t\to a}\vec{F}(t) - \lim_{t\to a}\vec{G}(t)$

ج) $\lim_{t\to a}\vec{f}(t)\,\vec{F}(t) = \lim_{t\to a} f(t)\,\lim_{t\to a}\vec{F}(t)$

د) $\lim_{t\to a}\left[\vec{F}(t)\,.\vec{G}(t)\right] = \lim_{t\to a}\vec{F}(t)\,.\lim_{t\to a}\vec{G}(t)$

هـ) $\lim_{t\to a}\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right] = \lim_{t\to a}\vec{F}(t)\times\lim_{t\to a}\vec{G}(t)$

با فرض $\vec{F}(t)=\left[f_۱(t),f_۲(t),f_۳(t)\right]$ و $\vec{G}(t)=\left[g_۱(t),g_۲(t),g_۳(t)\right]$ داریم:

اثبات حکم الف و ب)

$$\lim_{t\to a}(F(t)\pm G(t)) = \lim\left[f_۱(t)\pm g_۱(t), f_{۲۱}(t)\pm g_۲(t), f_۳(t)\pm g_۳(t)\right]$$

$$=\lim_{t\to a}\left[\left[f_۱(t)\pm g_۱(t)\right]\vec{i} + \left[f_{۲۱}(t)\pm g_۲(t)\right]\vec{j} + \left[f_۳(t)\pm g_۳(t)\right]\vec{k}\right]$$

$$=\lim_{t\to a}\left[f_1(t)\pm g_1(t)\right]\vec{i}+\lim_{t\to a}\left[f_2(t)\pm g_2(t)\right]\vec{j}+\lim_{t\to a}\left[f_3(t)\pm g_3(t)\right]\vec{k}$$

$$=\lim_{t\to a}f_1(t)\vec{i}\pm\lim_{t\to a}g_1(t)\vec{i}+\lim_{t\to a}f_2(t)\vec{j}\pm\lim_{t\to a}g_2(t)\vec{j}+\lim_{t\to a}f_3(t)\pm\lim_{t\to a}g_3(t)\vec{k}$$

$$=\lim_{t\to a}\left[f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}\right]\pm\lim_{t\to a}\left[g_1(t)\vec{i}+g_2(t)\vec{j}\,g_3(t)\vec{k}\right]$$

$$=\lim_{t\to a}\vec{F}(t)\pm\lim_{t\to a}G(t)$$

در روابط بالا علامت مثبت مربوط به حکم الف و علامت منفی مربوط به حکم ب می‌باشند.

اثبات حکم ج)

$$\lim_{t\to a}f(t).\vec{F}(t)=\lim_{t\to a}f(t).\left[f_1(t),f_2(t),f_3(t)\right]$$

$$=\lim_{t\to a}\left[f(t)f_1(t),f(t)f_2(t),f(t)f_3(t)\right]$$

$$=\left[\lim_{t\to a}f(t)f_1(t),\lim_{t\to a}f(t)f_2(t),\lim_{t\to a}f(t)f_3(t)\right]$$

$$=\left[\lim_{t\to a}f(t).\lim_{t\to a}f_1(t),\lim_{t\to a}f(t).\lim_{t\to a}f_2(t),\lim_{t\to a}f(t).\lim_{t\to a}f_3(t)\right]$$

$$=\lim_{t\to a}f(t).\lim_{t\to a}\left[f_1(t),f_2(t),f_3(t)\right]=\lim_{t\to a}f(t).\lim_{t\to a}\vec{F}(t)$$

حکم د) در کتاب اثبات شده است.

اثبات حکم ه)

$$\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t)\\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t)\end{vmatrix}$$

$$=\left[f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t)\right]\vec{i}+\left[f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t)\right]\vec{j}$$

$$+\left[f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)\right]\vec{k}$$

$$\lim_{t\to a}\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)=\lim(f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t),f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t)$$

$$,f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t))$$

$$= \left[\lim_{t\to a} f_۲(t).\lim_{t\to a} g_۳(t)-\lim_{t\to a} f_۳(t).\lim_{t\to a} g_۲(t),\lim_{t\to a} f_۳(t).\lim_{t\to a} g_۱(t)-\lim_{t\to a} f_۱(t).\lim_{t\to a} g_۳(t)\right.$$

$$\left.,\lim_{t\to a} f_۱(t).\lim_{t\to a} g_۲(t)-\lim_{t\to a} f_۲(t).\lim_{t\to a} g_۱(t)\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lim_{t\to a} f_۱(t) & \lim_{t\to a} f_۲(t) & \lim_{t\to a} f_۳(t) \\ \lim_{t\to a} g_۱(t) & \lim_{t\to a} g_۲(t) & \lim_{t\to a} g_۳(t) \end{vmatrix} = \lim_{t\to a} \vec{F}(t) \times \lim_{t\to a} G(t)$$

---

۸) فرض کنید که $\vec{F}(t) = e^t \text{Cost}\, \vec{i} - e^t \text{Sint}\, \vec{k}$, $\vec{G}(t) = ۳t\, \vec{i} - t^۲ \vec{j} + ۴\text{Sec}\vec{k}$ مشتق توابع برداری $\vec{F}(t).\vec{G}(t)$ و $\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)$ را تعیین کنید.

جواب:

$$\vec{F}(t) = \left[e^t\text{Cost}, ۰, -e^t\text{Sint}\right]$$

$$\vec{G}(t) = \left[۳t, -t^۲, ۴\,\text{Sect}\right]$$

$$\vec{F}(t).\vec{G}(t) = \left[۳te^t\text{Cost}, ۰, -۴e^t\text{SintSect}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\vec{F}(t).\vec{G}(t)\right]' = \left[۳te^t\text{Cost} + ۳te^t\text{Cost} - ۳te^t\text{Sint}, ۰,\right.$$

$$\left.۴e^t\text{Sin}.\text{Sect} + ۴e^t\text{Cost}.\text{Sect} + ۴e^t\text{Sint}\frac{\text{Sint}}{\text{Cost}}\right]$$

$$= \left[۳e^t\text{Cost}(۱+t) - ۳te^t\text{Sint}, ۰, -۴e^t\left[tgt + ۱ + t^۲gt\right]\right]$$

$$\vec{F}(t)\times\vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t\text{Cost} & ۰ & -e^t\text{Sint} \\ ۳t & -t^۲ & ۴\text{Sect} \end{vmatrix}$$

$$= \left[-t^۲e^t\text{Sint}\right]\vec{i} + \left[-۳te^t\text{Sint} - ۴e^t\right]\vec{j} + \left[-t^۲e^t\text{Cost}\right]\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right]' = \left[\left[-۲t^۲e^t\text{Sint} - t^۲e^t\text{Sint} - t^۲e^t\text{Cost}\right], \left[-۳e^t\text{Sint}\right.\right.$$

$$\left.\left.-۳te^t\text{Sint} - ۳te^t\text{Cost} - ۴e^t\right], \left[-۲te^t\text{Cost} - t^۲e^t\text{Cost} + t^۲e^t\text{Sint}\right]\right]$$

۹) فرض کنید $\vec{F}(t)=Lnt\,\vec{i}-۴e^{۲t}\vec{j}+\frac{t-۱}{t}\vec{k}$ و $u(t)=\sqrt{t}$. در این صورت $\vec{F}(u)$ و مشتق آن را نسبت به t تعیین کنید.

جواب:

$$\vec{F}(u)=\vec{F}\left[\sqrt{t}\right]=Ln\sqrt{t}\,\vec{i}-۴e^{۲\sqrt{t}}\vec{j}+\frac{\sqrt{t}-۱}{\sqrt{t}}\vec{k}$$

$$\left[\vec{F}(u)\right]'=\frac{۱}{۲t}-\frac{۴}{\sqrt{t}}e^{۲\sqrt{t}}\vec{j}+\frac{۱}{۲t\sqrt{t}}\vec{k}$$

---

۱۰) فرض کنید $\vec{F}(t)=t^{۳}\vec{i}-\sqrt{۳t}\,\vec{j}+\frac{۱}{t^{۲}}\vec{k}$ و $u(t)=Cost$ ، در این صورت $\vec{F}(u)$ و مشتق آن را نسبت به t تعیین کنید.

جواب:

$$\vec{F}(u)=\vec{F}(Cos\,t)=(Cost)^{۳}\vec{i}-\sqrt{۳Cos\,t}\,\vec{j}+\frac{۱}{Cos^{۲}t}\vec{k}$$

$$(\vec{F}(Cost))'=\left[۳Cos^{۲}t(-Sint)\right]\vec{i}+\sqrt{۳Sint}\,\vec{j}+\frac{۲Sint}{Cos^{۳}t}\vec{k}$$

انتگرال‌های ۱۱ تا ۱۴ را محاسبه کنید.

۱۱) $\int\left[t^{۲}\vec{i}-(۳t-۱)\vec{j}-\frac{۱}{t^{۳}}\vec{k}\right]dt$

جواب:

$$F(t)=f_{۱}(t)\vec{i}+f_{۲}(t)\vec{j}+f_{۳}(t)\vec{k}$$

$$\Rightarrow\int\vec{F}(t)dt=\left[\int f_{۱}(t)dt\right]\vec{i}+\left[\int f_{۲}(t)dt\right]\vec{j}+\left[\int f_{۳}(t)dt\right]\vec{k}$$

$$\Rightarrow\int(t^{۲}\vec{i}-(۳t-۱)\vec{j}-\frac{۱}{t^{۳}}\vec{k})dt$$

$$=\left[\int t^{۲}dt\right]\vec{i}-\left[\int ۳t-۱dt\right]\vec{j}-\left[\frac{۱}{t^{۳}}dt\right]\vec{k}=\frac{t^{۳}}{۳}\vec{i}-\left[\frac{۳t^{۲}}{۲}-t\right]\vec{j}+\frac{۱}{۲t^{۲}}\vec{k}$$

---

۱۲) $\int\left[t\,Cos\,t\,\vec{i}+t\,Sin\,t\,\vec{j}+۳t^{۴}\vec{k}\right]dt$

جواب: $\int \left[t \,Cos\, t \,\vec{i} + t \,Sin\, t\, \vec{j} + ۳t^{۴} \vec{k}\right] dt$

$\int t \,Cos\, t\, dt$

برای بدست آوردن انتگرال‌های $\int t \,Sin\, t\, dt$ و $\int t \,Sin\, t\, dt$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$u = t \;,\; dv = Cost \Rightarrow du = dt \,,\; v = Sin\, t$

$\Rightarrow \int t \,Cost = tSin\, t - \int Sin\, t\, dt = t\, Sin\, t + Cost$

$u = t \;,\; dv = Sint \Rightarrow du = dt \,,\; v = -Cos\, t$

$\Rightarrow \int t \,Sin\, t = -t\, Cos\, t - \int -Cos\, dt = -t\, Cost + Sint$

$\Rightarrow \left[\int t\, Cost dt\right] \vec{i} \left[\int tSin\, t\, dt\right] \vec{j} + \left[\int ۳t^{۴} dt\right] \vec{k}$

$= (tSint + Cost)\vec{i} + (-tCost + Sin\, t)\vec{j} + \frac{۳t^{۵}}{۵}\vec{k}$

---

۱۳) $\int_{۰}^{۱} \left[e^{t}\, \vec{i} + e^{-t}\, \vec{j} + ۲t\, \vec{k}\right] dt$

جواب: $\int_{۰}^{۱} \left[e^{t}\, \vec{i} + e^{-t}\, \vec{j} + ۲t\, \vec{k}\right] dt = \left[\int_{۰}^{۱} e^{t} dt\right] \vec{i} + \left[\int_{۰}^{۱} e^{-t}\, dt\right] \vec{j} + \left[\int_{۰}^{۱} ۲t\, dt\right] \vec{k}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)\right] = ۰ \Rightarrow \vec{F}(t) \times \vec{F}'(t) = C$

$= (e - ۱)\vec{i} + (-e^{-۱} + ۱)\vec{j} + \vec{k}$

---

۱۴) $\int_{-۱}^{۱} \left[(۱+t)^{\frac{۳}{۲}}\, \vec{i} + (۱-t)^{\frac{۳}{۲}}\, \vec{j}\right] dt$

جواب: $\int_{-۱}^{۱} \left[(۱+t)^{\frac{۳}{۲}}\, \vec{i} + (۱-t)^{\frac{۳}{۲}}\, \vec{j}\right] dt$

$$= \left[\int_{-1}^{1} (1+t)^{\frac{3}{2}} dt\right] \vec{i} + \left[\int_{-1}^{1} (1-t)^{\frac{3}{2}} dt\right] \vec{j}$$

$$= \left[\frac{2(1+t)^{\frac{5}{2}}}{5} \Big|_{-1}^{1}\right] \vec{i} + \left[\frac{-2(1-t)^{\frac{5}{2}}}{5} \Big|_{-1}^{1}\right] \vec{j} + \left[\frac{2}{5}\left[2^{\frac{5}{2}}\right]\right] \vec{i} + \left[\frac{+2}{5}(2)^{\frac{5}{2}}\right] \vec{j}$$

---

۱۵) فرض کنید $\vec{F}(t) = \text{Sin}t\,\vec{i} - \text{Cos}\,t\,\vec{j}$. نشان دهید به ازای هر مقدار ، بردارهای $\vec{F}(t)$ و $\vec{F''}(t)$ موازی یکدیگرند.

جواب:

$\vec{F}(t) = (\text{Sin}t, -\text{Cos}t, 0)$

$\vec{F}(t) = (\text{Sin}t, -\text{Cos}t, 0)$

برای این که دو بردار موازی باشند باید حاصلضرب خارجی آنها صفر گردد.

$$\vec{F}(t) \times \vec{F''}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{Sin}t & -\text{Cos}t & 0 \\ -\text{Sin}t & \text{Cos}t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} + 0j + (\text{Sin}t\,\text{Cos}t - \text{Sin}t\,\text{Cos}t)\,\vec{k} = 0$$

لذا $\vec{F}(t)$ و $\vec{F''}(t)$ موازی یکدیگرند.

---

۱۶) فرض کنید $\vec{F}(t) = e^{-2t}\,\vec{i} + e^{2t}\,\vec{k}$. نشان دهید که به ازای هر مقدار t، بردارهای $\vec{F}(t)$ و $F''(t)$ موازی یکدیگرند.

جواب:

$\vec{F}(t) = \left[e^{-2t}, 0, e^{2t}\right]$

$\vec{F'}(t) = \left[-2e^{-2t}, 0, 2e^{2t}\right] \Rightarrow \vec{F''}(t) = \left[4e^{-2t}, 0, 4e^{2t}\right]$

$$\vec{F}(t) \times \vec{F''}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^{-2t} & 0 & e^{2t} \\ 4e^{-2t} & 0 & 4e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$= (0)\,\vec{i} + \left[4e^{-2t}e^{2t} - 4e^{-2t}e^{2t}\right]\vec{j} + (0)\,\vec{k} = 0$$

بنابراین $\vec{F}(t)$ و $\vec{F''}(t)$ موازی یکدیگرند.

۱۷) نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)\right]=F(t)\times\vec{F}''(t)$$

جواب: طبق قضیه ۱۴.۱.۶ متن کتاب درسی داریم. (قست ث)

$$\frac{d\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right]}{dt}=\frac{d\vec{F}(t)}{dt}\times G(t)+\vec{F}(t)\times\frac{d\vec{G}(t)}{dt}$$

با جایگذاری $\vec{G}(t)=\vec{F}'(t)$ داریم:

$$\frac{d\left[\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)\right]}{dt}=\frac{d\vec{F}(t)}{dt}\times\vec{F}'(t)+\vec{F}(t)\times\frac{d\vec{F}'(t)}{dt}$$

$$=\vec{F}'(t)\times\vec{F}'(t)+\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)=\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)$$

نکته: حاصلضرب خارجی هر بردار در خودش مساوی صفر می‌باشد یعنی:

$$\vec{F}'(t)\times\vec{F}(t)=0$$

---

۱۸) فرض کنید به ازای هر t، $\vec{F}(t)$ موازی با $\vec{F}''(t)$ باشد. نشان دهید که $\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)$ ثابت است. (از تمرین ۱۷ استفاده کنید.)

جواب: طبق تمرین ۱۷ داریم:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)\right]=\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)$$

از آنجا که $\vec{F}(t)$ موازی با $\vec{F}''(t)$ می‌باشد پس:

$$\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)=0$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)\right]=0\Rightarrow\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)=C$$ مقدار ثابت

---

۱۹) فرض کنید $\vec{F}'(t)=t^2\vec{i}+(6t+1)\vec{j}+8t^3\vec{k}$ و $\vec{F}(0)=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ تابع $\vec{F}(t)$ را پیدا کنید.

جواب:

$$\vec{F}(t)=\int\vec{F}'(t)\,dt=\int\left[t^2\vec{i}+(6t+1)j+8t^3\vec{k}\right]dt$$

$$=\left[\int t^2\,dt\right]i+\left[\int(6t+1)\,dt\right]\vec{j}+\left[\int 8t^3\,dt\right]\vec{k}$$

$\vec{F}'(0)=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$

$$\vec{F}(0)=C_1\vec{i}+C_2\vec{j}+C_3\vec{k}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow\begin{cases}C_1=2\\C_2=-3\\C_3=1\end{cases}$$

$\vec{F}(0)=7\vec{i}+\vec{k}$

---

۲۰) فرض کنید $\vec{F}''(t)=6t\vec{i}-12t^2\vec{j}+\vec{k}$ **و** $\vec{F}'(0)=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ **و** $\vec{F}(0)=7\vec{i}+\vec{k}$ **تابع برداری** $\vec{F}(t)$ **را بیابید.**

جواب:

$$\vec{F}'(t)=\int\vec{F}''(t)\,dt=\left[\int 6t\,dt\right]\vec{i}+\left[\int -12t^2dt\right]\vec{j}+\left[\int dt\right]\vec{k}$$

$$=\left[3t^2+C_1\right]\vec{i}+\left[-4t^3+C_2\right]\vec{j}+\left[t+C_3\right]\vec{k}$$

$$\Rightarrow\vec{F}'(0)=C_1\vec{i}+C_2\vec{j}+C_3\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\C_2=2\\C_3=-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\vec{F}'(t)=\left[3t^2+1\right]\vec{i}+\left[-4t^3+2\right]\vec{j}+\left[t-3\right]\vec{k}$$

$$\vec{F}(t)=\int F'(t)\,dt=\int\left[\left[3t^2+1\right]\vec{i}+\left[-4t^3+2\right]\vec{j}+(t-3)\vec{k}\right]dt$$

$$=\left[\int\left[3t^2+1\right]dt\right]\vec{i}+\left[\int\left[-4t^3+2\right]dt\right]\vec{j}+\left[\int(t-3)dt\right]\vec{k}$$

$$=\left[t^3+t+a_1\right]\vec{i}+\left[-t^4+2t+a_2\right]\vec{j}+\left[\frac{t^2}{2}-3t+a_3\right]\vec{k}$$

$$\vec{F}(0)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=7\vec{i}+\vec{k}\Rightarrow\begin{cases}a_1=7\\a_2=0\\a_3=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\vec{F}(t)=\left[t^3+t+7\right]\vec{i}+\left[-t^4+2t\right]\vec{j}+\left[\frac{t^2}{2}-3t+1\right]\vec{k}$$

تمرین ۶.۲ سرعت و شتاب

۱) موشکی با سرعت اولیه ۵۰۰ متر بر ثانیه تحت زاویهٔ فراز $\alpha=\frac{\pi}{6}$ رادیان از سطح زمین به هوا شلیک شده است.

الف) بردارهای $\vec{R}$، $\vec{V}$ و $\vec{A}$ را در لحظهٔ t تعیین کنید.

ب) در چه لحظه‌ای موشک به زمین برخورد می‌کند؟

ج) برد موشک چند متر است؟

د) ماکزیمم ارتفاع موشک چقدر است؟

هـ) بردار سرعت موشک در لحظهٔ برخورد با زمین را بیابید.

و) بردار موضع و سرعت موشک را در لحظهٔ t=۲ تعیین کنید.

جواب: با توجه به مثال حل شده در کتاب درسی (مثال ۶.۲.۶) بردارهای $\vec{R}$، $\vec{V}$ و $\vec{A}$ به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{cases}\vec{A}(t)=-g\vec{j}\\ \vec{V}(t)=v_{\circ}\cos\alpha\,\vec{i}+(v_{\circ}\sin\alpha-gt)\vec{j}\\ \vec{R}(t)=tv_{\circ}\cos\alpha\,\vec{i}+(tv_{\circ}\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^{2})\vec{j}\end{cases}$$

الف) بنابراین با جایگذاری $v_{\circ}=500$ و خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dt}=0$$

$$\vec{V}(t)=500\cos\frac{\pi}{6}\,\vec{i}+\left[500\sin\frac{\pi}{6}-gt\right]\vec{j}$$

$$=250\sqrt{3}\,\vec{i}+(250-gt)\vec{j}$$

$$\vec{R}(t)=t(500)\cos\frac{\pi}{6}\,\vec{i}+\left[t(500)\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}gt^{2}\right]\vec{j}$$

$$=250\sqrt{3}\,\vec{i}+(250t-\frac{1}{2}gt^{2})\vec{j}$$

ب) موشک وقتی به زمین برخورد می‌کند که y=۰ گردد. بنابراین:

$$y=250t-\frac{1}{2}gt^{2}=0\Rightarrow+(250t-\frac{1}{2}gt)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ t=\frac{500}{g}\end{cases}$$

$t=\circ$ لحظه پرتاب موشک و $t=\frac{۵\circ\circ}{g}$ لحظه برخورد موشک به زمین می‌باشد.

ج) طبق قسمت قبل در لحظه $t=\frac{۵\circ\circ}{g}$ موشک به زمین می‌خورد. در این لحظه مقدار x برابر خواهد بود با:

$$x=۲۵\circ\sqrt{۳}\,t=۲۵\circ\sqrt{۳}\left[\frac{۵\circ\circ}{g}\right]=\frac{۱۲۵\circ\circ\circ}{g}\sqrt{۳}$$

د) زمانی موشک به ارتفاع ماکزیمم خود برسد $\frac{dy}{dt}=\circ$ خواهد بود پس:

$$\frac{dy}{dt}=۲۵\circ-gt=\circ\Rightarrow t=\frac{۲۵\circ}{g}$$

ه) با توجه به بند ب، در لحظه $t=\frac{۵\circ\circ}{g}$ موشک به زمنی برخورد می‌کند با قرار دادن این مقدار در معادله سرعت خواهیم داشت.

$$=۲۵\circ t\,\vec{i}+(۲۵\circ\sqrt{۳}t-\tfrac{۱}{۲}gt^{۲})\,\vec{j}$$

و) $$t=\frac{۵\circ\circ\sqrt{۳}}{g}\Rightarrow x=۲۵\circ t=۲۵\circ\left[\frac{۵\circ\circ\sqrt{۳}}{g}\right]=\frac{۱۲۵\circ\circ\circ\sqrt{۳}}{g}$$

$$=۵\circ\circ\sqrt{۳}\,\vec{i}+(۵\circ\circ-۲g)\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(t)=۲۵\circ\sqrt{۳}\,\vec{i}+(۲۵\circ-gt)\,\vec{j}=۲۵\circ\sqrt{۳}\,\vec{i}+(۲۵\circ-۲g)\,\vec{j}$$

---

۲) تمرین ۱ را به ازای $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ حل کنید.

جواب:الف)

$$\vec{A}(t)=-g\,\vec{j}$$

$$\vec{V}(t)=۵\circ\circ\cos\tfrac{\pi}{۳}\,\vec{i}+\left[۵\circ\circ\sin\tfrac{\pi}{۳}-gt\right]\vec{j}$$

$$=۲۵\circ\,\vec{i}+(۲۵\circ\sqrt{۳}-gt)\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(t)=۲۵\circ\,\vec{i}+\left[۲۵\circ\sqrt{۳}-g(۲)\right]\vec{j}$$

$$=۲۵\circ t\,\vec{i}+(۲۵\circ\sqrt{۳}t-\tfrac{۱}{۲}gt^{۲})\,\vec{j}$$

ب) $$y=۲۵\circ\sqrt{۳}t-\tfrac{۱}{۲}gt^{۲}=\circ\Rightarrow\begin{cases}t=\circ\\ t=\frac{۵\circ\circ\sqrt{۳}}{g}\end{cases}$$

ج) $t=\frac{500\sqrt{3}}{g}\Rightarrow x=250t=250\left[\frac{500\sqrt{3}}{g}\right]=\frac{125000\sqrt{3}}{g}$

د) $\frac{dy}{dt}=250\sqrt{3}-gt=0\Rightarrow t=\frac{250\sqrt{3}}{g}$

ه)

$$t=\frac{500\sqrt{3}}{g}\Rightarrow v(t)=250\,\vec{i}+\left[250\sqrt{3}-500\sqrt{3}\right]\vec{j}$$

$$=250\vec{i}-250\sqrt{3}\,\vec{j}$$

و) $t=2\Rightarrow R(t)=250(2)\,\vec{i}+\left[250\sqrt{3}(2)-\frac{1}{2}g(2)^2\right]\vec{j}$

$$=500\,\vec{i}+(500\sqrt{3}-2g)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t)=250\,\vec{i}+\left[250\sqrt{3}-g(2)\right]\vec{j}$$

---

۳) توپی را تحت زاویه $\frac{\pi}{4}$ رادیان به هوا پرتاب کرده‌ایم. فرض کنید که توپ در فاصله ۸۰ متری از محل پرتاب به زمین برخورد می‌کند. سرعت اولیه توپ چقدر بوده است؟

جواب:

$$R(t)=tv_0\cos\alpha\,\vec{i}+\left[tv_0\sin-\frac{1}{2}gt^2\right]j$$

$$=t\frac{\sqrt{2}}{2}v_0\,\vec{i}+\left[t\frac{\sqrt{2}}{2}v_0-\frac{1}{2}gt^2\right]\vec{j}$$

$$y(t)=0\Rightarrow t\frac{\sqrt{2}}{2}v_0-\frac{1}{2}gt^2=0\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}v_0}{g}$$

$$x(t)=\left[\frac{\sqrt{2}v_0}{g}\right]=\left[\frac{\sqrt{2}v_0}{g}\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}v_0\right]=\frac{v_0^2}{g}=80\Rightarrow v_0=\sqrt{80g}$$

---

۴) موشکی را از ارتفاع ۳۰۰ متری از سطح زمین با سرعت اولیهٔ ۶۰۰ متر بر ثانیه به طور افقی شلیک کرده‌ایم. برد موشک و لحظه‌ای که با زمین برخورد می‌کند را تعیین کنید.

جواب:
$\vec{A}(t) = -g\vec{j} \quad , \quad \vec{v}(t) = \int \vec{A}(t)\,dt = -gt\vec{j} + \vec{c}$

$\vec{v}(۰) = ۶۰۰\vec{i} \Rightarrow c = ۶۰۰\vec{i} \Rightarrow \vec{v}(t) = ۶۰۰\vec{i} - gt\vec{j}$

$\vec{R}(t) = \int \vec{v}(t)dt = ۶۰۰t\vec{i} - \frac{۱}{۲}gt^{۲}\vec{j} + \vec{D}$

$\vec{R}(۰) = ۳۰۰\vec{j} \Rightarrow \vec{D} = ۳۰۰\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{R}(t) = ۶۰۰t\vec{i} + \left[۳۰۰ - \frac{۱}{۲}gt^{۲}\right]\vec{j}$

$y = ۰ \Rightarrow ۳۰۰ - \frac{۱}{۲}gt^{۲} = ۰ \Rightarrow t^{۲} = \frac{۶۰۰}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{۶۰۰}{g}}$

در تمرین‌های ۵ تا ۸، بردار موضع یک جسم متحرک داده شده است. بردارهای سرعت و شتاب و اندازهٔ سرعت جسم را بر حسب t تعیین کنید.

۵) $\vec{R}(t) = ۳t\vec{i} + ۲t\vec{j} - ۱۶t^{۲}\vec{k}$

جواب:
$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = ۳\vec{i} + ۲\vec{j} - ۳۲t\vec{k}$

$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = -۳۲t\vec{k}$

$\left|\vec{V}(t)\right| = \sqrt{۳^{۲} + ۲^{۲} + (-۳۲t)^{۲}} = \sqrt{۱۳ + ۱۰۲۴t^{۲}}$

$\left|\vec{A}(t)\right| = \sqrt{(-۳۲)^{۲}} = ۳۲$

---

۶) $\vec{R}(t) = \text{Cos}\,\vec{i} + \text{Sint}\,\vec{j} - ۱۶t^{۲}\vec{k}$

جواب:
$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = -\text{Sint}\,\vec{i} + \text{Cost}\,\vec{j} - ۳۲t\,\vec{k}$

$\vec{A}(t) = -\text{Cost}\,\vec{i} - \text{Sint}\,\vec{j} - ۳۲\vec{k}$

$\left|\vec{V}(t)\right| = \sqrt{(-\text{Sint})^{۲} + (\text{Cost})^{۲} + (-۳۲)^{۲}} = \sqrt{۱ + ۱۰۲۴t^{۲}}$

$\left|\vec{A}(t)\right| = \sqrt{(-\text{Cost})^{۲} + (-\text{Sint})^{۲} + (-۳۲)^{۲}} = \sqrt{۱ + ۱۰۲۴} = \sqrt{۱۰۲۵}$

---

۷) $\vec{R}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^{-t}\vec{j}$

جواب:

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=-e^{-t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=e^{-t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}$$

$$\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{\left(-e^{-t}\right)^{۲}+\left(-e^{-t}\right)^{۲}}=\sqrt{۲}\,e^{-t}$$

$$\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{\left(e^{-t}\right)^{۲}+\left(e^{-t}\right)^{۲}}=\sqrt{۲}\,e^{-t}$$

---

۸) $\vec{R}(t)=e^{t}\,\mathrm{Sin}t\,\vec{i}+e^{t}\,\mathrm{Cos}t\,\vec{j}+e^{t}\,\vec{k}$

جواب:

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=\left[e^{t}\,\mathrm{Sin}t\,\vec{i}+e^{t}\,\mathrm{Cos}t\right]\vec{i}+\left[e^{t}\mathrm{Cos}t-e^{t}\mathrm{Sin}t\right]\vec{j}+e^{t}\,\vec{k}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=\left[e^{t}\,\mathrm{Sin}t+e^{t}\,\mathrm{Cos}t+e^{t}\mathrm{Cos}t-e^{t}\mathrm{Sin}t\right]\vec{i}$$

$$+\left[e^{t}\mathrm{Cos}t-e^{t}\mathrm{Sin}t-e^{t}\mathrm{Cos}t\right]\vec{j}+e^{t}\,\vec{k}$$

$$=۲e^{t}\mathrm{Cos}t\,\vec{i}-۲e^{t}\,\mathrm{Sin}t\,\vec{j}+e^{t}\,\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{\left[e^{t}(\mathrm{Sin}t+\mathrm{Cos}t)\right]^{۲}+\left[e^{t}(\mathrm{Cos}t-\mathrm{Sin}t)\right]^{۲}+(e^{t})^{۲}}=\sqrt{۳}\,e^{t}$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۲، بردار شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیه یک جسم متحرک داده شده است. بردارهای موضع و سرعت و اندازه سرعت را به ازای هر t تعیین کنید.

۹) $\vec{R}_{\circ}=۵\vec{j}+۲\vec{k}\ ,\ \vec{V}_{\circ}=۳\vec{i}-۲\vec{j}+\vec{k}\quad ,\ \vec{A}(t)=-g\vec{k}$

جواب:

$$\vec{V}(t)=\int\vec{A}(t)\,dt=\int-g\vec{k}\,dt=-gt\vec{k}+\vec{C}$$

$$\vec{V}_{\circ}=۳\vec{i}-۲\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow\vec{V}(t)=۳\vec{i}-۲\vec{j}+(-gt+۱)\vec{k}$$

$$\vec{R}(t)=\int\vec{V}(t)\,dt=۳t\,\vec{i}-۲t\,\vec{j}+\left[-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+t\right]\vec{k}+\vec{D}$$

$$\vec{R}_{\circ}=۵\vec{j}+۲\vec{k}\Rightarrow\vec{R}(t)=۳t\,\vec{i}+(۵-۲t)\vec{j}+\left[-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+t+۲\right]\vec{k}$$

۱۰) $\vec{A}(t)=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}$, $\vec{V}_\circ=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$, $\vec{R}_\circ=\vec{i}+\vec{j}$

جواب:

$$\vec{V}(t)=\int\vec{A}(t)\,dt=e^t\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\vec{C}$$

$$\vec{V}_\circ=V(t=0)=e^0\vec{i}-e^0\vec{j}+\vec{C}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$$

$$R(t)=\int\vec{V}(t)\,dt=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}t\vec{k}+\vec{D}$$

$$R(0)=\vec{i}+\vec{j}+\vec{D}=\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow\vec{D}=0\Rightarrow R(t)=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}t\vec{k}$$

---

۱۱) $\vec{A}=-\mathrm{Cost}\,\vec{i}-\mathrm{Sint}\,\vec{j}$, $\vec{V}_\circ=\vec{k}$, $\vec{R}_\circ=\vec{i}$

جواب:

$$\vec{V}(t)=\int\vec{A}(t)\,dt=-\mathrm{Sint}+\mathrm{Cost}\,\vec{j}+\vec{C}$$

$$V(0)=\vec{j}+\vec{C}=\vec{k}\Rightarrow\vec{C}=-\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow V(t)=-\mathrm{Sint}\,\vec{i}+(\mathrm{Cost}-1)\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{R}(t)=\int\vec{V}(t)\,dt=\mathrm{Cost}\,\vec{i}+(\mathrm{Sint}-t)\vec{j}+t\vec{k}+\vec{D}$$

$$\vec{R}(0)=\vec{i}+\vec{D}=\vec{i}\Rightarrow\vec{D}=0$$

$$\Rightarrow\vec{R}(t)=\mathrm{Cost}\,\vec{i}+(\mathrm{Sint}-t)\vec{j}+t\vec{k}$$

تمرین ۳.۶ مماس و قائم بر منحنی

در تمرین‌های ۱ تا ۶، بردارهای مماس و نرمال بر منحنی‌های داده شده را بیابید.

۱) $\vec{R}(t)=\left[t^2+4\right]\vec{i}+2t\vec{j}$

جواب: بردار مماس بر منحنی هموار از رابطه $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|}$ و بردار نرمال بر منحنی هموار از رابطه $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$\vec{R}'(t)=2t\vec{i}+2j\quad,\quad\left|\vec{R}'(t)\right|=\sqrt{4t^2+4}=2\sqrt{t^2+1}$$

$$\vec{T}(t)=\frac{۲\left[t\vec{i}+\vec{j}\right]}{۲\sqrt{t^{۲}+۱}}=\frac{t\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{t^{۲}+۱}}=\frac{t}{\sqrt{t^{۲}+۱}}=\frac{t}{\sqrt{t^{۲}+۱}}\vec{i}+\frac{۱}{\sqrt{t^{۲}+۱}}\vec{j}$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{۱}{\sqrt{\left[t^{۲}+۱\right]^{۳}}}\vec{i}-\frac{t}{\sqrt{\left[t^{۲}+۱\right]^{۳}}}\vec{j}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\left[\frac{۱}{\sqrt{\left[t^{۲}+۱\right]^{۳}}}\right]^{۲}+\left[\frac{-t}{\sqrt{\left[t^{۲}+۱\right]^{۳}}}\right]}=\sqrt{\frac{۱+t^{۲}}{\left[t^{۲}+۱\right]^{۳}}}=\frac{۱}{t^{۲}+۱}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{t^{۲}+۱}{\sqrt{\left[t^{۲}+۱\right]^{۳}}}\vec{i}-\frac{t(t^{۲}+۱)}{\sqrt{\left[t^{۲}+۱\right]^{۳}}}\vec{j}$$

---

۲) $R(t)=۲t\vec{i}+t^{۲}\vec{j}+\frac{۱}{۳}t^{۳}\vec{k}$

جواب:

$$\vec{R}'(t)=۲\vec{i}+۲t\vec{j}+t^{۲}\vec{k}\quad,\quad\left|\vec{R}'(t)\right|=\sqrt{۴+۴t^{۲}+t^{۴}}=t^{۲}+۲$$

$$\Rightarrow\vec{T}(t)=\frac{۲}{t^{۲}+۲}\vec{i}+\frac{۲t}{t^{۲}+۲}\vec{j}+\frac{t^{۲}}{t^{۲}+۲}\vec{k}$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{-۴t}{\left[t^{۲}+۲\right]^{۲}}\vec{i}+\frac{۴-۲t^{۲}}{\left[t^{۲}+۲\right]^{۲}}\vec{j}+\frac{۴t}{\left[t^{۲}+۲\right]^{۲}}\vec{k}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\left[\frac{-۴t}{\left[t^{۲}+۲\right]^{۲}}\right]^{۲}+\left[\frac{۴-۲t^{۲}}{\left[t^{۲}+۲\right]^{۲}}\right]+\left[\frac{۴t}{\left[t^{۲}+۲\right]^{۲}}\right]}=\frac{۲}{t^{۲}+۲}$$

$$\Rightarrow\vec{N}(t)=\frac{-۲t}{\left[t^{۲}+۲\right]}\vec{i}+\frac{۲-t^{۲}}{t^{۲}+۲}\vec{j}+\frac{۲t}{t^{۲}+۲}\vec{k}$$

---

۳) $\vec{R}(t)=۲t\vec{i}+\left[e^{t}+e^{-t}\right]\vec{j}$

جواب:

$$\vec{R}'(t)=۲\vec{i}+\left[e^{t}-e^{-t}\right]\vec{j}\ ,\ \left|\vec{R}'(t)\right|=\sqrt{۴+e^{۲t}+e^{-۲t}-۲}=e^{t}+e^{-t}$$

$$\Rightarrow\vec{T}(t)=\frac{۲}{e^{t}+e^{-t}}\vec{i}+\frac{e^{t}-e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{j}$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{-۲\left[e^{t}-e^{-t}\right]}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\vec{i}+\frac{۴}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\vec{j}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\left[\frac{-۲\left[e^{t}-e^{-t}\right]}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\right]^{۲}+\left[\frac{۴}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\right]^{۲}}=\frac{۲}{e^{t}+e^{-t}}$$

$$\Rightarrow\vec{N}(t)=\frac{e^{-t}-e^{t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{i}+\frac{۲}{e^{t}+e^{-t}}\vec{j}$$

---

۴) $\vec{R}(t)=\text{Cost}\,\vec{i}+\text{Cost}\,\vec{j}+\sqrt{۲}\,\text{Sint}\,\vec{k}$

جواب:

$$\vec{R}'(t)=-\text{Sint}\,\vec{i}-\text{Sint}\,\vec{j}+\sqrt{۲}\,\text{Cost}\,\vec{k}\ ,\ \left|\vec{R}(t)\right|=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\vec{T}(t)=\frac{-\text{Sint}}{\sqrt{۲}}\vec{i}-\frac{\text{Sint}}{\sqrt{۲}}\vec{j}+\text{Cost}\,\vec{k}$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{-\text{Cost}}{\sqrt{۲}}\vec{i}-\frac{\text{Cost}}{\sqrt{۲}}\vec{j}-\text{Sin}\,t\vec{k}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\frac{\text{Cos}^{۲}t}{۲}+\frac{\text{Cos}^{۲}t}{۲}-\text{Sin}^{۲}t}=۱$$

$$\Rightarrow\vec{N}(t)=\frac{-\text{Cost}}{\sqrt{۲}}\vec{i}-\frac{\text{Cost}}{\sqrt{۲}}\vec{j}-\text{Sint}\,\vec{k}$$

---

۵) $\vec{R}(t)=\frac{۱}{۳}(۱+t)^{\frac{۳}{۲}}\vec{i}+\frac{۱}{۳}(۱-t)^{\frac{۳}{۲}}\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}t\,\vec{k}$

جواب:

$$\vec{R}'(t)=\frac{۱}{۲}(۱+t)^{\frac{۱}{۲}}\vec{i}-\frac{۱}{۲}(۱-t)^{\frac{۱}{۲}}\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{k}$$

$$\left|\vec{R}'(t)\right|=۱$$

$$\Rightarrow T(t)=\frac{۱}{۲}(۱+t)^{\frac{۱}{۲}}\vec{i}-\frac{۱}{۲}(۱-t)^{\frac{۱}{۲}}\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{k}$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{۱}{۴}(۱+t)^{-\frac{۱}{۲}}\vec{i}+\frac{۱}{۴}(۱-t)^{-\frac{۱}{۲}}\vec{j}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\frac{۱}{۸}\,\frac{۱}{۱-t^{۲}}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\,\frac{۱}{\sqrt{۱-t^{۲}}}$$

$$\Rightarrow \vec{N}(t)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-t}\,\vec{i}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱+t}\,\vec{j}$$

---

۶) $\vec{R}(t)=e^{t}\,\vec{i}+e^{-t}\,\vec{j}+\sqrt{۲}t\,\vec{k}$

جواب: $\vec{R}'(t)=e^{t}\,\vec{i}-e^{-t}\,\vec{j}+\sqrt{۲}\,\vec{k}\ ,\ \left|\vec{R}'(t)\right|=\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}+۲}=e^{t}+e^{-t}$

$$\Rightarrow \vec{T}(t)=\frac{e^{t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{i}-\frac{e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{k}$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{۲}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\vec{i}-\frac{۲}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\vec{j}+\frac{\left[-\sqrt{۲}\right]\left[e^{t}-e^{-t}\right]}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\vec{k}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\left[\frac{۲}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\right]^{۲}+\left[\frac{۲}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\right]^{۲}+\left[\frac{-\sqrt{۲}\left[e^{t}-e^{-t}\right]}{\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}\right]^{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{۲\left[e^{t}+e^{-t}\right]^{۲}}{e^{t}+e^{-t}}}=\frac{۲}{e^{t}+e^{-t}}$$

$$\Rightarrow \vec{N}(t)=\frac{۱}{\sqrt{e^{t}+e^{-t}}}\vec{i}-\frac{۱}{\sqrt{e^{t}+e^{-t}}}\vec{j}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{k}$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۰، مولفه‌های مماس و قائم شتاب را بیابید.

۷) $\vec{R}(t)=a(s-\mathrm{Sin}t)\,\vec{i}+a(۱-\mathrm{Cos}t)\,\vec{j}$

جواب: $\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=a(۱-\mathrm{Cos}t)\,\vec{i}+a\mathrm{Sin}t\,\vec{j}$

$$\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{a^{۲}(۱-\mathrm{Cos}t)^{۲}+a^{۲}\mathrm{Sin}^{۲}t}=a\sqrt{۲-۲\mathrm{Cos}t}$$

$$A_T(t)=\frac{d\left|\vec{V}(t)\right|}{dt}=\frac{a\,\mathrm{Sin}t}{\sqrt{۲}.\sqrt{۱-\mathrm{Cos}t}}$$

می‌دانیم: $\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{\left[A_T(t)\right]^{۲}+\left[A_N(t)\right]^{۲}}\ ,\ \vec{A}(t)=\vec{V}'(t)$

$$\Rightarrow \vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=a\,\mathrm{Sint}\,\vec{i}+a\,\mathrm{Cost}\,\vec{j}\Rightarrow\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{a^{۲}}=a$$

$$\Rightarrow A_N(t)=\sqrt{\left|A(t)\right|^{۲}-\left[A_T(t)\right]^{۲}}$$

$$=\sqrt{a^{۲}-\frac{a^{۲}\mathrm{Sin}^{۲}t}{۲(۱-\mathrm{Cost})}}=\sqrt{a^{۲}-\frac{a^{۲}(۱-\mathrm{Cos}^{۲}t)}{۲(۱-\mathrm{Cost})}}$$

$$=\sqrt{a^{۲}-\frac{a^{۲}(۱-\mathrm{Cost})(۱+\mathrm{Cost})}{۲(۱-\mathrm{Cost})}}=a\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}(۱+\mathrm{Cost})}$$

---

۸) $\vec{R}(t)=۲\mathrm{Cost}\,\vec{i}+۳\mathrm{Sint}\,\vec{j}$

جواب:

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=-۲\mathrm{Sint}\,\vec{i}+۳\mathrm{Cos}\,t\vec{j}$$

$$\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{۴\mathrm{Sin}^{۲}+۹\mathrm{Cos}^{۲}t}=\sqrt{۴+۵\mathrm{Cos}^{۲}t}$$

$$A_T(t)=\frac{d\left|\vec{V}(t)\right|}{dt}=\frac{۵\mathrm{Sint}\,\mathrm{Cost}}{\sqrt{۴+۵\mathrm{Cos}^{۲}t}}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=-۲\mathrm{Cost}\,\vec{i}-۳\mathrm{Sint}\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{۴\mathrm{Cos}^{۲}t+۹\mathrm{Sin}^{۲}t}=\sqrt{۴+۵\mathrm{Sin}^{۲}t}$$

$$A_N(t)=\sqrt{\left[\left|\vec{A}\right|\right]^{۲}-\left[A_T(t)\right]^{۲}}=\sqrt{\left[۴+۵\mathrm{Sin}^{۲}t\right]-\frac{۲۵\mathrm{Sin}^{۲}t\,\mathrm{Cos}^{۲}t}{۴+۵\mathrm{Cos}^{۲}t}}=\frac{۶}{\sqrt{۴+۵\mathrm{Cos}^{۲}t}}$$

---

۹) $\vec{R}(t)=۲t\vec{i}+t^{۲}\vec{j}+\frac{۱}{۳}t^{۳}\vec{k}$

جواب:

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)+۲\vec{i}+۲t\vec{j}+t^{۲}\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{۴+۴t^{۲}+t^{۴}}=t^{۲}+۲$$

$$A_T(t)=\frac{d\left|\vec{V}(t)\right|}{dt}=۲t$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=۲\vec{j}+۲t\vec{k}\Rightarrow\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{۴+۴t^{۲}}=۲\sqrt{۱+t^{۲}}$$

$$\Rightarrow A_N(t)=\sqrt{\left[\left|\vec{A}(t)\right|\right]^{۲}-\left[A_T(t)\right]^{۲}}=\sqrt{۴+۴t^{۲}-۴t^{۲}}=۲$$

---

۱۰) $\vec{R}(t)=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}\,t\vec{k}$

جواب:

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=e^{t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}\,\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}+۲}=e^{t}+e^{-t}$$

$$A_T(t)=\frac{d\left|\vec{V}(t)\right|}{dt}=e^{t}-e^{-t}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}\Rightarrow\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}}$$

$$A_N(t)=\sqrt{\left[\left|\vec{A}(t)\right|\right]^{۲}-\left[A_T(t)\right]^{۲}}=\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}-\left[e^{۲t}+e^{-۲t}-۲\right]}=\sqrt{۲}$$

تمرین ۴.۶ خمیدگی (انحنا)

در تمرینهای ۱ تا ۶، خمیدگی منحنیهای داده شده را تعیین کنید.

۱) $y=mx+b$

جواب: طبق مسأله نمونه‌ای ۸.۴.۶، خمیدگی از رابطهٔ $k=\dfrac{|y''|}{\left[۱+(y')^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}$ به دست می‌آید.

$$y'=m\quad,\quad y''=۰\ \Rightarrow\ k=\frac{۰}{\left[۱+m^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}=۰$$

---

۲) $y=x^{۲}+۲x$

جواب:

$$y'=۲x+۲\quad,\quad y''=۲\ \Rightarrow\ k=\frac{۲}{\left[۱+(۲x+۲)^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

۳) $y = e^x$

جواب:

$$y' = e^x \quad , \quad y'' = e^x \Rightarrow k = \frac{e^x}{\left[1+(e^x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

---

۴) $x = \sqrt{y}$

جواب:

$$x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y' = 2x \ , \ y'' = 2$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{\left[1+(2x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\left[1+4x^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

---

۵) $a>0 \ , \ y = a(1-Cost) \ , \ x = a(t-Sint)$

جواب: میدانیم که اگر:

$$x = f(t) \ , \ y = g(t) \Rightarrow k = \frac{\left| f'(t)\,g''(t) - g'(t)\,f''(t) \right|}{\left[(f'(t))^2+(g'(t))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(t) = a(1-Cost) \ , \ f''(t) = a\,Sin\,t$$

$$g'(t) = aSint \ , \ g''(t) = a\,Cos\,t$$

$$\Rightarrow k = \frac{\left| a(1-Cost)\,aCost - a\,Sint(aSint) \right|}{\left[(a(1-Cost))^2+(aSint)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left| a^2(Cost-1) \right|}{\left[2a^2(1-Cost)\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-Cost}}$$

---

۶) $b>0 \ , \ y = b(Sint - t\,Cost) \ , \ x = b(Cost + t\,Sint)$

جواب:

$$f'(t) = b(-Sint + Sint + tCost) = bt\,Cost$$

$$f''(t) = b\,Cost - bt\,Sin$$

$$g'(t) = b\,(\text{Cos}t - \text{Cos}t + t\,\text{Sin}t) = b\,t\,\text{Sin}t$$

$$g''(t) = b\text{Sin}t + bt\text{Cos}t$$

$$\Rightarrow k = \frac{\left| b\,t\text{Cos}t\,(b\,\text{Sin}\,t + b\,t\,\text{Cos}t) - b\,t\,\text{Sin}\,t\,(b\,\text{Cos}t - b\,t\,\text{Sin}\,t) \right|}{\left[(bt\,a\,\text{Cos}t)^{۲} + (bt\,\text{Sin}\,t)^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= \frac{b^{۲}t^{۲}}{\left[b^{۲}t^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{bt}$$

---

۷) خمیدگی $y = -\sqrt{x}$ را در نقطهٔ (۱− و ۱) محاسبه کنید. (نتیجه را با جواب به دست آمده در مقدمه این بخش مقایسه کنید.)

جواب:

$$y' = \frac{-۱}{۲\sqrt{x}} \quad , \; y'' = \frac{۱}{۴x^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$k = \frac{|y''|}{\left[۱ + (y')^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\left[۱ + \frac{۱}{۴}\right]^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۲}{۵\sqrt{۵}}$$

در مقدمه خمیدگی $\frac{۱}{۵}$ به دست آمده است که متفاوت با نتیجه بدست آمده در این قسمت می‌باشد و به دلیل تعریف نامناسب خمیدگی در آن بخش می‌باشد.

---

۸) به ازای چه مقداری از x ، خمیدگی سهمی $y = \frac{x^{۲}}{۴}$ ماکزیمم است؟

جواب:

$$y' = \frac{۱}{۲}x \quad , \; y'' = \frac{۱}{۲} \;\Rightarrow k = \frac{\frac{۱}{۲}}{\left[۱ + \frac{۱}{۴}x^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{۲\left[۱ + \frac{x^{۲}}{۴}\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\frac{dk}{dx} = \frac{-۳\left[۱ + \frac{x^{۲}}{۴}\right]^{\frac{۱}{۲}} \times \frac{x}{۲}}{\left[۲\left[۱ + \frac{x^{۲}}{۴}\right]^{\frac{۳}{۲}}\right]^{۲}} = ۰ \;\Rightarrow x = ۰$$

---

۹) به ازای چه مقداری از x ، خمیدگی منحنی $y = \text{Ln}x$ ماکزیمم است؟

جواب:

$$y'=\frac{۱}{x}\ ,\ y''=\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow k=\frac{\left|-\frac{۱}{x^{۲}}\right|}{\left[۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right]^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۱}{x^{۲}\left[۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\frac{dk}{dx}=\frac{\left[۲x\left[۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right]^{\frac{۳}{۲}}+\frac{۳}{۲}\left[۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right]^{\frac{۱}{۲}}.\frac{-۲}{x^{۳}}.x^{۲}\right]}{\left[x^{۲}\left[۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right]^{\frac{۳}{۲}}\right]^{۲}}=۰$$

معادله فوق جواب قابل قبول برای x ندارد. توجه داریم که دامنه (y=Lnx)، (۰,∞) می‌باشد.

---

۱۰) به ازای چه مقداری از x، خمیدگی منحنی $y=e^x$ ماکزیمم است؟

جواب:

$$y'=e^x\ ,\ y''=e^x\Rightarrow k=\frac{e^x}{\left[۱+e^{۲x}\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\frac{dk}{dx}=\frac{e^x\left[۱+e^{۲x}\right]^{\frac{۳}{۲}}-۳e^{۲x}\left[۱+e^{۲x}\right]^{\frac{۱}{۲}}\times e^x}{\left[۱+e^{۲x}\right]^{۳}}$$

$$=\frac{e^x\left[۱+e^{۲x}\right]^{\frac{۳}{۲}}-۳e^{۲x}.e^x}{\left[۱+e^{۲x}\right]^{\frac{۵}{۲}}}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{e^x\left[۱-۲e^{۲x}\right]}{\left[۱+e^{۲x}\right]^{\frac{۵}{۲}}}=۰\Rightarrow ۱-۲e^{۲x}=۰\Rightarrow e^{۲x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}Ln\frac{۱}{۲}$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۴، خمیدگی منحنیهای داده شده توسط $\vec{R}(t)$ را تعیین کنید.

۱۱) $\vec{R}(t)=e^t\,Sint\,\vec{i}+e^t\,Cos\,t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$

جواب:

$$k=\frac{\left|\vec{V}\times\vec{A}\right|}{\left|\vec{V}\right|^{۳}}$$

$$\vec{V}=R'(t)=\left[e^tSint+e^tCost\right]\vec{i}+\left[e^t\,Cost-e^tSint\right]\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{A}=\vec{V}'(t)=\left[e^t\mathrm{Sint}+e^t\mathrm{Cost}+e^t\mathrm{Cost}-e^t\mathrm{Sint}\right]\vec{i}$$

$$+\left[e^t\mathrm{Cost}-e^t\mathrm{Sint}-e^t\mathrm{Sint}-e^t\mathrm{Cost}\right]\vec{j}=\left[2e^t\mathrm{Cost}\right]\vec{i}+\left[-2e^t\mathrm{Sint}\right]\vec{j}$$

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{2e^{2t}+1}$$

$$\vec{V}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ e^t\mathrm{Sint}+e^t\mathrm{Cost} & e^t\mathrm{Cost}-e^t\mathrm{Sint} & 1\\ 2e^t\mathrm{Cost} & -2e^t\mathrm{Sint} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\left[2e^t\,\mathrm{Sin\,t}\right]\vec{i}+\left[2e^t\,\mathrm{Cost}\right]\vec{j}+\left[-2e^{2t}\right]\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}\times\vec{A}\right|=\sqrt{4e^{2t}\left[\mathrm{Sin}^2t+\mathrm{Cos}^2t\right]+4e^{4t}}=2e^t\sqrt{1+e^{2t}}$$

$$\Rightarrow k=\frac{2e^t\sqrt{1+e^{2t}}}{\sqrt{\left[1+2e^{2t}\right]^3}}$$

---

۱۲) $\vec{R}(t)=\mathrm{Sint}\,\vec{i}+\mathrm{Cost}\,\vec{j}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\,\vec{k}$

جواب:

$$\vec{V}=\vec{R}'(t)=\mathrm{Cost}\,\vec{i}-\mathrm{Sint}\,\vec{j}+t^{\frac{1}{2}}\,\vec{k}$$

$$\vec{A}=\vec{V}'=-\mathrm{Sint}\,\vec{i}-\mathrm{Cost}\,\vec{j}+\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{\mathrm{Cos}^2t+\mathrm{Sin}^2t+t}=\sqrt{1+t}$$

$$\vec{V}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \mathrm{Cost} & -\mathrm{Sint} & t^{\frac{1}{2}}\\ -\mathrm{Sint} & -\mathrm{Cost} & \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{-\mathrm{Sint}}{2\sqrt{t}}+\mathrm{Cost}\sqrt{t}\right]\vec{i}-\left[\frac{\mathrm{Cost}}{2\sqrt{t}}+\mathrm{Sint}\sqrt{t}\right]\vec{j}+(-1)\,\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}\times\vec{A}\right|=\sqrt{\left[\frac{\mathrm{Sin}^2t}{4t}+t\,\mathrm{Cos}^2t-\mathrm{Sin\,t.Cos\,t}\right]+\left[\frac{\mathrm{Cos}^2t}{4t}+t\,\mathrm{Sin}^2t+\mathrm{Sin\,t\,Cos\,t}\right]+1}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4t}+t+1}$$

$$\Rightarrow k=\frac{\sqrt{\frac{1}{4t}+t+1}}{\sqrt{(1+t)^{3}}}$$

---

۱۳) $\vec{R}(t)=\frac{1}{3}\left(t^{2}-1\right)^{\frac{3}{2}}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}t^{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{4}t^{2}\vec{k}$

جواب:

$$\vec{V}=\vec{R}'(t)=t\left(t^{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}t\,\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}t\,\vec{k}$$

$$\vec{A}=\vec{V}'=\left[\left(t^{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}+t^{2}\left(t^{2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}t\,\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{t^{2}\left(t^{2}-1\right)+\frac{1}{2}t^{2}+\frac{1}{2}t^{2}}=t^{2}$$

$$\vec{V}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ t\left(t^{2}-1\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2}t & \frac{\sqrt{2}}{2}t\\ \left(t^{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}+t^{2}\left(t^{2}-1\right)^{-\frac{1}{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}t^{3}\left(t^{2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}\vec{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}t^{3}\left(t^{2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}\vec{k}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t^{3}}{\sqrt{t^{2}-1}}\vec{j}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t^{3}}{\sqrt{t^{2}-1}}\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}\times\vec{A}\right|=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}t^{6}}{t^{2}-1}+\frac{\frac{1}{2}+6}{t^{2}-1}}=\frac{t^{3}}{\sqrt{t^{2}-1}}$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{t^{3}\sqrt{t^{2}-1}}$$

---

۱۴) $\vec{R}(t)=e^{t}\,\vec{i}+e^{-t}\,\vec{j}+\sqrt{2}\,t\,\vec{k}$

جواب:

$$\vec{V}=\vec{R}'(t)=e^{t}\,\vec{i}-e^{-t}\,\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}$$

$$\vec{A} = \vec{V}' = e^{t}\,\vec{i} + e^{-t}\,\vec{j}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{e^{۲t} + e^{-۲t} + ۲} = e^{t} + e^{-t}$$

$$\vec{V} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^{t} & -e^{-t} & \sqrt{۲} \\ e^{t} & e^{-t} & ۰ \end{vmatrix} = -\sqrt{۲}\,e^{-t}\,\vec{i} + \sqrt{۲}\,e^{t}\,\vec{j} + ۲\vec{k}$$

$$\left|\vec{V} \times \vec{A}\right| = \sqrt{۲e^{-۲t} + ۲e^{t} + ۴} = \sqrt{۲}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\left|\vec{V} \times \vec{A}\right|}{\left|\vec{V}\right|^{۳}} = \frac{\sqrt{۲}\left(e^{t} + e^{-t}\right)}{\left(e^{t} + e^{-t}\right)^{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{\left(e^{t} + e^{-t}\right)^{۲}}$$

آزمون چهار گزینه‌ای فصل ششم

۱) فرض کنید $\vec{F}(t)=\left[t^{2},1,-2t\right]$ و $\vec{G}(t)=\left[t,0,t^{3}\right]$. در این صورت $\lim_{t\to 1}\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right]$ برابر است با:

الف) -1 ب) $\vec{i}$

ج) $(1,-3,-1)$ د) این حد وجود ندارد.

۲) فرض کنید $\vec{R}(t)=t\vec{i}+t^{2}\vec{j}+t^{2}\vec{k}$. مولفه قائم شتاب به ازای هر t کدام است؟

الف) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+8t^{2}}}$ ب) $\frac{8t}{\sqrt{1+8t^{2}}}$ ج) $\sqrt{1+8t^{2}}$ د) $\frac{4}{1+8t^{2}}$

۳) فرض کنید $\vec{F}(t)=\left[e^{-t},e^{-t},1\right]$ و $\vec{G}(t)=\left[2t,6t,t^{2}\right]$. مشتق $\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)$ در $t=0$ کدام است؟

الف) $-8\vec{k}$ ب) $-6\vec{i}+2\vec{j}+8\vec{k}$

ج) $8\vec{k}$ د) مشتق در $t=0$ وجود ندارد.

۴) خمیدگی نمودار $\vec{R}(t)=t^{2}\vec{i}+t\vec{j}$ در $t=1$ برابر است با:

الف) $\frac{2}{5\sqrt{5}}$ ب) 2 ج) $\frac{2}{5}$ د) $\frac{1}{2}$

۵) اگر $\vec{r}(t)=\left[2t,4-t^{2}\right]$ آنگاه:

الف) $\vec{r}(1)=(2,3)$ و $\vec{r}'(1)=(2,-2)$

ب) $\vec{r}(1)=(2,3)$ و $\vec{r}'(1)=(0,0)$

ج) $\vec{r}(1)=(0,1)$ و $\vec{r}'(1)=(2,-2)$

د) $\vec{r}(1)=(0,1)$ و $\vec{r}'(1)=(0,0)$

۶) اگر $\vec{F}$ در بازه I مشتق‌پذیر باشد و $\left|\vec{F}(t)\right| = C$ مقداری ثابت باشد آنگاه به ازای هر $t \in I$ داریم.

الف) $\vec{F}(t).\vec{F}(t) = 0$

ب) $\vec{F}(t).\vec{F}'(t) = C^2$

ج) $\vec{F}(t).\vec{F}'(t) = 0$

د) هر سه عبارت نادرست هستند.

۷) فرض کنید $p(x,y)$ بر نمودار $\vec{R}(t) = (4t, 2t^2)$ در حرکت باشد که در آن t نمایش زمان است، در این صورت داریم:

الف) $\vec{A}(t) = (0, 4)$ و $\vec{V}(t) = (4, 4t)$

ب) $\vec{A}(t) = (0, 4)$ و $\vec{V}(t) = (4, 4)$

ج) $\vec{A}(t) = (4, 4)$ و $\vec{V}(t) = (4, 4t)$

د) هر سه گزینه فوق نادرست هستند.

۸) اگر $\vec{R}(t) = [t, e^t]$ آنگاه مولفه‌های مماسی و قائم شتاب در $t = 0$ عبارتند از:

الف) $A_T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $A_N(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ب) $A_T(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $A_N(0) = \sqrt{2}$

ج) $A_T(0) = 1$ و $A_N(0) = -1$

د) $A_T(0) = 1 + 1$ و $A_N(0) = 1$

۹) خمیدگی $y = 1 - x^2$ در $x = 1$ برابر است با:

الف) ۱

ب) ۲-

ج) $\frac{2}{5^{3/2}}$

د) برابر با این سه عدد نیست

۱۰) کدام عبارت زیر نادرست است؟

الف) $\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t) \times \vec{u}'(t)\right] = \vec{u}(t) \times u''(t)$

ب) $\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t) \times v(t)\right] = \left[\vec{u}(t) \times v'(t)\right] + \left[\vec{u}'(t) \times \vec{v}(t)\right]$

ج) $\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t).v(t)\right] = \left[\vec{u}(t).v'(t)\right] + \left[\vec{u}'(t).\vec{v}(t)\right]$

د) $\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(f(t))\right] = f'(t)\,\vec{u}'(t)$

۱۱) اگر $\vec{R}(t) = [t, t^۲, t^۳]$ آنگاه مولفه‌های مماسی و قائم شتاب در $t=۱$ عبارتند از:

الف) $A_T(۱)=\frac{۲۲}{\sqrt{۱۴}}$ و $A_N(۱)=\frac{۲\sqrt{۱۹}}{\sqrt{۲۴}}$ ب) $A_N(۱)=A_T(۱)=\frac{۲۲}{\sqrt{۱۴}}$

ج) $A_N(۱)=A_T(۱)=\frac{۲\sqrt{۱۹}}{\sqrt{۲۴}}$ د) هر سه گزینه فوق نادرست هستند.

۱۲) خمیدگی سهمی $y=۱-x^۲$ در $x=۰$ عبارتست از:

الف) ۲ ب) ۰ ج) ۲- د) ۴

۱۳) خمیدگی سهمی $y=x^۲$ در $x=۱$ عبارتست از:

الف) ۲ ب) $\frac{۲}{۵^{۳/۲}}$ ج) ۲- د) ۰

۱۴) فرض کنید $\vec{F}(t)$ موازی $\vec{F}''(t)$ باشد. در این صورت $\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)$

الف) همواره صفر است. ب) برداری ثابت است.

ج) نمی‌تواند برداری ثابت باشد. د) هر سه حکم نادرست هستند.

پاسخ آزمون چهار گزینه‌ای فصل ششم

۱) گزینه (ج) صحیح است

$$\lim_{t\to 1}\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right]=\lim_{t\to 1}\vec{F}(t)\times\lim_{t\to 1}\vec{G}(t)=(1,1,-2)\times(1,0,1)$$

$$(1,1,-2)\times(1,0,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\,(1)-\vec{j}\,(1+2)+\vec{k}\,(-1)=(1,-3,-1)$$

---

۲) گزینه (الف) صحیح است

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=\vec{i}+2t\vec{j}+2t\vec{k}\quad,\quad\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{1+4t^2+4t^2}=\sqrt{8t^2+1}$$

$$A_T(t)=\frac{d\left|\vec{V}(t)\right|}{dt}=\frac{8t}{\sqrt{1+8t^2}}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=2\vec{j}+2\vec{k}\Rightarrow\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

$$A_N(t)=\sqrt{\left[\left|\vec{A}(t)\right|\right]^2-\left[A_T(t)\right]^2}=\sqrt{8-\frac{64t^2}{1+8t^2}}=\sqrt{\frac{8}{1+8t^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+8t^2}}$$

---

۳) گزینه صحیح وجود ندارد.

$$\frac{d\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right]}{dt}=\frac{d\vec{F}(t)}{dt}\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\frac{d\vec{G}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=\left[-e^{-t},-e^{-t},0\right]\quad,\quad\frac{d\vec{G}(t)}{dt}=(2,6,2t)$$

$$\left[-e^{-t},-e^{-t},0\right]\times\left[2t,6t,t^2\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -e^{-t} & -e^{-t} & 0\\ 2t & 6t & t^2\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\left[-t^{۲}e^{-t}\right]-\vec{j}\left[-t^{۲}e^{-t}\right]+\vec{k}\left(۶te^{-t}-۲te^{-t}\right)=\left[-t^{۲}e^{-t},t^{۲}e^{-t},۴te^{-t}\right]$$

$$\left[-e^{-t},-e^{-t},۱\right]\times\left(۲,۶,۲t\right)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\e^{-t}&e^{-t}&۱\\۲&۶&۲t\end{vmatrix}=\left[۲te^{-t}-۶,۲-۲te^{-t},۴e^{-t}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{d\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right]}{dt}\Big|_{t=۰}=\left[-t^{۲}e^{-t},t^{۲}e^{-t},۴te^{-t}\right]\Big|_{t=۰}$$

$$+\left[۲te^{-t}-۶,۲-۲te^{-t},۴e^{-t}\right]\Big|_{t=۰}$$

$$=(۰,۰,۰)+(-۶,۲,۴)=-۶\vec{i}+۲\vec{j}+۴\vec{k}$$

---

۴) گزینه (الف) صحیح است

$$k=\frac{\left|\vec{V}\times\vec{A}\right|}{\left|\vec{V}\right|^{۳}}$$

$$\vec{V}=\vec{R}'=۲t\vec{i}+\vec{j}\quad,\quad\vec{A}=\vec{V}'=۲\vec{i}$$

$$\vec{V}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۲t&۱&۰\\۲&۰&۰\end{vmatrix}=-۲\vec{k}\quad,\quad\left|\vec{V}\right|=\sqrt{۴t^{۲}+۱}$$

$$\Rightarrow k=\frac{۲}{\sqrt{\left(۴t^{۲}+۱\right)^{۳}}}\Big|_{t=۱}=\frac{۲}{\sqrt{۵^{۳}}}=\frac{۲}{۵\sqrt{۵}}$$

---

۵) گزینه (الف) صحیح است

$$\vec{r}(t=۱)=(۲\times۱,۴-۱)=(۲,۳)$$

$$\vec{r}'(t)=(۲,-۲t)\Rightarrow\vec{r}'(t=۱)=(۲,-۲)$$

---

۶) گزینه (ج) صحیح است

$$\vec{F}(t).\vec{F}(t)=\left|\vec{F}(t)\right|\left|\vec{F}(t)\right|\cos(۰)=\left|\vec{F}(t)\right|^{۲}=C^{۲}$$

$$\Rightarrow \vec{F}(t).\vec{F}(t)=C^{۲} \Rightarrow \frac{d\left[\vec{F}(t).\vec{F}(t)\right]}{dt}=۰$$

$$\frac{d\left[\vec{F}(t).\vec{F}(t)\right]}{dt}=\vec{F}'(t).\vec{F}(t)+\vec{F}(t).\vec{F}'(t)=۲\vec{F}(t).\vec{F}'(t)=۰$$

---

۷) گزینه (الف) صحیح است

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=(۴,۴t) \quad , \quad \vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=(۰,۴)$$

---

۸) گزینه (الف) صحیح است

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=(۱,e^{t}) \Rightarrow \left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{۱+e^{۲t}}$$

$$A_T(t)=\frac{d\left|\vec{V}(t)\right|}{dt}=\frac{e^{۲t}}{\sqrt{۱+e^{۲t}}} \Rightarrow A_T(۰)=\frac{e^{۰}}{\sqrt{۱+e^{۰}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=(۰,e^{t}) \Rightarrow \left|\vec{A}(t)\right|=e^{t}$$

$$A_N(t)=\sqrt{\left[\left|\vec{A}(t)\right|\right]^{۲}-\left[A_T(t)\right]^{۲}}=\sqrt{e^{۲t}-\frac{e^{۴t}}{۱+e^{۲t}}}=\frac{e^{t}}{\sqrt{۱+e^{۲t}}}$$

$$\Rightarrow A_N(t=۰)=\frac{e^{۰}}{\sqrt{۱+e^{۰}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

---

۹) گزینه (ج) صحیح است

$$k=\frac{|y''|}{\left[۱+(y')^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$y'=-۲x \ , \ y''=-۲ \Rightarrow k=\frac{۲}{\left[۱+(-۲x)^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}\Big|_{x=۱}\ \frac{۲}{۵^{\frac{۳}{۲}}}$$

۱۰) گزینه (د) صحیح است

درستی رابطه الف در تمرین ۱۷ بخش ۱.۶ اثبات شد.

رابطه ب و ج نیز قسمتهای د و هـ قضیه ۱۴.۱.۶ کتاب درسی می‌باشند.

ولی طبق قسمت ج قضیه ۱۴.۱.۶ کتاب درسی داریم:

$$\frac{d\vec{u}(f(t))}{dt}=f'(t)\,\vec{u}'(f(t))$$

---

۱۱) گزینه (د) صحیح است

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=(1,2t,3t^2)\Rightarrow\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{1+4t^2+9t^4}$$

$$A_T(t)=\frac{d\left|\vec{V}(t)\right|}{dt}=\frac{4t+18t^3}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\Rightarrow A_T(t=1)=\frac{22}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=(0,2,6t)\Rightarrow\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{4+36t^2}$$

$$A_N(t)=\sqrt{\left[\left|\vec{A}(t)\right|\right]^2-\left[A_T(t)\right]^2}=\sqrt{4+36t^2-\frac{22^2}{14}}$$

$$\Rightarrow A_N(t=1)=\sqrt{\frac{76}{14}}=\frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{14}}$$

---

۱۲) گزینه (الف) صحیح است

$$k=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'=-2x\ ,\ y''=-2\Rightarrow k=\frac{2}{\left[1+(-2x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=0}=\frac{2}{1}=2$$

---

۱۳) گزینه (ب) صحیح است

$$k=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$y' = ۲x \quad , y'' = ۲ \Rightarrow k = \frac{۲}{\left[۱+(۲x)^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}\Bigg|_{x=۱} = \frac{۲}{۵^{\frac{۳}{۲}}}$$

---

۱۴) گزینه (ب) صحیح است

$$\frac{d\left[\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)\right]}{dt} = \vec{F}'(t)\times\vec{F}'(t) + \vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)$$

می‌دانیم که $\vec{F}(t)$ و $\vec{F}''(t)$ موازی یکدیگرند پس $\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t) = ۰$

از طرفی حاصلضرب خارجی هر بردار در خودش صفر می‌باشد یعنی:

$$\vec{F}'(t)\times\vec{F}'(t) = ۰$$

بنابراین:

$$\frac{d\left[\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)\right]}{dt} = ۰ \Rightarrow \vec{F}(t)\times\vec{F}'(t) = \vec{C}$$ بردار ثابت

تمرینات فصل هفتم

تمرین ۱.۷ توابع چند متغیره صفحه ۳۲۱

در تمرین‌های ۱ تا ۶، دامنهٔ هر یک از توابع داده شده را تعیین کنید.

۱) $f(x+y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

جواب: نکته: دامنه توابع n متغیره عبارتست از اشتراک دامنه‌های هر یک از n متغیر

$D_{f(x,y)}=\{x,y)\mid x\geq ۰ , y\geq ۰\}$

---

۲) $f(x,y)=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$

جواب: دامنه f مجموعه تمام نقاط صفحه xoy است به غیر از ریشه‌های مخرج.

$f(x,y)=\frac{y^۲-x^۲}{xy}$

$D_{f(x,y)}=R^۲-\{(x,y)\mid xy=۰\}=R^۲-\{(x,y)\mid x=۰$ یا $y=۰\}$

---

۳) $f(x,y)=\sqrt{x^۲+y^۲-۲۵}$

جواب: $D_{f(x,y)}=\{(x,y)\mid x^۲+y^۲-۲۵\geq ۰\}=\{(x,y)\mid x^۲+y^۲\geq ۲۵\}$

دامنه f ناحیه خارج و روی دایره $x^۲+y^۲=۲۵$ می‌باشد.

---

۴) $f(x,y)=\frac{۱}{x+y}$

جواب: $D_{f(x,y)}=R^۲-\{(x,y)\mid x-y=۰\}=R^۲-\{(x,y)\mid x=-y\}$

دامنه f مجموعه تمام نقاط صفحه xoy است به جز خط $x=-y$

---

۵) $f(x,y,z)=\sqrt{۱-x^۲-y^۲-z^۲}$

جواب: $D_{f(x,y,z)}=\{(x,y,z)\mid ۱-x^۲-y^۲-z^۲\geq ۰\}=\{(x,y,z)\mid x^۲+y^۲+z^۲\leq ۱\}$

دامنه f ناحیه داخل و روی کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ می‌باشد.

۶- $g(x,y,z)=\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$

جواب:

$$Dg(x,y,z)=\frac{x^{۲}z-y^{۲}x+z^{۲}y}{xyz}$$

$$Dg_{(x,y,z)}=R^{۲}-\{(x,y,z)\mid xyz=۰\}$$

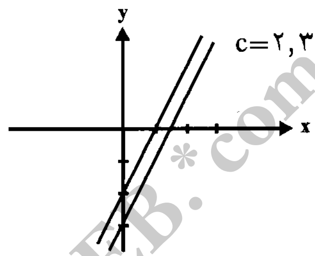
$=R^{۲}-\{(x,y,z)\mid x=۰$ یا $y=۰$ یا $z=۰\}$

نکته: اگر f یک تابع سه متغیره (دو متغیره) باشد آنگاه به ازای هر عدد c مجموعه همه نقاط (x,y,z) را بطوری که $f(x,y,z)=c$ یک سطح تراز f می‌نامیم.

---

۷) $c=۲,۳\ ,\ f(x,y)=۳x-y$

جواب:



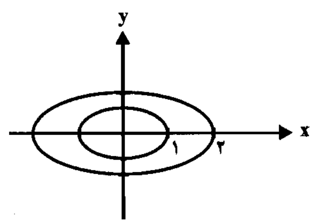
$c=۲\Rightarrow ۳x-y=۲$

$c=۳\rightarrow ۳x-y=۳$

---

۸) $c=۱,۴\ ,\ f(x,y)=x^{۲}+۴y^{۲}$

جواب:



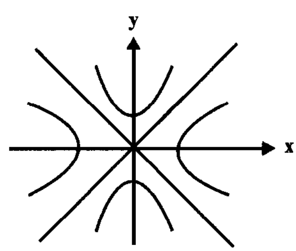
$c=۱\rightarrow x^{۲}+۴y^{۲}=۱\rightarrow x^{۲}+\frac{y^{۲}}{\frac{۱}{۴}}=۱$ بیضی

$c=۲\rightarrow x^{۲}+۴y^{۲}=۴\rightarrow \frac{x^{۲}}{۴}+y^{۲}=۱$ بیضی

---

۹) $c=-۱,۰,۱\ ,\ f(x,y)=x^{۲}-y^{۲}$

جواب:



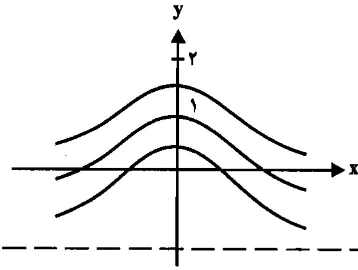
$c=-۱\rightarrow x^{۲}-y^{۲}=-۱\rightarrow y^{۲}-x^{۲}=۱$ هذلولی

$c=۰\rightarrow x^{۲}-y^{۲}=۰\rightarrow x^{۲}-y^{۲}\Rightarrow x=\pm y$

$c=۱\rightarrow x^{۲}-y^{۲}=۱\rightarrow x^{۲}-y^{۲}=۱$ هذلولی

۱۰) $f(x,y)=2y-\cos x \quad , \quad c=0, 1, 2$

جواب:



$$c=0 \rightarrow 2y-\cos x=0 \Rightarrow y=\frac{\cos x}{2}$$

$$c=1 \rightarrow 2y-\cos x=1 \Rightarrow y=\frac{1+\cos x}{2}$$

$$c=2 \rightarrow 2y-\cos x=2 \Rightarrow y=\frac{2+\cos x}{2}$$

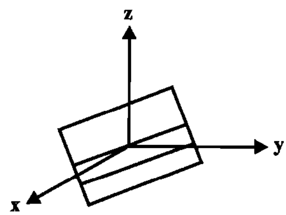
در تمرین‌های ۱۱ و ۱۲ نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم کنید.

۱۱) $f(x,y)=x+2y$

جواب: $f(x,y)=z$ قرار می‌دهیم بنابراین $x+2y=z$ یا $x+2y-z=0$ که صفحه‌ای است با بردار قائم $\vec{a}=(1,2,-1)$ برای تجسم این صفحه در فضای سه بعدی سطوح توازی از آن را رسم می‌کنیم و شکل را ترسیم می‌کنیم.

$c=0 \Rightarrow x+2y=0$

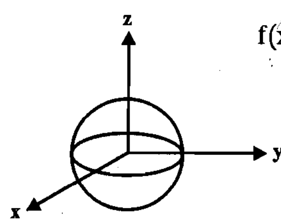
$c=1 \Rightarrow x+2y=1$



---

۱۲) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

جواب:



$$\sqrt{4-x^2-y^2}=z \rightarrow x^2+y^2+z^2=4$$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۱۸ سطوح تراز $f(x,y,z)=c$ را برای هر یک از توابع داده شده مشخص کنید.

۱۳) $f(x,y,z)=x+y+z$

جواب: معادله صفحه‌ای است با بردار قائم (۱ و ۱ و ۱) $\quad x+y+z=c$

۱۴) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

جواب: معادله کره‌ای است با شعاع $\sqrt{c}$ $x^2+y^2+z^2=c$

---

۱۵) $f(x,y,z)=x+2y$

جواب: $x+2y=c$

معادله صفحه‌ای است در فضای سه بعدی با بردار نرمال (۰ و ۲ و ۱)

---

۱۶) $f(x,y,z)=z$

جواب: $z=c$

معادله صفحه‌ای است در فضای سه بعدی با بردار نرمال (۱ و ۰ و ۰)

---

۱۷) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z$

جواب: معادله یک سهمیوار بیضوی $x^2+y^2+z=c$

---

۱۸) $f(x,y,z)=z-1-x^2-y^2$

جواب: معادله یک سهمیوار بیضوی $z-1-x^2-y^2=c$

در تمرین‌های ۱۹ تا ۲۴ نوع هر سطح درجه دوم را تعیین و آن را رسم کنید.

۱۹) $4x^2+9y^2=36z$

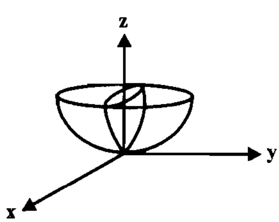
جواب: $4x^2+9y^2=36z \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=z$

معادله یک سهمیوار بیضوی است برای ترسیم آن در صفحه‌های $z=1$ و $x=0$ و $y=0$ بررسی می‌کنیم.

$z=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بیضی

$z=0 \Rightarrow y^2=4z$ سهمی

$y=0 \Rightarrow x^2=9z$ سهمی



۲۰) $16x^2+100y^2-25z^2=400$

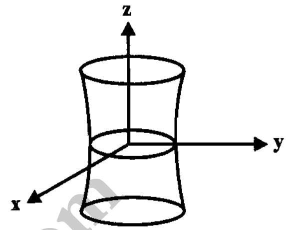
جواب: $16x^2+100y^2-25z^2=400 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$

معادله یک ورق هذلولیوار یک پارچه است برای تجسم نمودار آن نمودار را روی صفحه‌های $x=0$ و $y=0$ و $z=k$ بررسی می‌کنیم:

$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ هذلولی

$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1$ هذلولی

$z=k \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1-\frac{k^2}{16}$ بیضی



---

۲۱) $3x^2-4y^2-z^2=12$

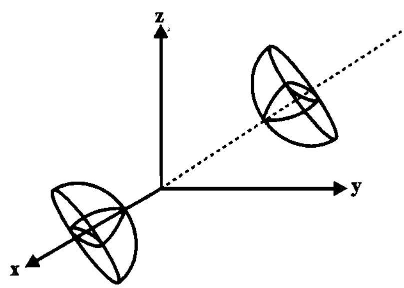
جواب: $3x^2-4y^2-z^2=12 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{12}=1$

معادله یک هذلولیوار دو پارچه است برای تجسم این نمودار آن را روی صفحه‌های $x=k$ و $y=k$ و $z=k$ بررسی می‌کنیم:

$x=k \rightarrow \frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{12}=\frac{k^2}{4}-1$ معادله یک بیضی یا یک نقطه یا تهی

$y=k \rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{12}=1+\frac{k^2}{3}$ هذلولی

$z=k \rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1+\frac{k^2}{12}$ هذلولی



---

۲۲) $x^2-16y^2=4z^2$

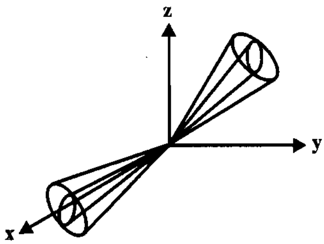
جواب: $x^2-16y^2=4z^2 \rightarrow \frac{x^2}{16}-y^2-\frac{z^2}{4}=0$

معادله یک مخروط بیضوی است برای تجسم نمودار آن را روی صفحه‌های $x=k$ و $y=0$ و $z=0$ بدست می‌آوریم.

$x=k \Rightarrow \frac{z^2}{4}+y^2=\frac{k^2}{16}$ بیضی یا یک نقطه

$y=0 \Rightarrow \frac{z^2}{4}=\frac{x^2}{16}$ دو خط که از مبدأ می‌گذرند

$z=0 \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{16}$ دو خط که از مبدأ می‌گذرند



۲۳) $9x^2+4y^2+z^2=36$

جواب:

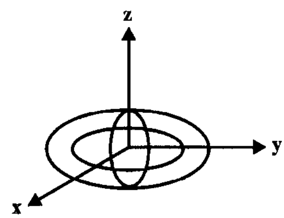
$$9x^2+4y^2+z^2=36 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$$

معادله یک بیضیوار است برای تجسم نمودار آن را روی صفحه‌های $x=0$ و $y=0$ و $z=0$ بدست می‌آوریم:

$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$ بیضی

$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{36}=1$ بیضی

$z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ بیضی



۲۴) $4y=x^2-z^2$

جواب:

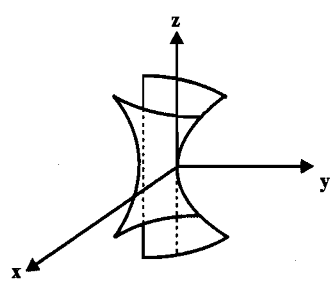
$$4y=x^2-z^2 \Rightarrow y=\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{4}$$

معادله یک سهمیوار هذلولی است اثر این نمودار روی صفحه‌های $z=0$ و $x=0$ و $y=k$ بررسی می‌کنیم.

$z=0 \Rightarrow y=\frac{x^2}{4}$ سهمی

$x=0 \Rightarrow y=-\frac{z^2}{4}$ سهمی

$y=k \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{4}=k$ هذلولی



تمرین ۲.۷ حد و پیوستگی صفحه ۳۳۳

حدهای ۱ تا ۱۰ را تعیین کنید.

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(۲,۴)} (x+\frac{۱}{۲})$

جواب: $\lim\limits_{(x,y)\to(۲,۴)} (x+\frac{۱}{۲})=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$

---

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(۱,-۲)} (۲x^۳-۴xy+۵y^۲)$

جواب: نکته: اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$ وجود داشته باشند آنگاه داریم:

$$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)+\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

پس:

$$\lim\limits_{(x,y)\to(۱,-۲)} (۲x^۳-۴xy+۵y^۲)=\lim\limits_{(x,y)\to(۱,-۲)} ۲x^۳ +\lim\limits_{(x,y)\to(۱,-۲)} (-۴xy)+$$

$$\lim\limits_{(x,y)\to(۱,-۲)} (۵y^۲)=۲(۱)^۳+(-۴)(۱),(-۲)+۵(-۲)^۲=۳۰$$

---

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(۱,۰)} \frac{x^۲-xy+۱}{x^۲+y^۲}$

جواب: نکته: در محاسبه $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ اگر حداقل دو مسیر دلخواه گذرا از نقطه (a,b) موجود باشد که حد تابع f(x,y) در نقطه (a,b) بر روی آنها یکسان نباشد $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجود نیست.

پس:

$$y=x:\ \lim\limits_{(x,y)\to(۱,۰)} \frac{x^۲-xy+۱}{x^۲+y^۲}=\lim\frac{x^۲-x^۲+۱}{۲x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$y=۰:\ \lim\limits_{(x,y)\to(۱,۰)} \frac{x^۲-xy+۱}{x^۲+y^۲}=\lim\frac{x^۲+۱}{x^۲}=۲$$

پس حد موجود نیست

---

۴) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(۱,۲,۰)} (x^۲+۳y-۴z^۲+۲)$

جواب:

$$\lim\limits_{(x,y,z)\to(۱,۲,۰)} (x^۲+۳y-۴z^۲+۲)=\lim\limits_{(x,y,z)\to(۱,۲,۰)} x^۲ +\lim\limits_{(x,y,z)\to(۱,۲,۰)} (+۳y)+\lim\limits_{(x,y,z)\to(۱,۲,۰)} (-۴z^۲+۲)$$

$$=۱+۳(۲)+-۴(۰)+۲=۹$$

۵) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^2+2xy^2+y^4}{x+y^2}$

جواب: $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^2+2xy^2+y^4}{x+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{(x+y^2)^2}{x+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} x+y^2 =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} x + \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} y^2 = -1+1=0$

---

۶) $\lim\limits_{(x,y)\to(\mathrm{Ln}2,0)} e^{2x+y^2}$

جواب: $\lim\limits_{(x,y)\to(\mathrm{Ln}2,0)} e^{2x+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(\mathrm{Ln}2,0)} e^{2x} \times \lim\limits_{(x,y)\to(\mathrm{Ln}2,0)} e^{y^2} = 4e^0 = 4$

نکته: اگر $(a>0)$: $\mathrm{Ln}a^b = b\mathrm{Ln}a$ و $e^{\mathrm{Ln}a^b} = a^b$

---

۷) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2},0)} \mathrm{Cos}(x+y+z)$

جواب: $f(x,y,z)=x+y+z$, $g(x)=\mathrm{Cos}x \Rightarrow \lim\limits_{(x,y,z)\to(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2},0)} f(x,y,z) = \lim\limits_{(x,y,z)\to(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2},0)} (x,y,z) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+0=0$

Cosx در $x=0$ پیوسته است پس

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},0)} \mathrm{Cos}(x+y+z) = \mathrm{Cos}(0) = 1$

---

۸) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{Sin}xy}{xy}$

جواب: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{Sin}xy}{xy} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{Sin}(xy)}{xy} = 1$

---

۹) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

جواب: نکته: تابع f(x,y) در نقطه (a,b) دارای حد L است اگر و فقط اگر:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ni 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$

حال ادعا می‌کنیم حد فوق صفر است پس فرض می‌کنیم که:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ni 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

حال نشان می‌دهیم که $\left|xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|$ داریم:

$$\left|xy\frac{x^{2}-y^{2}}{x^{2}+y^{2}}\right|<\varepsilon \Rightarrow |xy|\frac{|x^{2}-y^{2}|}{x^{2}+y^{2}}<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}(x^{2}+y^{2})\frac{|x^{2}-y^{2}|}{x^{2}+y^{2}}<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}|x^{2}-y^{2}|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}(x^{2}+y^{2})<\varepsilon \Rightarrow \sqrt{x^{2}+y^{2}}<\sqrt{2\varepsilon}$$

با انتخاب $\delta\leq\sqrt{2\varepsilon}$ و با توجه به اینکه تمام روابط بازگشتی هستند حد مورد نظر ثابت گردید.

---

۱۰) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^{3}+2x^{2}y-xy-2y^{2}}{x+2y}$

جواب: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^{3}+2x^{2}y-xy-2y^{2}}{x+2y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{(x+2y)(x^{2}-y)}{(x+2y)}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)}(x^{2}-y)$

$$=\lim_{(x,y)\to(2,-1)} x^{2}+\lim_{(x,y)\to(2,-1)}(-y)=4+1=5$$

---

۱۱) نشان دهید که $\lim \frac{y}{x}$ **وجود ندارد. [راهنمایی: این حد را روی خطوط** $y=mx$ **تعیین کنید.]**

جواب: کافی است حد تابع مورد نظر را بر روی دو مسیر $y=x$ و $y=-x$ که گذرا از نقطه (۰ و ۰) هستند را بررسی کنیم.

$$y=x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x}=1$$

$$y=-x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-x}{x}=-1$$

پس حد وجود ندارد.

---

۱۲) نشان دهید که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^{2}+y^{2}}{x^{2}-2y^{2}}$ **وجود ندارد.**

جواب:

$$y=x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^{2}+y^{2}}{x^{2}-2y^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{3x^{2}}{-x^{2}}=-3$$

$$y=2x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^{2}+y^{2}}{x^{2}-2y^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{6x^{2}}{-7x^{2}}=\frac{-6}{7}$$

پس حد وجود ندارد.

۱۳) نشان دهید که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$ وجود ندارد.

جواب: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2-y^2} = \infty$

حد وجود ندارد.

---

۱۴) نشان دهید که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2}$ وجود ندارد.

جواب:

$$y=2x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-3x} = \frac{-2}{3}$$

$$y=3x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{-8x^2} = \frac{-3}{8}$$

حد وجود ندارد.

در تمرین‌های ۱۵ تا ۲۲ فاصلهٔ پیوستگی تابع f را تعیین کنید.

۱۵) $f(x,y)=xy^2$

جواب: برای تعیین فاصله پیوستگی توابع کافی است دامنهٔ آنها را مشخص کرد.

$D_{f(x,y)}=R^2$ پس فاصلهٔ پیوستگی $f(x,y)$، R^2 است.

---

۱۶) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2}$

جواب:

$$D_{f(x,y)}=R^2-\{(x,y)\mid x^2-y^2=0\}=R^2-\{(x,y)\mid x^2=y^2\}=R^2-\{(x,y)\mid x=\pm y\}$$

پس فاصلهٔ پیوستگی تابع $f(x,y)$، $R^2-\{(x,y)\mid x=\pm y\}$ است.

---

۱۷) $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}$

جواب: $D_{f(x,y,z)}=R^3-\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2=0\}$

معادله $x^2+y^2-z^2=0$ معادله مخروط دو پارچه بیضوی است که در آن $a=b=c=1$ است بنابراین فاصله پیوستگی تابع f، مجموعه R^3 به جز نقاطی است که در معادله $x^2+y^2-z^2=0$ صدق کنند.

۱۸) $f(x,y)=\dfrac{x^{۲}+y}{x^{۲}+y^{۲}-۱}$

جواب: $D_{f(x,y)}=R^{۲}-\{(x,y)\mid x^{۲}+y^{۲}-۱=۰\}=R^{۲}-\{(x,y)\mid x^{۲}+y^{۲}=۱\}$

معادله $x^{۲}+y^{۲}=۱$ معادله دایره‌ای به شعاع است. بنابراین فاصله پیوستگی تابع f مجموعه تمام نقاط $R^{۲}$ به جز نقاطی است که در معادله دایره $x^{۲}+y^{۲}=۱$ صدق می‌کنند.

---

۱۹) $f(x,y,z)=Sin(xyz-۱)$

جواب: نکته: اگر f یک تابع سه متغیره و g تابعی یک متغیره باشد به طوری که f در (a,b,c) پیوسته و g در $f(a,b,c)$ پیوسته باشد آنگاه gof در (a,b,c) پیوسته است.

تابع $h(x,y,z)=xyz$ روی $R^{۳}$ پیوسته است. زیرا حاصلضرب سه تابع پیوسته می‌باشد پس $f(x,y,z)=xyz-۱$ روی $R^{۳}$ پیوسته است از طرفی می‌دانیم تابع $g(t)=Sin(t)$ روی R پیوسته است بنابراین طبق نکته ذکر شده $Sin(xyz-۱)$ نیز روی $R^{۳}$ پیوسته است.

---

۲۰) $f(x,y,z)=Ln(e^{x}+e^{yz})$

جواب: $Ln(t)$ برای مقادیر t با شرط $t>۰$ تعریف شده است پس

$D_{f(x,y,z)}=\{(x,y,z)\mid e^{x}+e^{yz}>۰\}=R^{۳}$

بنابراین فاصلهٔ پیوستگی f، $R^{۳}$ است.

---

۲۱) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$

جواب: تابع دو متغیره f در (a,b) پیوسته است اگر هر سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) $f(a,b)$ وجود داشته باشد.

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد.

ج) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$

واضح است که شرط اول برقرار است $(f(0,0)=0)$ در مورد شرط دوم داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \quad \ni 0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$$

پس:

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon \xrightarrow{x^2y^2\le\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2} \left|\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$$

$$\to \left|\frac{x^2+y^2}{4}\right|<\varepsilon \to \sqrt{x^2+y^2}<2\sqrt{\varepsilon}$$

با انتخاب $\delta\le 2\sqrt{\varepsilon}$ و با توجه به آنکه روابط بازگشتی هستند حد مورد نظر اثبات می‌گردد در مورد شرط سوم داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0 \quad , \quad f(0,0)=0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$$

تابع مورد نظر در (۰و۰) پیوسته است پس فاصله پیوستگی تابع R^2 است.

---

۲۲)

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^3+y^3} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

جواب: ابتدا پیوستگی تابع f را در نقطه (۰و۰) بررسی می‌کنیم.

شرط اول برقرار است زیرا $(f(0,0)=0)$ در مورد شرط دوم داریم:

$$y=2x \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{9x^3}=\frac{4}{9}$$

$$y=x \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$$

این حد موجود نیست پس فاصله پیوستگی تابع f، $R^2-(0,0)$ است.

۲۳) نشان دهید که تابع f با تعریف $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$ در $(0,0)$ ناپیوسته است.

جواب: شرط اول برقرار است زیرا $f(0,0)=0$ در مورد شرط دوم داریم:

$$y=x \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$y=2x \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{5x^2}=\frac{2}{5}$$

حد موجود نیست و تابع در $(0,0)$ پیوسته نیست.

---

۲۴) فرض کنید که $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y^4}{x^{12}+y^4} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ نشان دهید که تابع f در $(0,0)$ ناپیوسته است.

جواب: شرط اول برقرار است زیرا $f(0,0)=0$ در مورد شرط دوم داریم:

$$y=x^3 \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^{12}+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(x^3)^3}{x^{12}+(x^3)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{12}}{2x^{12}}=\frac{1}{2}$$

$$y=-x^3 \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^{12}+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(-x^3)^3}{x^{12}+(-x^3)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^{12}}{2x^{12}}=\frac{-1}{2}$$

حد موجود نیست پس تابع در $(0,0)$ پیوسته نیست.

تمرین ۴.۷ مشتق جزئی صفحه ۳۴۶

در تمرین‌های ۱ تا ۱۲، مشتقهای جزئی مرتبه اول توابع داده شده را بنویسید.

۱) $f(x,y)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$

جواب:

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{4}{9\sqrt[3]{x}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)=0$$

---

۲) $f(x,y)=9+4x-2y^2$

جواب:
$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(۹-۲x-۳y^{۲})=۲$$
$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(۹+۲x-۳y^{۲})=-۶y$$

---

۳) $g(x,y)=x^{۴}e^{۲y}$

جواب:
$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(x^{۴}e^{۲y})=۴x^{۳}e^{۲y}$$
$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(x^{۴}e^{۲y})=۲x^{۴}e^{۲y}$$

نکته: $(e^{u})'=u'e^{u}$

---

۴) $g(u,v)=\frac{u^{۳}+v^{۳}}{u^{۲}+v^{۲}}$

جواب:
$$g_u(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^{۳}+v^{۳}}{u^{۲}+v^{۲}}\right)=\frac{u^{۴}+۳u^{۲}v^{۲}-۲uv^{۳}}{(u^{۲}-v^{۲})^{۲}}$$
$$g_v(u,v)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u^{۳}+v^{۳}}{u^{۲}+v^{۲}}\right)=\frac{v^{۴}+۳u^{۲}v^{۲}-۲vu^{۳}}{(u^{۲}-v^{۲})^{۲}}$$

---

۵) $f(x,y)=xe^{y}+y\operatorname{Sin}x$

جواب:
$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(xe^{y}+y\operatorname{Sin}x)=e^{y}+y\operatorname{Cos}x$$
$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(xe^{y}+y\operatorname{Sin}x)=xe^{y}+\operatorname{Sin}x$$

---

۶) $f(t,v)=\operatorname{Ln}\sqrt{(t+v)/(t-v)}$

جواب:
$$f_t(t,v)=\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{Ln}\sqrt{(t+v)/(t-v)})=\frac{\dfrac{\dfrac{-۲v}{(t-v)^{۲}}}{۲\sqrt{(t+v)/(t-v)}}}{\sqrt{(t+v)/(t-v)}}=\frac{-v}{t^{۲}-v^{۲}}$$
$$f_v(t,v)=\frac{\partial}{\partial v}(\operatorname{Ln}\sqrt{(t+v)/(t-v)})=\frac{\dfrac{\dfrac{۲t}{(t-v)^{۲}}}{۲\sqrt{(t+v)/(t-v)}}}{\sqrt{(t+v)/(t-v)}}=\frac{t}{t^{۲}-v^{۲}}$$

۷) $f(x,y,z)=xe^{z}-ye^{x}+ze^{-y}$

جواب:

$$f_x(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(xe^{z}-ye^{x}+ze^{-y})=e^{z}-ye^{x}$$

$$f_y(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(xe^{z}-ye^{x}+ze^{-y})=-e^{x}-ze^{-y}$$

$$f_z(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(xe^{z}-ye^{x}+ze^{-y})=xe^{z}+e^{-y}$$

---

۸) $f(r,s,u,v)=r^{۳}tgs+\sqrt{s}\,e^{v^{۲}}$

جواب:

$$f_r(r,s,u,v)=\frac{\partial}{\partial r}(r^{۳}tgs+\sqrt{s}\,e^{v^{۲}})=۳r^{۲}tgs$$

$$f_s(r,s,u,v)=\frac{\partial}{\partial s}(r^{۳}tgs+\sqrt{s}\,e^{v^{۲}})=r^{۳}(۱+tg^{۲}s)+\frac{۱}{۲\sqrt{s}}e^{v^{۲}}$$

$$f_u(r,s,u,v)=\frac{\partial}{\partial u}(r^{۳}tgs+\sqrt{s}\,e^{v^{۲}})=۰$$

$$f_v(r,s,u,v)=\frac{\partial}{\partial v}(r^{۳}tgs+\sqrt{s}\,e^{v^{۲}})=۲v\sqrt{s}\,e^{v^{۲}}$$

---

۹) $f(x,y)=Sin^{-۱}\sqrt{xy}+Sinxy$

جواب:

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(sin^{-۱}\sqrt{xy}+Sinxy)=\frac{\frac{y}{۲\sqrt{xy}}}{\sqrt{۱-xy}}+yCosxy=\frac{y}{(۲\sqrt{xy})\sqrt{۱-xy}}+yCosxy$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(Sin^{-۱}\sqrt{xy}+Sinxy)=\frac{\frac{x}{۲\sqrt{xy}}}{\sqrt{۱-xy}}+xCosxy=\frac{x}{(۲\sqrt{xy})\sqrt{۱-xy}}+xCosxy$$

نکته: $(Sin^{-۱}(u))'=\frac{u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$

---

۱۰) $f(u,v)=tg^{-۱}\frac{u}{v}$

جواب:

$$f_u(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}(tg^{-۱}\frac{u}{v})=\frac{\frac{۱}{v}}{۱+\frac{u^{۲}}{v^{۲}}}=\frac{v}{u^{۲}+v^{۲}}$$

$$f_v(u,v)=\frac{\partial}{\partial v}(tg^{-۱}\frac{u}{v})=\frac{\frac{-u}{v^{۲}}}{۱+\frac{u^{۲}}{v^{۲}}}=\frac{-u}{u^{۲}+v^{۲}}$$

نکته: $(tag^{-۱}u)'=\frac{u'}{۱+u^{۲}}$

۱۱) $z=x^y$

جواب:

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}(x^y)=yx^{y-1}$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}(x^y)=x^y.\mathrm{Ln}(x)$$

نکته: $(a^u)'=u'a^u\mathrm{Ln}(a)$

---

۱۲) $W=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{x+xyz^2}$

جواب:

$$W_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{x+xyz^2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x+xyz^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x+xyz^2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{-1-yz^2}{(x+xyz^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x+xyz^2}\right)^2}}=\frac{-1-yz^2}{(x+xyz^2)^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x+xyz^2}\right)^2}}=\frac{-1-yz^2}{(x+xyz^2)\sqrt{x+xyz^2-1)}}$$

---

۱۳) فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مشتق‌های جزئی مرتبه اول f را در (۰ و ۰) بیابید.

جواب:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=1$$

---

۱۴) فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{x^2+4y^3} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مشتق‌های جزئی مرتبه اول f را در (۰و ۰) بیابید.

جواب:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2(0)}{h^2+0}-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0(h^3)}{0+4h^3}-0}{h}=0$$

۱۵) **فرض کنید** $f(x,y)=\int_1^x P(t)dt+\int_1^y Q(t)dt$ **توابع** fx **و** fy **را تعیین کنید.**

جواب: نکته: اگر داشته باشیم $f(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} U(t)dt$ آن گاه داریم:

$$f'(x)=h'(x).U(h(x))-g'(x)U(g(x))$$

پس $f_x=P(x)$ و مشتق تابع $\int_1^y Q(t)dt$ نسبت به x برابر صفر است زیرا که تابع $\int_1^y Q(t)dt$ تابعی برحسب y است زیرا حدود انتگرال برحسب y است پس $f_y=Q(y)$

---

۱۶) **فرض کنید** $f(x,y)=\int_\pi^{x^2+y^2} \text{Sin}\,t^2dt$ **توابع** f_x **و** f_y **را تعیین کنید.**

جواب:

$$f_x=2x\text{Sin}(x^2+y^2)^2$$

$$f_y=2x\text{Sin}(x^2+y^2)^2$$

در تمرین‌های ۱۷ تا ۲۰، f_{xy} و f_{xy} را تعیین کنید.

۱۷) $f(x,y)=3x^2-\sqrt{2}xy^2+y^5-2$

جواب:

$$f_x(x,y)=6x-\sqrt{2}y^2 \Rightarrow f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)=-2\sqrt{2}y$$

$$f_y(x,y)=-2\sqrt{2}xy+5y^4 \Rightarrow f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y)=-2\sqrt{2}x$$

---

۱۸) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

جواب:

$$f_x(x,y)=\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\Rightarrow$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{(8xy)(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)(2y)(4xy^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-8y^5x+8x^5y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow f_{yx}(x,y)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_x(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{(-8yx)(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)(2x)(-4yx^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{8xy^5-8x^5y}{(x^2+y^2)^4}$$

۱۹) $f(x,y,z)=x^{4}-2x^{2}y\sqrt{z}+3yz^{4}+2$

جواب:
$f_x(x,y,z)=4x^{3}-4xy\sqrt{z} \Rightarrow f_{xy}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(4x^{3}-4xy\sqrt{z})=-4x\sqrt{z}$

$f_y(x,y,z)=-2x^{2}\sqrt{z}+3z^{4} \Rightarrow f_{yz}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(-2x^{2}\sqrt{z}+3z^{4})=-4x\sqrt{z}$

---

۲۰) $f(x,y,z)=z\operatorname{Cos}xy$

جواب:

$f_x(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(z\operatorname{Cos}xy)=-zy\operatorname{Sin}xy \Rightarrow f_{xy}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(-zy\operatorname{Sin}xy)=-z\operatorname{Sin}xy-xyz\operatorname{Cos}xy$

$f_y(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(z\operatorname{Cos}xy)=-xz\operatorname{Sin}xy \Rightarrow f_{yx}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(-xz\operatorname{Sin}xy)=-z\operatorname{Sin}xy-xyz\operatorname{Cos}xy$

---

۲۱) تابع با دو متغیر f همساز است اگر در معادله لاپلاس $\frac{\delta^{2}f}{\delta x^{2}}+\frac{\delta^{2}f}{\delta y^{2}}=0$ صدق می‌کند ثابت کنید که توابع زیر همساز هستند.

الف) $f(x,y)=\operatorname{Ln}\sqrt{x^{2}+y^{2}}$

جواب:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Ln}\sqrt{x^{2}+y^{2}})=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+y^{2}}}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}=\frac{x}{x^{2}+y^{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\right)=\frac{x^{2}+y^{2}-2x^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}=\frac{y^{2}-x^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Ln}\sqrt{x^{2}+y^{2}})=\frac{y}{x^{2}+y^{2}} \Rightarrow \frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^{2}+y^{2}}\right)=\frac{x^{2}-y^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}$$

$$\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}}=\frac{-x^{2}+y^{2}}{(x^{2}+y^{2})}=\frac{x^{2}-y^{2}}{(x^{2}+y^{2})}=0$$

پس تابع f همساز است.

---

۲۲) فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^{2}}{x^{3}+y^{3}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **نشان دهید که f_x و f_y در (۰و۰) وجود دارند در حالی که f در (۰و۰) پیوسته نیست.**

جواب:

$$f_x(\circ,\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(h,\circ)-f(\circ,\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{\frac{\circ}{h^3+\circ}-\circ}{h}=\circ$$

$$f_y(\circ,\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(\circ,h)-f(\circ,\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{\frac{\circ}{\circ+h^3}-\circ}{h}=\circ$$

بنابراین f_x و f_y وجود دارند اگر فرض کنیم $y=mx$ آنگاه

$$y=mx\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\frac{xy^2}{x^3+y^3}=\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\frac{x(mx)^2}{x^3+(mx)^3}=\lim_{x\to\circ}\frac{m^2x^3}{(1+m^3)x^3}=\frac{m^2}{1+m^3}$$

چون مقدار حد به مقدار m وابسته است پس به ازای mهای مختلف مقادیر متفاوتی بدست می‌آید پس تابع در (۰و۰) پیوسته نیست.

---

۲۳) مختصات دکارتی و قطبی توسط معادلات $y=r\sin\theta$ و $x=r\cos\theta$ و $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\theta=tg^{-1}\frac{y}{x}$ در رابطه هستند مشتق‌های جزئی زیر را تعیین کنید.

$$x_r=\frac{\delta x}{\delta r}\quad x_\theta=\frac{\delta x}{\delta\theta}\quad ;\quad y_r=\frac{\delta y}{\delta r}\quad y_\theta=\frac{\delta y}{\delta\theta}$$

$$r_x=\frac{\delta r}{\delta x}\quad r_y=\frac{\delta r}{\delta y}\quad ;\quad \theta_x=\frac{\delta\theta}{\delta x}\quad \theta_y=\frac{\delta\theta}{\delta y}$$

جواب:

$$y_\theta=\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta}=r\cos\theta\ ,\ x_\theta=\frac{\partial x}{\partial\theta}=\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}=-r\sin\theta$$

$$y_r=\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}=\sin\theta\ ,\ x_r=\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}=\cos\theta$$

$$\theta_y=\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial(tag^{-1}\frac{y}{x})}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\theta_x=\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(tag^{-1}\frac{y}{x})=\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$r_y=\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$r_x=\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

۲۴) فرض کنید $w=\operatorname{Cos}(x-y)+\operatorname{Ln}(x+y)$ **نشان دهید** $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$

جواب:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial(\operatorname{Cos}(x-y)+\operatorname{Ln}(x+y))}{\partial x}=-\operatorname{Sin}(x-y)+\frac{1}{x+y}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial(-\operatorname{Sin}(x-y)+\frac{1}{x+y})}{\partial x}=-\operatorname{Cos}(x-y)+\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial(\operatorname{Cos}(x-y)+\operatorname{Ln}(x+y))}{\partial y}=\operatorname{Sin}(x-y)+\frac{1}{x+y}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial(\operatorname{Sin}(x-y)+\frac{1}{x+y})}{\partial y}=-\operatorname{Cos}(x-y)-\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\operatorname{Cos}(x-y)-\frac{-1}{(x+y)^2}-(-\operatorname{Cos}(x-y)-\frac{1}{(x+y)^2})=0$$

---

۲۵) فرض کنید $w=(y-2x)^2-\sqrt{y-2x}$ **نشان دهید که** $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$

جواب:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial((y-2x)^2-\sqrt{y-2x})}{\partial x}=3(y-2x)^2(-2)-\frac{-1}{\sqrt{y-2x}}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-6(y-2x)^2+\frac{1}{\sqrt{y-2x}})=-12(y-2x)(-2)+\frac{1}{\sqrt{(y-2x)^3}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial((y-2x)^3-\sqrt{y-2x})}{\partial y}=3(y-2x)^2-\frac{1}{2\sqrt{y-2x}}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(3(y-2x)^3-\frac{1}{2\sqrt{y-2x}})=6(y-2x)+\frac{1}{4\sqrt{(y-2x)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=24(y-2x)+\frac{1}{\sqrt{(y-2x)^3}}-4(6(y-2x)+\frac{1}{4\sqrt{(y-2x)^3}}=0$$

---

۲۶) فرض کنید $w=e^{x^2}\operatorname{Sin}yz+\operatorname{Ln}(x^2+y^2+z^2)$ **همه مشتق‌های جزئی مرتبه دوم** w **را بیابید.**

جواب:

$$w_x=\frac{\partial w}{\partial x}=2xe^{x^2}\operatorname{Sin}yz+\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow$$

$$w_{x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=2e^{x^2}\text{Sin}yz+4x^2e^{x^2}\text{Sin}yz+\frac{2x^2+2y^2+2z^2-4x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$=2e^{x^2}\text{Sin}yz+4x^2e^{x^2}\text{Sin}yz+\frac{-2x^2+2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$w_y=\frac{\partial w}{\partial y}=ze^{x^2}\text{Cos}yz+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow w_{y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-z^2e^{x^2}\text{Sin}yz+\frac{2x^2-2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$w_z=\frac{\partial w}{\partial z}=ye^{x^2}\text{Cos}yz+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow w_{z^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=-y^2e^{x^2}\text{Sin}yz+\frac{2x^2+2y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

در تمرین‌های ۲۷ تا ۳۰، عبارت $\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}$ را بدست آورید.

۲۷) $f(x,y)=1-x$

جواب:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=-1\ ,\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{(-1)^2+0+1}=\sqrt{2}$$

---

۲۸) $f(x,y)=4-y^2$

جواب:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=-2y\Rightarrow\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{0^2+(-2y)^2+1}=\sqrt{4y^2}$$

---

۲۹) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

جواب:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad ,\quad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}$$

---

۳۰) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

جواب:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\quad ,\quad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}+1}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

در تمرین‌های ۳۱ و ۳۲ نشان دهید که توابع u و V در معادلات کوشی - ریمان $u_x=v_y$ و $u_y=v_x$ صدق می‌کنند.

۳۱) $u=x^۲-y^۲$, $v=۲xy$

جواب:

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=۲x \quad , \quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=-۲y$$

$$V_x=\frac{\partial(۲xy)}{\partial x}=۲y \quad , \quad V_y=\frac{\partial(۲xy)}{\partial y}=۲x$$

$$\Rightarrow U_x=۲x=V_y \quad , \quad U_y=-۲y=-V_x$$

---

۳۲) $U=e^x \operatorname{Cosy}$, $V=e^x \operatorname{Siny}$

جواب:

$$U_x=e^x \operatorname{Cosy} \quad , \quad U_y=-e^x \operatorname{Siny}$$

$$V_x=e^x \operatorname{Siny} \quad , \quad V_y=e^x \operatorname{Cosy}$$

$$\Rightarrow U_x=e^x \operatorname{Cosy}=V_y \quad , \quad U_y=-e^x \operatorname{Siny}=-V_x$$

---

۳۳) تابع f مذکور در مثال ۱۵.۳.۷ را در نظر بگیرید نشان دهید که تابع $f_{xy}(x,۰)$ در (۰و۰) پیوسته نیست. از این مثال نتیجه بگیرید که شرط پیوستگی در قضیهٔ ۱۶.۳.۷ قابل حذف نیست.

جواب:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۳y-xy^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

$$f_x=\frac{(۳x^۲y-y^۳)(x^۲+y^۲)-۲x(x^۳y-xy^۳)}{(x^۲-y^۲)^۲}=\frac{x^۴y+۴x^۲y^۳-y^۵}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$f_{xy}=\frac{(x^۴+۱۲x^۲y^۲-۵y^۴)(x^۲+y^۲)^۲-۴y(x^۲+y^۲)(x^۴y+۴x^۲y^۳-y^۵)}{(x^۲+y^۲)^۴}=\frac{x^۶+۹x^۴y^۲-۹x^۲y^۴-y^۶}{(x^۲+y^۲)^۳}$$

$$f(x,y)=۰ \Rightarrow f_x=۰ \Rightarrow f_{xy}=۰$$

$$f_{xy}=\begin{cases}\dfrac{x^۶+۹x^۴y^۲-۹x^۲y^۴-y^۶}{(x^۲+y^۲)^۳} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

$$f_y=\begin{cases}\dfrac{x^۵-۴x^۳y^۲-xy^۴}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

$$f_{yx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^5}{h^4}=0$$

حال نشان می‌دهیم تابع fxy در نقطه (۰و۰) پیوسته نیست.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6}{(x^2)^3}=1 & y=0 \text{ روی}\\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^6}{(y^2)^3}=-1 & x=0 \text{ روی}\end{cases}$$

پس f_{xy} در نقطه (۰و۰) حد ندارد پس پیوسته نیست و $f_{xy}\neq f_{yx}$

---

۳۴) به ازای عدد ثابت C، معادله به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=C^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ یک معادله موج نامیده می‌شود. نشان دهید که U=SinaxSinbt که در آن a و b ثابت هستند در معادله موج با $C=\frac{a}{b}$ صدق می‌کند.

جواب:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\text{Sin}ax\text{Sin}bt)=a\text{Cos}ax.\text{Sin}bt\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(a\text{Cos}ax\text{Sin}bt)=-a^2\text{Sin}ax.\text{Sin}bt$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\text{Sin}ax.\text{Sin}bt)=b\text{Sin}ax.\text{Cos}bt\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(b\text{Sin}ax.\text{Cos}bt)=-b^2\text{Sin}ax.\text{Sin}bt$$

پس:

$$-a^2\text{Sin}ax\text{Sin}bt=\frac{a^2}{b^2}(-b^2\text{Sin}ax\text{Sin}bt)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\xrightarrow{C=\frac{a}{b}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=C^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

---

۳۵) به ازای مقدار ثابت C معادله به صورت $\frac{\partial u}{\partial t}=C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ یک معادله انتشار (دیفیوژن) نامیده می‌شود. نشان دهید که $U=e^{ax+bt}$ که در آن a و b ثابت هستند در معادله انتشار با $C=\frac{b}{a^2}$ صدق می‌کند.

جواب:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(e^{ax+bt})=be^{ax+bt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(e^{ax+bt})=ae^{ax+bt}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(ae^{ax+bt})=a^2e^{ax+bt}$$

پس:

$$be^{ax+bt}=\frac{a^2}{b^2}be^{ax+bt}=\frac{b}{a^2}(a^2e^{ax+bt})\xrightarrow{C=\frac{b}{a^2}}\frac{\partial u}{\partial t}=C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

---

۳۶) فرض کنید دمای یک صفحهٔ فلزی واقع در صفحه xy توسط $T=10(x^2+y^2)^2$ داده شده است. آهنگ تغییر T در نقطه (۲و۱) را در جهتهای محور x و محور y تعیین کنید.

جواب: نکته: آهنگ تغییر T در محورهای y و x در نقطه (x_0,y_0) به صورت $T_y=\frac{\partial T}{\partial y}(x_0,y_0)$ و $T_x=\frac{\partial T}{\partial x}(x_0,y_0)$ تعریف می‌شود.

$$T_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(10(x^2+y^2)^2)=20(x^2+y^2)(2x)\Rightarrow T_x(1,2)=200$$

$$T_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(10(x^2+y^2)^2)=20(x^2+y^2)(2y)\Rightarrow T_y(1,2)=400$$

---

۳۷) فرض کنید پتانسیل الکتریکی V در نقطه (x,y,z) توسط $V=\frac{100}{(x^2+y^2+z^2)}$ داده شده است آهنگ تغییر V در نقطه $(2,-1,1)$ را در جهتهای محور x و محور y و محور z بیابید.

جواب:

$$T_x(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{100}{(x^2+y^2+z^2)}\right)=\frac{-200x}{(x^2+y^2+z^2)}\Rightarrow T_x(2,-1,1)=\frac{-400}{6}$$

$$T_y(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{100}{(x^2+y^2+z^2)}\right)=\frac{-200y}{(x^2+y^2+z^2)}\Rightarrow T_y(2,-1,1)=\frac{200}{6}$$

$$T_z(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{100}{(x^2+y^2+z^2)}\right)=\frac{-200z}{(x^2+y^2+z^2)}\Rightarrow T_z(2,-1,1)=-\frac{200}{6}$$

---

۳۸) فرض کنید C منحنی اثر سهمیگون $z=9-x^2-y^2$ در صفحه $x=1$ است. معادله خط مماس بر C را در نقطه (۴ و ۲ و ۱) بنویسید.

جواب: نکته: معادلات دکارتی خط مماس بر منحنی $z=f(a,y)$ در نقطه $(a,b,f(a,b))$ یعنی اثر سطح $z=f(x,y)$ بر صفحه $x=a$ عبارتند از:

$$x=a\ ,\ y-b=\frac{z-f(a,b)}{f_y(a,b)}$$

$$z=f(x,y)=9-x^2-y^2$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial(۹-x^۲-y^۲)}{\partial y}=-۲y \Rightarrow f_y(۱,۲)=-۴$$

$$f(۱,۲)=۹-۱-۴=۴$$

پس:

$$\Rightarrow x=۱\ ,\ y-۲=\frac{۹-x^۲-y^۲-۴}{-۴}=\frac{۵-x^۲-y^۲}{-۴}$$

$$\Rightarrow x=۱\ ,\ y-۲=\frac{۵-x^۲-y^۲}{-۴}$$

---

۳۹) فرض کنید C منحنی اثر سطح $z=\sqrt{۳۶-۹x^۲-۴y^۲}$ در صفحه $y=۲$ است معادله خط مماس بر C را در نقطه $(۱,۲,\sqrt{۱۱})$ بنویسید.

جواب: نکته: معادلات دکارتی خط مماس بر منحنی $z=f(x,b)$ در نقطه $(a,b,f(a,b))$ یعنی اثر سطح $z=f(x,y)$ در صفحه $y=b$ عبارت است از:

$$y=b\ ,\ x-a=\frac{z-f(a,b)}{f_x(a,b)}$$

$$z=\sqrt{۳۶-۹x^۲-۴y^۲}$$

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-۹x}{\sqrt{۳۶-۹x^۲-۴y^۲}}\Rightarrow f_x(۱,۲)=\frac{-۹}{\sqrt{۱۱}}$$

$$f(۱,۲)=\sqrt{۱۱}$$

$$\Rightarrow y=۲\ ,\ x-۱=\frac{\sqrt{۳۶-۹x^۲-۴y^۲}-\sqrt{۱۱}}{-\frac{۹}{\sqrt{۱۱}}}$$

---

۴۰) با مشتق‌گیری ضمنی از توابع زیر z_x و z_y را بیابید.

الف) $x^۲+y^۲+z^۲-۴=۰$

جواب:

$$z_x=۲x+۰+۲z.\frac{\partial z}{\partial x}=۰\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z}$$

$$z_y=۰+۲y+۲z.\frac{\partial z}{\partial y}=۰\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{z}$$

ب) $۴x^۲+۹y^۲+۴z^۲-۳۶=۰$

جواب:

$$z_x=۸x+۰+۸z.\frac{\partial z}{\partial x}=۰\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z}$$

$$z_y=۰+۱۸y+۸z.\frac{\partial z}{\partial y}=۰\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-۹y}{۴z}$$

ج) $9x^2+4y^2-36z^2=0$

جواب:

$$z_x=18x+0-72z.\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{4z}$$

$$z_y=0+8y-72z.\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{9z}$$

د) $z-x^2-4y^2=0$

جواب:

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}-2x+0=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=2x$$

$$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}+0-8y=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=8y$$

ح) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$

جواب:

$$z_x=3x^2+0+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy.\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3z^2-3xy)=-3x^2+3yz \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-3x^2+3yz}{3z^2-3xy}$$

$$z_y=0+3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial y}-3xz-3xy.\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(3z^2-3xy)=3xz+3y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3xz-3y^2}{3z^2-3xy}$$

خ) $(x^2+y^2+z^2)^3-27z^2=0$

جواب:

$$z_x=3(x^2+y^2+z^2)^2(2x+2z.\frac{\partial z}{\partial x})-54z.\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(-54z+6z(x^2+y^2+z^2)^2)=-6x(x^2+y^2+z^2)^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-6x(x^2+y^2+z^2)^2}{-54z+6z(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$z_y=3(x^2+y^2+z^2)^2(2x-2z.\frac{\partial z}{\partial y})-54z.\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(6z(x^2+y^2+z^2)^2-54z)=-6y(x^2+y^2+z^2)^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-6y(x^2+y^2+z^2)^2}{6z(x^2+y^2+z^2)^2-54z}$$

تمرین ۴.۷ نمو تابع دو متغیره صفحه ۳۵۷

در تمرین‌های ۱ تا ۱۲، dw را پیدا کنید.

۱) $w=3x^2+x^3$

جواب: نکته: اگر f تابعی از دو متغیر y و x باشد و در (x,y) مشتق‌پذیر باشد آنگاه $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ و df را دیفرانسیل کل f می‌نامیم.

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}.dx=(6x+3x^2)dx$$

---

۲) $w=x^3-5xy+y^3$

جواب:
$$\frac{\partial w}{\partial x}=3x^2-5y \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y}=-5x+3y^2$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=(3x^2-5y)dx+(-5x+3y^2)dy$$

---

۳) $w=2x^4+x^2y-4$

جواب:
$$\frac{\partial w}{\partial x}=8x^3+2xy \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y}=x^2$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=(8x^3+2xy)dx+(x^2).dy$$

---

۴) $w=3\text{Sin}x-5\text{Cos}y$

جواب:
$$\frac{\partial w}{\partial x}=3\text{Cos}x \quad \frac{\partial w}{\partial y}=5\text{Sin}y$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=(3\text{Cos}x)dx+(5\text{Sin}y)dy$$

---

۵) $w=x\text{Cos}y-y^2\text{Cos}\,2x$

جواب:
$$\frac{\partial w}{\partial x}=\text{Cos}y+2y\text{Sin}\,2x \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y}=-x\text{Sin}-2y\text{Cos}\,2x$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=(\text{Cos}y+2y\text{Sin}\,2x)dx+(-x\text{Sin}y-2y\text{Cos}\,2x)dy$$

---

۶) $w=\text{Cos}^2xy-\text{Sin}^2xy$

جواب:
$$\frac{\partial w}{\partial x}=2\text{Cos}xy(-y\text{Sin}xy)-2\text{Sin}xy(y\text{Cos}xy)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=2\text{Cos}xy(-x\text{Sin}xy)-2\text{Sin}xy(x\text{Cos}xy)$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=(-4y\text{Sin}xy\text{Cos}xy)dx+(-4x\text{Sin}xy\text{Cos}xy)dy$$

$$=(-2\text{Sin}\,2xy)dx+(-2x\text{Sin}\,2xy)dy$$

۷) $w=y^{3}-Lnxy^{2}$

جواب:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{-y^{2}}{xy^{2}}=\frac{-1}{x} \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=3y^{2}-\frac{2xy}{xy^{2}}=3y^{2}-\frac{2}{y}$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=(\frac{-1}{x})dx+(3y^{2}-\frac{2}{y})dy$$

---

۸) $w=x^{2}e^{xy}+\frac{1}{y^{2}}$

جواب:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2xe^{xy}+yx^{2}e^{xy}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=x^{3}.e^{xy}-\frac{2}{y^{3}}$$

$$\Rightarrow dw=(2xe^{xy}+yx^{2}e^{xy})dx+(x^{3}.e^{xy}-\frac{2}{y^{3}})dy$$

---

۹) $w=\frac{xyz}{x+y+z}$

جواب:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{(yz)(x+y+z)-xyz}{(x+y+z)^{2}}=\frac{y^{2}z+yz^{2}}{(x+y+z)^{2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{(xz)(x+y+z)-xyz}{(x+y+z)^{2}}=\frac{x^{2}z+xz^{2}}{(x+y+z)^{2}}$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=\frac{y^{2}z+yz^{2}}{(x+y+z)^{2}}dx+\frac{x^{2}z+xz^{2}}{(x+y+z)^{2}}dy$$

---

۱۰) $w=x^{2}z+4yt^{2}-xz^{2}t$

جواب: نکته: f تابعی از چهار متغیر x و y و z و t است بنابراین:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}.dx+\frac{\partial f}{\partial y}.dy+\frac{\partial f}{\partial z}.dz+\frac{\partial f}{\partial t}.dt$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2xz-z^{2}t \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y}=4t^{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=x^{2}-2xzt \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial t}=12t^{2}y-xz^{2}$$

$$\Rightarrow dw=(2xz-z^{2}t)dx+(4t^{3})dy+(x^{2}-2xzt)dz+(12t^{2}y-xz^{2})dt$$

---

۱۱) $w=x^{2}y^{2}z^{2}+e^{-2x}$

جواب:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2xy^{2}z^{2}-2e^{-2x}$$

$\frac{\partial w}{\partial y}=(۲x^۲yz^۲)$, $\frac{\partial w}{\partial z}=۲x^۲y^۲z$

$\Rightarrow dw=(۲xy^۲z^۲-۲e^{-۲x})dx+(۲x^۲yz^۲)dy+(۲x^۲y^۲z)dz$

---

۱۲) $w=x^۲y^۳zt^{-۱}v^۵$

جواب: $\frac{\partial w}{\partial x}=۲xy^۳zt^{-۱}v^۵$, $\frac{\partial w}{\partial y}=۳x^۲y^۲zt^{-۱}v^۵$

$\frac{\partial w}{\partial z}=x^۲y^۳t^{-۱}v^۵$, $\frac{\partial w}{\partial t}=-x^۲y^۳zt^{-۲}v^۵$

$\frac{\partial w}{\partial v}=۵x^۲y^۳zt^{-۱}v^۴$

$\Rightarrow dw=(۲xy^۳zt^{-۱}v^۵)dx+(۳x^۲y^۲zt^{-۱}v^۵)dy+$

$(x^۲y^۳t^{-۱}v^۵)dz+(-x^۲yzt^{-۲}v^۵)dt+(۵x^۲y^۳zt^{-۱}v^۴)dv$

---

۱۳) فرض کنید $z=x^۲+۲y^۳$ مقدار dz را به ازای $x=۱$، $y=۲$، $dx=-۰/۳$ و $dy=۰/۲$ بیابید.

جواب: $\frac{\partial z}{\partial x}=۲x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(۱,۲)=۲$

$\frac{\partial z}{\partial y}=۶y^۲ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(۱,۲)=۲۴$

$dz=(\frac{\partial z}{\partial x})dx+(\frac{\partial z}{\partial y})dy=(۲)(-۰/۳)+(۲۴)(۰/۲)=۴/۲$

---

۱۴) فرض کنید $z=x^۲+۲xy+y^۲$ مقدار dz را به ازای $x=-۲$، $y=۱$، $dx=۰/۳$، $dy=۰/۲$ بیابید.

جواب: $\frac{\partial z}{\partial x}=۲x+۲y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(-۲,۱)=-۲$

$\frac{\partial z}{\partial y}=۲x+۲y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(-۲,۱)=-۲$

$\Rightarrow dz=(\frac{\partial z}{\partial x})dx+(\frac{\partial z}{\partial y})dy=(-۲)(۰/۳)+(-۲)(۰/۲)=-۱$

---

۱۵) با استفاده از دیفرانسیل، مقدار تقریبی نمو $f(x,y)=x^۲-۳x^۳y^۲+۴x-۲y^۳+۶$ را وقتی (x,y) از (-۲,۳) به (-۲/۰۲,۳/۰۱) تغییر می‌کند تعیین کنید.

جواب: نکته: فرض می‌کنیم $w=f(x,y,z)$ و f_x, f_y, f_z در همسایگی (x,y,z) پیوسته باشند و

فرض کنیم $\Delta w=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x,y,z)$ آنگاه نمو w عبارتست از:

$$\Delta w=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z$$

که در آن

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\varepsilon_3=0 \qquad \lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\varepsilon_2=0 \qquad \lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\varepsilon_1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-9x^2y^2+4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-6x^3y-6y^2 \quad , \quad \Delta x=-0/02 \quad \Delta y=0/01$$

$$\Delta w=(2x-9x^2y^2+4).(-0/02)+(-6x^3y-6y^2)(0/01)+\varepsilon_1(-0/02)+\varepsilon_2(0/01)$$

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_1=0$, $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_2=0$, $(x,y)=(-2,3)$ پس:

$$\Delta w=(6/48)+0/9=7/38$$

---

۱۶) با استفاده از دیفرانسیل، مقدار تقریبی نمو $\Delta w=x^2z^3-3yz^2+x^{-4}+3z\sqrt{y}$ را وقتی (x,y,z) از (۳ و ۲ و ۱) به (۱/۹۶ و ۲/۹۷ و ۱/۰۲) تغییر می‌کند بیابید.

جواب:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xz^3-4x^{-5} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-3z^2+\frac{3z}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-3x^2z^2-6yz+3\sqrt{y}$$

$$\Delta x=0/02 \quad , \quad \Delta y=0/97 \quad , \quad \Delta z=-1/04$$

$$\Delta w=(2xz^3-4x^{-5})(0/02)+(-3z^2+\frac{3z}{2\sqrt{y}})(0/97)+$$

$$(3x^2z^2-6yz+3\sqrt{y})(-1/04)+\varepsilon_1(0/02)+\varepsilon_2(0/97)+\varepsilon_3(-1/04)$$

از آنجایی که

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\varepsilon_3=0 \ , \ \lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\varepsilon_2=0 \ , \ \lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\varepsilon_1=0$$

و $(x,y,z)=(1,2,3)$ پس:

$$\Delta w=(54-4)(0/02)+(-27+\frac{9}{2\sqrt{2}})(0/97)+(27-36+3\sqrt{2})(-1/04)=-17/15$$

---

۱۷) با استفاده از دیفرانسیل، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{36/04}\ \sqrt[3]{26/98}$ را بیابید.

جواب: با استفاده از فرمول:

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}.\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}.\Delta y=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$f(x,y)=\sqrt[۳]{x}\sqrt{y}$$

$$(\Delta x,\Delta y)=(-۰/۰۲,۰/۰۴)\quad,\quad(x,y)=(۲۷,۳۶)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt[۳]{x}}{۲\sqrt{y}}$$

حال با جایگذاری در فرمول بالا داریم:

$$\left(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}.\sqrt{y}\right).(-۰/۰۲)+\left(\frac{\sqrt[۳]{x}}{۲\sqrt{y}}\right).(۰/۰۴)=\left(\sqrt[۳]{x-۰/۰۲}\right)\left(\sqrt{y+۰/۰۴}\right)$$

$$-\sqrt[۳]{x}\sqrt{y}=\left(\frac{۶}{۲۷}\right)(-۰/۰۲)+\left(\frac{۳}{۱۲}\right)(۰/۰۴)=\left(\sqrt[۳]{۲۶/۹۸}\right)\left(\sqrt{۳۶/۰۴}\right)$$

$$-(۳).(۶)\Rightarrow\left(\sqrt[۳]{۲۶/۹۸}\right)\left(\sqrt{۳۶/۰۴}\right)=\frac{-۰/۱۲}{۲۷}+\frac{۱}{۱۰۰}+۱۸=۱۸/۰۰۵$$

---

۱۸) با استفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی عدد $\frac{(۳۲/۰۱)^{\frac{۲}{۵}}}{(۱/۹۶)^{۴}}$ را پیدا کنید.

جواب:

$$z=f(x,y)=\frac{(x)^{\frac{۲}{۵}}}{y^{۴}}\qquad(\Delta x,\Delta y)=(۰/۰۱,-۰/۰۴)$$

$$(x,y)=(۳۲,۲)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۲x^{-\frac{۳}{۵}}}{۵y^{۴}}\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-۴x^{\frac{۲}{۵}}}{y^{۳}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}.\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}.\Delta y=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$\left(\frac{۲x^{-\frac{۳}{۵}}}{۵y^{۴}}\right)(۰/۰۱)+\left(\frac{-۴x^{\frac{۲}{۵}}}{y^{۳}}\right)(-۰/۰۴)=\frac{(x+۰/۰۱)^{\frac{۲}{۵}}}{(y-۰/۰۴)^{۴}}-\frac{x^{\frac{۲}{۵}}}{y^{۴}}$$

$$\left(\frac{(۲)(۲^{۵})^{-\frac{۳}{۵}}}{(۶)(۵)}\right)(۰/۰۰۱)+\left(\frac{۴(۲^{۵})^{\frac{۲}{۵}}}{۸}\right)(۰/۰۴)=\frac{(۳۲/۰۱)^{\frac{۲}{۵}}}{(۱/۹۶)^{۴}}-\frac{(۲^{۵})^{\frac{۲}{۵}}}{۲^{۴}}$$

$$\Rightarrow\frac{۰/۰۱}{۲^{۶}(۵)}+۲(۰/۰۴)+\frac{۱}{۲^{۲}}=\frac{(۳۲/۰)^{\frac{۲}{۵}}}{(۱/۹۶)^{۴}}\Rightarrow\frac{(۳۲/۰۱)^{\frac{۲}{۵}}}{(۱/۹۶)^{۴}}=۰/۳۳۰۰۳۱۲۵$$

۱۹) شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه به ترتیب برابرند با $r=۴$ سانتی‌متر و $h=۱۵$ سانتی‌متر. مقدار تقریبی تغییر حجم استوانه را وقتی r به ۶/۲ و h به ۱۵/۳ تغییر می‌کند تعیین کنید.

جواب: نکته: حجم استوانه برابر است با $V=\pi r^۲ h$

$$\frac{\partial v}{\partial r}.\Delta r+\frac{\partial v}{\partial h}.\Delta h=f(r+\Delta r,h+\Delta h)-f(r,h)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=۲\pi rh \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial h}=\pi r^۲$$

$$(\Delta r,\Delta h)=(۰/۲,۰/۳) \qquad f(r,h)=\pi r^۳ h$$

پس:

$$(۲\pi rh)(۰/۲)+(\pi r^۲)(۰/۳)=f(۶/۲,۱۵/۳)-f(۶,۱۵)$$

با جایگذاری $(r,h)=(۶,۱۵)$، $(\Delta r,\Delta h)=(۰/۲,۰/۳)$ داریم:

$$f(۶/۲,۱۵/۳)-f(۶,۱۵)=(۲\pi(۶)(۱۵)(۰/۲)+$$
$$\pi(۶)^۲(۰/۳)=۳۶\pi+۱۰/۸\pi=۴۶/۸\pi=۱۴۶/۵۲$$

---

۲۰) اگر ابعاد یک مکعب مستطیل از $x=۹$ و $y=۶$ و $z=۴$ به $x=۹/۰۲$ و $y=۵/۹۷$ و $z=۴/۰۱$ تغییر کند مقدار تقریبی تغییر حجم آن چقدر است؟

جواب:

$$f(x,y,z)=xyz$$

$$(\frac{\partial f}{\partial x}).\Delta x+(\frac{\partial f}{\partial y}).\Delta y+(\frac{\partial f}{\partial z}).\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yz \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=xz \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}=xy$$

پس:

$$(yz).\Delta x+(xz).\Delta y+(xy).\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)$$

با جایگذاری $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=(۰/۰۲,-۰/۰۳,۰/۰۱),(x,y,z)=(۹,۶,۴)$

داریم:

$$(۲۴)(۰/۰۲)+(۳۶).(-۰/۰۳)+(۵۴)(۰/۰۱)=-۰/۰۶$$

تمرین ۵.۷ قاعده زنجیره‌ای صفحه ۳۶۴

در تمرین‌های ۱ تا ۴، $\frac{dz}{dt}$ را با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای پیدا کنید.

۱) $z=۲x^۲-۴y^۳ \quad , \quad x=\sqrt{t} \quad , \quad y=e^{۳t^۲}$

جواب: نکته: فرض کنیم $z=f(x,y)$ و $x=g_۱(t)$ و $y=g_۲(t)$ در این صورت

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

پس:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=۴x \quad , \quad \frac{dx}{dt}=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-۱۲y^۲ \quad , \quad \frac{dy}{dt}=۶te^{۳t^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt}=(۴x).(\frac{۱}{۲\sqrt{t}})+(-۱۲y^۲)(۶te^{۳t^۲})$$

---

۲) $y=t^{\frac{۲}{۳}} \quad , \quad x=e^{۲t} \quad , \quad z=Ln(۳x^۲+y^۳)$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۶x}{۳x^۲+y^۳} \quad , \quad \frac{dx}{dt}=۲e^{۲t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۳y^۲}{۳x^۲+y^۳} \quad , \quad \frac{dy}{dt}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{t}}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(\frac{۶x}{۳x^۲+y^۳}).(۲e^{۲t})+(\frac{۳y^۲}{۳x^۲+y^۳})(\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{t}})$$

---

۳) $y=۵ \quad , \quad x=۲t^۳ \quad , \quad z=Sinx+Cosx^۲y$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=Cosx-۲xySinx^۲y \quad , \quad \frac{dx}{dt}=۶t^۲$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-x^۲Sinx^۲y \quad , \quad \frac{dy}{dt}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(Cosx-۲xySinx^۲y)(۶t^۲)$$

$$+(-x^۲Sinx^۲y)(۰)=Cosx-۲xySinx^۲y$$

---

۴) $y=۲-t^۲ \quad , \quad x=Lnt \quad , \quad z=\sqrt{۳x-y}$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-y}} \quad , \quad \frac{dx}{dt}=\frac{۱}{t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳x-y}} \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-۲t$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-y}})(\frac{۱}{t})+(\frac{-۱}{۲\sqrt{۳x-y}})(-۲t)$$

در تمرینهای ۵ تا ۸، $\frac{\partial z}{\partial u}$ و $\frac{\partial z}{\partial v}$ را با استفاده از قاعده زنجیره‌ای بیابید.

۵) $z=\frac{x}{y^۲}$, $x=u+۲v$, $y=۱-u+v$

جواب: نکته: فرض کنید $z=f(x,y)$, $x=g_۱(u,v)$, $y=g_۲(u,v)$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

پس:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۱}{y^۲} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-۲x}{y^۳} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u}=۱$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=۲ \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u}=-۱ \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v}=۱$$

پس:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=(\frac{۱}{y^۲}).(۱)+(\frac{-۲x}{y^۳}).(-۱)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=(\frac{۱}{y^۲}).(۲)+(\frac{-۲x}{y^۳}).(۱)$$

---

۶) $z=\frac{۱}{xy}-\frac{x}{y}$, $x=۲u^۲$, $y=uv^۲$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{(xy)^۲}-\frac{۱}{y} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{(xy)^۲}+\frac{x}{y^۲}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=۴u \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v}=۰$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=v^۲ \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v}=۲uv$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=(\frac{-y}{(xy)^۲}-\frac{۱}{y}).۴u+(\frac{-x}{(xy)^۲}+\frac{x}{y^۲}).v^۲=(-\frac{۱}{x^۲y}-\frac{۱}{y}).۴u+(-\frac{۱}{xy^۲}+\frac{x}{y^۲}).v^۲$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=(\frac{-y}{(xy)^۲}-\frac{۱}{y})(۰)+(\frac{-x}{(xy)^۲}+\frac{x}{y^۲}).(۲uv)=(\frac{-۱}{xy^۲}+\frac{x}{y^۲})۲uv$$

---

۷) $z=۱۶-x^۲-y^۲$, $x=uSinu$, $y=vCosu$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-۲x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-۲y \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u}=Sinv \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v}=uCosv$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-vSinu \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v}=Cosu$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=(-۲x)(Sinv)+(-۲y)(-vSinu)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=(-۲x)(uCosv)+(-۲y)(Cosu)$$

۸) $z=e^{x^۲y}$ ، $x=\sqrt{uv}$ ، $y=\frac{۱}{u}$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=۲xye^{x^۲y} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^۲e^{x^۲y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{v}{۲\sqrt{uv}} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{۲\sqrt{uv}} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{-۱}{u^۲} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v}=۰$$

پس:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}=۲xye^{x^۲y}.(\frac{v}{۲\sqrt{uv}})+(x^۲e^{x^۲y})(\frac{-۱}{u^۲})$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}=(۲xye^{x^۲y}).(\frac{u}{۲\sqrt{uv}})+(x^۲e^{x^۲y})(۰)=\frac{((۲xy)e^{x^۲y})u}{۲\sqrt{uv}}$$

در تمرین‌های ۹ تا ۱۲ $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ را با استفاده از قاعده زنجیره‌ای پیدا کنید.

۹) $z=\mathrm{Sin}\,۲u\mathrm{Cos}\,۳v$ ، $u=(r+s)^۲$ ، $v=(r-s)^۲$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=۲\mathrm{Cos}\,۲u.\mathrm{Cos}\,۳v \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v}=-۳\mathrm{Sin}\,۲u\mathrm{Sin}\,۳v$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=۲(r+s) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial s}=۲(r+s)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=۲(r-s) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial s}=-۲(r-s)$$

پس:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial r}=(۲\mathrm{Cos}\,۲u.\mathrm{Cos}\,۳v)(۲(r+s))+(-۳\mathrm{Sin}\,۲u.\mathrm{Sin}\,۳v).(۲(r-s))$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial s}=(۲\mathrm{Cos}\,۲u.\mathrm{Cos}\,۳v)(۲(r+s))+(-۳\mathrm{Sin}\,۲u.\mathrm{Sin}\,۳v).(-۲(r-s))$$

---

۱۰) $z=\mathrm{Ln}u+\mathrm{Ln}v$ ، $u=۴^{rs}$ ، $v=۴^{\frac{r}{s}}$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{۱}{u} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{۱}{v} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial r}=s.۴^{rs}.\mathrm{Ln}(۴)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=r.۴^{r.s}\mathrm{Ln}(۴) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r}=\frac{۱}{s}۴^{\frac{r}{۴}}.\mathrm{Ln}(۴)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{-r}{s^۲}.۴^{\frac{r}{s}}.\mathrm{Ln}(۴)$$

پس:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial r}=(\frac{۱}{u}).(s.۴^{rs}.\mathrm{Ln}(۴))+(\frac{۱}{v}).(\frac{۱}{۴}.۴^{\frac{r}{s}}.\mathrm{Ln}۴)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial s}=(\frac{۱}{u}).(s.۴^{rs}.\mathrm{Ln}(۴))+(\frac{۱}{v}).(\frac{-r}{s^۲}.۴^{\frac{r}{s}}.\mathrm{Ln}(۴))$$

۱۱) $z=ue^{v}-ve^{-u}$, $u=Lnr$, $v=sLnr$

جواب: $\frac{\partial z}{\partial u}=e^{v}+ve^{-u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=ue^{v}-e^{-u}$

$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{۱}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial s}=۰$, $\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{s}{r}$, $\frac{\partial v}{\partial s}=Lnr$

پس:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=(e^{v}+ve^{u})\cdot\frac{۱}{r}+(ue^{v}-e^{-u})(\frac{s}{r})$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}=(e^{v}+ve^{u})\cdot(۰)+(ue^{v}-e^{-u})\cdot Lnr$$

---

۱۲) $z=۲^{u-v}$, $u=rCoss$, $v=rSins$

جواب: $\frac{\partial z}{\partial u}=۲^{u-v}.Ln(۲)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=-۲^{u-v}.(Ln(۲))$

$\frac{\partial u}{\partial r}=Coss$, $\frac{\partial r}{\partial s}=-rSins$

$\frac{\partial v}{\partial r}=Sins$, $\frac{\partial v}{\partial s}=rCoss$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=(۲^{u-r}.Ln(۲)).Cos(s)+(-۲^{u-v}.Ln(۲)).Sins$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}=(۲^{u-r}.Ln(۲)).(-rSins)+(-۲^{u-v}.Ln(۲)).(rCoss)$$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۱۶ $\frac{dw}{dt}$ را با استفاده از قاعده زنجیره‌ای پیدا کنید.

۱۳) $w=\frac{x}{y}-\frac{z}{x}$, $x=Sint$, $y=Cost$, $z=tant$

جواب: $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{۱}{y}+\frac{z}{x^{۲}}$, $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{-x}{y^{۲}}$, $\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{۱}{x}$

$\frac{dx}{dt}=Cost$, $\frac{dy}{dt}=-Sint$, $\frac{dz}{dt}=۱+tan^{۲}t$

$$\Rightarrow\frac{dw}{dt}=(\frac{۱}{y}+\frac{z}{x^{۲}})Cost+(\frac{-x}{y^{۲}})(-Sint)+(-\frac{۱}{x})(۱+tan^{۲}t)$$

---

۱۴) $w=\frac{z}{xy^{۲}}-۳$, $x=\frac{۳}{t^{۲}}$, $y=-t$, $z=t^{\frac{۱}{۳}}$

جواب: $\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{zy^{۲}}{x^{۲}y^{۴}}=\frac{-z}{x^{۲}y^{۲}}$, $\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{۲xyz}{x^{۲}y^{۴}}=\frac{-۲z}{xy^{۳}}$

$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{۱}{xy^{۲}}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{-۶}{t^{۳}}$

$$\frac{dy}{dt}=-۱ \quad , \quad \frac{dz}{dt}=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{t^{۲}}}$$

$$\frac{dw}{dt}=(\frac{-z}{x^{۲}y^{۲}})(-\frac{۶}{t^{۳}})+(\frac{-۲z}{xy^{۳}})(-۱)+(\frac{۱}{xy^{۲}})(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{t^{۲}}})=\frac{۶z}{x^{۲}y^{۲}t^{۳}}+\frac{۲z}{xy^{۳}}+\frac{۱}{۳xy^{۲}\sqrt[۳]{t^{۲}}}$$

---

۱۵) $w=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} \quad , \quad x=e^{۲t} \quad , \quad y=e^{-۲t} \quad , \quad z=۲t^{۲}$

جواب:
$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}} \quad , \quad \frac{dx}{dt}=۲e^{۲t}$$

$$\frac{dy}{dt}=-۲e^{-۲t} \quad , \quad \frac{dz}{dt}=۴t$$

پس:
$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}.\frac{dz}{dt}=\frac{۲xe^{۲t}}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}+\frac{-۲y^{-۲t}}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}+\frac{۴zt}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}$$

---

۱۶) $w=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}-\sqrt{y^{۳}-z^{۳}} \quad , \quad x=t^{۳} \quad , \quad y=t^{۲} \quad , \quad z=-t^{۳}$

جواب:
$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}-\frac{۳y^{۲}}{۲\sqrt{y^{۳}-z^{۳}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{۳z^{۲}}{۲\sqrt{y^{۳}-z^{۳}}} \quad , \quad \frac{dx}{dt}=۳t^{۲}$$

$$\frac{dy}{dt}=۲t \quad , \quad \frac{dz}{dt}=-۳t^{۲}$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dt}=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}(۳t^{۲})+(\frac{y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}-\frac{۳y^{۲}}{۲\sqrt{y^{۳}-z^{۳}}})(۲t)+\frac{۳z^{۲}}{۲\sqrt{y^{۳}-z^{۳}}}(-۳t^{۲})$$

در تمرین‌های ۱۷ تا ۲۰، $\frac{dy}{dx}$ را تعیین کنید.

۱۷) $x^{۳}+۴x^{۲}y-۳xy^{۲}+y^{۳}-۵=۰$

جواب: نکته: اگر تابع $y=f(x)$ بطور ضمنی توسط معادله $F(x,y)=۰$ داده شده باشد داریم:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

پس:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{۳x^{۲}+۸xy-۳y^{۲}}{۴x^{۲}-۶xy+۳y^{۲}}$$

---

۱۸) $۲x^{\frac{۲}{۳}}-۳y^{\frac{۲}{۳}}=۲$

جواب:

$$F(x,y)=۲x^{\frac{۲}{۳}}-۳y^{\frac{۲}{۳}}-۲=۰$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}}{-۲y^{\frac{-۱}{۳}}}=-\frac{۲y^{\frac{۱}{۳}}}{۳x^{\frac{۱}{۳}}}$$

---

۱۹) $x^{۲}+y^{۲}+\mathrm{Sin}xy^{۲}-۶=۰$

جواب:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{۲x+y^{۲}\mathrm{Cos}xy^{۲}}{۲y+۲xy\mathrm{Cos}xy^{۲}}$$

---

۲۰) $e^{\frac{x}{y}}+\mathrm{Ln}\frac{y}{x}+۱۰$

جواب:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{\frac{۱}{y}e^{\frac{x}{y}}+\frac{\frac{-y}{x^{۲}}}{\frac{y}{x}}}{\frac{-x}{y^{۲}}e^{\frac{x}{y}}+\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{y}{x}}}=-\frac{\frac{۱}{y}e^{\frac{x}{y}}-\frac{۱}{x}}{-\frac{x}{y^{۲}}e^{\frac{x}{y}}+\frac{۱}{y}}$$

در تمرین‌های ۲۱ تا ۲۴ فرض کنید $z=f(x,y)$ در معادله داده شده صدق می‌کند عبارتهای $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید.

۲۱) $۲xz^{۳}-۳yz^{۲}+x^{۲}y^{۲}+۴z=۰$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{۲z^{۳}+۲xy^{۲}}{۶xz^{۲}-۶yz+۴}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{-۳z^{۲}+۲x^{۲}y}{۶xz^{۲}-۶yz+۴}$$

---

۲۲) $xz^{۲}+۲x^{۲}y-۴y^{۲}z+۳y-۲=۰$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{z^{۲}+۴xy}{۲xz-۴y^{۲}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{2x^2-8yz+3}{2xz-4y^2}$$

---

۲۳) $x^2z^2-2xyz+z^3y^2=3$

جواب:

$$F(x,y,z)=x^2z^2-2xyz+z^3y^2-3=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{2xz^2-2yz}{2x^2z-2xy+3y^2z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{-2xz+2yz^3}{2x^2z-2xy+3y^2z^2}$$

---

۲۴) $\frac{1}{z}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{2}$

جواب:

$$F(x,y,z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{\frac{-1}{(x+y+z)^2}}{-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{(y+z)^2}-\frac{1}{(x+y+z)^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{-\frac{1}{(y+z)^2}-\frac{1}{(x+y+z)^2}}{-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{(y+z)^2}-\frac{1}{(x+y+z)^2}}$$

---

۲۵) **فرض کنید** $z=f(x-y)$ **نشان دهید که** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial y}$

جواب: $x-y=u$ فرض می‌کنیم و طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}(1)=\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}(-1)=-\frac{\partial f}{\partial u}$$

پس:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial y}$$

---

۲۶) **فرض کنید** $w=f(x-y,y-z,z-x)$ **نشان دهید که** $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$

جواب: فرض می‌کنیم $x-y=r$ و $y-z=s$ و $z-x=t$ طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}(1)+\frac{\partial f}{\partial s}(0)+\frac{\partial f}{\partial t}(1)=\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}(-1)+\frac{\partial f}{\partial s}(1)+\frac{\partial f}{\partial t}(0)=\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial r}(0)+\frac{\partial f}{\partial s}(-1)+\frac{\partial f}{\partial t}(1)=\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial s}$$

پس:

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

---

۲۷) فرض کنید $z=f(y+ax)+g(y-ax)$ **نشان دهید که** z **در معادله موج** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ **صدق می‌کند.**

جواب: فرض می‌کنیم $y+ax=u$ و $y-ax=v$ چون تابع f و g توابعی یک متغیره‌اند طبق قاعده مشتق‌گیری از توابع مرکب $[f(g(x))]'=g'(x)+f'(g(x))$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}f'(u)+\frac{\partial v}{\partial x}g'(v)=af'(u)-ag'(v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}f'(u)+\frac{\partial v}{\partial y}g'(v)=f'(u)-g'(v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a\frac{\partial u}{\partial x}f''(u)-a\frac{\partial u}{\partial x}g''(v)=a^2f''(u)+a^2g''(v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial y}f''(u)+\frac{\partial v}{\partial y}g''(v)=f''(u)+g''(v)$$

پس:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

---

۲۸) فرض کنید $z=f(x,y)$، $x=r\cos\theta$ **و** $y=r\sin\theta$

الف) نشان دهید که:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r}$$

جواب: طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta \qquad (I)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta) \qquad (II)$$

با حل دستگاه دو معادله (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} r\sin\theta\dfrac{\partial z}{\partial r}=r\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial x}+r\sin^{2}\theta\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial \theta}=-r\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial x}+r\cos^{2}\theta\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial z}{\partial \theta}=r\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

با قرار دادن این مقدار در معادله (II) داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\cos^{2}\theta\frac{\partial z}{\partial \theta} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(r\sin\theta)=r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}+(\cos^{2}\theta-1)\frac{\partial z}{\partial \theta} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

ب) نشان دهید که: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^{2}+\frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^{2}$

جواب: با استفاده از قسمت (الف) داریم:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^{2}\cos^{2}\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^{2}\frac{\sin^{2}\theta}{r^{2}}-2\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}+$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^{2}\sin^{2}\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^{2}\frac{\cos^{2}\theta}{r^{2}}+2\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^{2}\left(\frac{1}{r^{2}}\right)$$

پس:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^{2}+\frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^{2}$$

---

۲۹) نشان دهید که $z=(x-4t)^{2}$ **در معادله** $\frac{\partial^{2}z}{\partial t^{2}}=16\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}$ **صدق می‌کند.**

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=2(x-4t)(-4)=-8x+32t \quad , \quad \frac{\partial^{2}z}{\partial t^{2}}=32$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-4t)=2x-8t \quad , \quad \frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}=2$$

پس:

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial t^{2}}=16\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}$$

۳۰) نشان دهید که $y=A\cos 3x \sin 3x$ در معادلهٔ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ صدق می‌کند.

جواب:
$$\frac{\partial y}{\partial t}=-3A\sin 3t\sin 3x \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-9A\cos 3t\sin 3x$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}=3A\cos 3t\cos 3x \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}=-9A\cos 3t\sin 3x$$

پس:
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

تمرین ۶.۷ مشتق سوئی و گرادیان صفحه ۳۷۵

در تمرین‌های ۱ تا ۱۰ با استفاده از گرادیان مشتق سوئی f در نقطه P را در جهت بردار $\vec{a}$ بیابید.

۱) $f(x,y)=3x-5y \quad , \quad p(1,2) \quad , \quad \vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

جواب:
$$D_a f(1,2)=\nabla f(1,2).\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$
$$\nabla f=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}=3\vec{i}-5\vec{j} \quad , \quad \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$
$$D_a f(1,2)=(3,-5).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{-2}{\sqrt{2}}$$

---

۲) $f(x,y)=y^2+x\sin x^2 y \quad , \quad P(1,\frac{\pi}{2}) \quad , \quad \vec{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\vec{j}$

جواب:
$$\nabla f=(\sin x^2y+2x^2y\cos x^2y)\vec{i}+(2y+x^3\cos x^2y)\vec{j}$$
$$\nabla f(1,\frac{\pi}{2})=\vec{i}+\pi\vec{j} \qquad |\vec{a}|=1$$
$$D_a f(1,\frac{\pi}{2})=\nabla f(1,\frac{\pi}{2}),\vec{a}=(1,\pi).(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}})=\frac{1-\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$$

---

۳) $f(x,y)=\frac{xy-1}{x^2+y^2} \quad , \quad P(-1,1) \quad , \quad \vec{a}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

جواب:
$$\nabla f=\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y+2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}+\frac{x(x^2+y^2)-2xy^2+2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}=$$

$$\frac{-x^{۲}y+y^{۲}+۲x}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}\vec{i}+\frac{x^{۳}-xy^{۲}+۲y}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}\vec{j} \Rightarrow \nabla f(-۱,۱)=\frac{-۱}{۲}\vec{i}+\frac{۱}{۲}\vec{j} \quad , \quad |\vec{a}|=۱$$

$$\Rightarrow D_a f(-۱,۱)=(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}).(\frac{۱}{۲},-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۱}{۴}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{-(۱+\sqrt{۳})}{۴}$$

---

۴) $f(x,y)=x^{۲}Lny$, $P(۵,۱)$, $\vec{a}=\vec{i}+۲\vec{j}$

جواب:

$$\nabla f=۲xLny\vec{i}+\frac{x^{۲}}{y}\vec{j} \Rightarrow \nabla f(۵,۱)=۰\vec{i}+۲۵\vec{j}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{۵}$$

$$D_a f(۵,۱)=\nabla f(۵,۱).\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(۰,۵).(\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}})=\frac{۵۰}{\sqrt{۵}}$$

---

۵) $f(x,y,z)=۲x^{۲}-y^{۲}-۴z^{۲}$, $P(۱,۱,۱)$, $\vec{a}=-۲\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

جواب:

$$\nabla f=۴x\vec{i}-۲y\vec{j}-۸z\vec{k} \Rightarrow \nabla f(۱,۱,۱)=۴\vec{i}-۲\vec{j}-۸\vec{k}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{۶}$$

$$D_a f(۱,۱,۱)=\nabla f(۱,۱,۱).\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(۴,-۲,-۸).(\frac{-۲}{\sqrt{۶}},\frac{-۱}{\sqrt{۶}},\frac{-۱}{\sqrt{۶}})=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$$

---

۶) $f(x,y,z)=z-\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$, $P(۳,-۴,۷)$, $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

جواب:

$$\nabla f=\frac{-x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\vec{i}+\frac{-y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\vec{j}+\vec{k} \Rightarrow$$

$$\nabla f(۳,-۴,۷)=\frac{-۳}{۵}\vec{i}+\frac{۴}{۵}\vec{j}+\vec{k} \quad , \quad |\vec{a}|=\sqrt{۳}$$

$$D_a f(۳,-۴,۷)=\nabla f(۳,-۴,۷).\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(-\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵},۱).(\frac{-۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{-۱}{\sqrt{۳}})=\frac{۲}{۵\sqrt{۳}}$$

---

۷) $f(x,y,z)=e^{x}(Siny+Sinz)$, $P(۱,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$, $\vec{a}=-۲\vec{i}-۲\vec{j}-۲\vec{k}$

جواب:

$$\nabla f=e^{x}(Siny+Sinz)\vec{i}+e^{x}Cosy\vec{j}+e^{x}Cosz\vec{k} \Rightarrow$$

$$\nabla f(۱,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})=۲e\vec{i}+۰\vec{j}+۰\vec{k} \quad , \quad |\vec{a}|=\sqrt{۱۲}$$

$$D_a f(۱,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})=(۲e,۰,۰)(\frac{-۲}{\sqrt{۱۲}},\frac{-۲}{\sqrt{۱۲}},\frac{-۲}{\sqrt{۱۲}})=\frac{-۴e}{\sqrt{۱۲}}$$

---

۸) $f(x,y,z)=(x+y)(y+z)$, $P(۵,۷,۱)$, $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

جواب: $\nabla f=(y+z)\vec{i}+(x+z+۲y)\vec{j}+(x+y)\vec{k} \Rightarrow$

$\nabla f(۵,۷,۱)=۸\vec{i}+۲۰\vec{j}+۱۲\vec{k} \quad , \quad |\vec{a}|=\sqrt{۳}$

$D_a f(۵,۷,۱)=\nabla f(۵,۷,۱).\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(۸,۲۰,۱۲).(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{-۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}})=۰$

---

۹) $f(x,y,z)=\sqrt{xy}\,Sinz \quad , \quad P(۴,۹,\frac{\pi}{۴}) \quad , \quad \vec{a}=-\vec{i}+۳\vec{j}+۲\vec{k}$

جواب: $\nabla f \Rightarrow \frac{ySinz}{۲\sqrt{xy}}\vec{i}+\frac{xSinz}{۲\sqrt{xy}}\vec{j}+\sqrt{xy}\,Coszk\vec{} \Rightarrow$

$\nabla f(۴,۹,\frac{\pi}{۴})=\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}\vec{i}+\frac{\sqrt{۲}}{۶}\vec{j}+۳\sqrt{۲}\vec{k} \quad , \quad |\vec{a}|=\sqrt{۱۴}$

$D_a f(۴,۹,\frac{\pi}{۳})=\nabla f(۴,۹,\frac{\pi}{۳}).\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\frac{۳\sqrt{۲}}{۸},\frac{\sqrt{۲}}{۶},۳\sqrt{۲})(\frac{-۱}{\sqrt{۱۴}},\frac{۳}{\sqrt{۱۴}},\frac{۲}{\sqrt{۱۴}})=\frac{۴۹\sqrt{۲}}{۸\sqrt{۱۴}}$

---

۱۰) $f(x,y,z)=-x^۲y^۳e^{z^۲} \quad , \quad P(۱,۱,-۱) \quad , \quad a=۲\vec{j}-\vec{k}$

جواب: $\nabla f=-۲xy^۳e^{z^۲}\vec{i}-۳x^۲y^۲e^{z^۲}\vec{j}-۲x^۲y^۳ze^{z^۲}\vec{k} \Rightarrow$

$\nabla f(۱,۱,-۱)=-۲e\vec{i}-۳e\vec{j}+۲e\vec{k} \quad , \quad |\vec{a}|=\sqrt{۵}$

$D_a f(۱,۱,-۱)=\nabla f(۱,۱,-۱).\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(-۲e,-۳e,۲e).(۰,\frac{۲}{\sqrt{۵}},\frac{-۱}{\sqrt{۵}})=-\frac{۸e}{\sqrt{۵}}$

در تمرین‌های ۱۱ تا ۱۶ تعیین کنید که آهنگ تغییر f در نقطه P در چه جهتی ماکسیمم است.

۱۱) $f(x,y)=e^x(Cosy+Siny) \quad , \quad P(۰,۰)$

جواب: نکته: آهنگ تغییر f در جهت بردار گرادیان f ماکسیمم است و این مقدار ماکسیمم برابر است با اندازه بردار گرادیان.

$\nabla f=e^x(Cosy+Siny)\vec{i}+e^x(-Siny+Cosy)\vec{j} \Rightarrow \nabla f(۰,۰)=\vec{i}+\vec{j}$

بنابراین آهنگ تغییر $f(x,y)$ در نقطه P در جهت (۱و۱) ماکسیمم است.

---

۱۲) $f(x,y)=e^x+e^y \quad , \quad P(۱,۱)$

جواب:

$$\nabla f=e^x\vec{i}+e^y\vec{j} \Rightarrow \nabla f(1,1)=e\vec{i}+e\vec{j}$$

بنابراین آهنگ تغییر f در نقطه P در جهت (e,e) ماکسیمم است.

---

۱۳) $P(-1,1)$, $f(x,y)=x^2+y^2$

جواب:

$$\nabla f=2x\vec{i}+2y\vec{i} \Rightarrow \nabla f(-1,1)=-2\vec{i}+2\vec{j}$$

بنابراین آهنگ تغییر f در نقطه P در جهت $(-2,2)$ ماکسیمم است.

---

۱۴) $P(1,-1,1)$, $f(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2$

جواب:

$$\nabla f=2x\vec{i}+4y\vec{j}-2z\vec{k} \Rightarrow \nabla f(1,-1,1)=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$$

بنابراین آهنگ تغییر f در نقطه p در جهت $(2,-4,-2)$ ماکسیمم است.

---

۱۵) $P(1,1,-1)$, $f(x,y,z)=e^x+e^y+e^{2z}$

جواب:

$$\nabla f=e^x\vec{i}+e^y\vec{j}+2e^{2z}\vec{k} \Rightarrow \nabla f(1,1,-1)=e\vec{i}+e\vec{j}+2e^{-2}$$

بنابراین آهنگ تغییر f در نقطه P در جهت $(e,e,2e^{-2})$ ماکسیمم است.

---

۱۶) $P(1,\frac{1}{2},\pi)$, $f(x,y,z)=\text{Cos}xyz$

جواب:

$$\nabla f=-yz\text{Sin}xyz\vec{i}-xz\text{Sin}xyz\vec{j}-xy\text{Sin}xyz\vec{k} \Rightarrow \nabla f(1,\frac{1}{2},\pi)=\frac{-\pi}{2}\vec{i}-\pi\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}$$

بنابراین آهنگ تغییر f در تغییر P در جهت $(\frac{-\pi}{2},-1,\frac{-1}{2})$ ماکسیمم است.

در تمرین‌های ۱۷ تا ۲۰ فرض کنید $U=f(x,y)$ و $V=g(x,y)$ مشتق‌پذیر هستند و اتحادهای داده شده را ثابت کنید.

۱۷) $\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V$

جواب:

$$\nabla(U+V)=\nabla(f(x,y)+g(x,y))=(f_x+g_x)\vec{i}+(f_y+g_y)\vec{j}=$$

$$(f_x\vec{i}+f_y\vec{j})+(g_x\vec{i}+g_y\vec{j})=\nabla f(x,y)+\nabla g(xy)=\nabla U+\nabla V$$

---

۱۸) $\nabla(UV)=U(\nabla V)+(\nabla U)V$

جواب:

$$\nabla(UV)=\nabla f(x,y)g(x,y))=(f_x g+fg_x)\vec{i}+(f_y g+fg_y)\vec{j}$$

$$=(f_x g\vec{i}+f_y g\vec{j})+(fg_x\vec{i}+fg_y\vec{j})=(f_x\vec{i}+f_y\vec{j})g+$$
$$f(g_x\vec{i}+g_y\vec{j})=\nabla(f(x,y)g(x,y))+f(x,y)\nabla(g(x,y))=(\nabla U)V+U\nabla(V)$$

---

۱۹) $\nabla(\frac{U}{V})=\frac{V\nabla U-U\nabla V}{V^{۲}}$, $V\neq ۰$

جواب:
$$\nabla(\frac{U}{V})=\nabla(\frac{f(x,y)}{g(x,y)})=(\frac{f_x g-g_x f}{g^{۲}})\vec{i}+(\frac{f_y g-g_y f}{g^{۲}})\vec{j}=$$
$$(\frac{f_x g\vec{i}+f_y g\vec{j}}{g^{۲}})+(\frac{-g_x f\vec{i}-g_y f\vec{j}}{g^{۲}})=\frac{(f_x\vec{i}+f_y\vec{j})g}{g^{۲}}-\frac{(g_x\vec{i}+g_y\vec{j})f}{g^{۲}}$$
$$=\frac{\nabla(f(x,y))g(x,y))-\nabla(g(x,y))f(x,y)}{(g(x,y))^{۲}}=\frac{(\nabla U)V-(\nabla V)U}{V^{۲}}\ ,\ V\neq ۰$$

---

۲۰) $\nabla U^n=nU^{n-۱}\nabla U$

جواب:
$$\nabla U^n=\nabla((f(x,y))^n)=\left[n(f(x,y)^{n-۱}f_x(x,y)\right]\vec{i}+$$
$$\left[n(f(x,y))^{n-۱}f_y(x,y)\right]\vec{j}=n(f(x,y))^{n-۱}\left[f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}\right]=nU^{n-۱}\nabla U$$

تمرین ۷.۷ صفحهٔ مماس صفحه ۳۸۳

در تمرین‌های ۱ و ۲ یک بردار قائم بر منحنی داده شده در نقطه P بیابید. فرض کنید که این منحنی‌ها هموراه هستند.

۱) $\text{Sin}\pi xy=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $P(\frac{۱}{۶},۲)$

جواب: $F(x,y)=\text{Sin}\pi xy-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و می‌دانیم F هموراه مشتق‌پذیر است پس:

$$\nabla F=\pi y\text{Cos}\pi xy\,\vec{i}+\pi x\text{Cos}\pi xy\,\vec{j}\ \Rightarrow$$
$$\nabla F(\frac{۱}{۶},۲)=۲\pi(\frac{۱}{۲})\vec{i}+(\frac{\pi}{۶})(\frac{۱}{۲})\vec{j}=(\pi,\frac{\pi}{۱۲})$$

بنابراین بردار $(\pi,\frac{\pi}{۱۲})$ عمود بر منحنی در نقطه $(\frac{۱}{۶},۲)$

---

۲) $e^{x^{۲}y}=۲$, $P(۱,\text{Ln}۲)$

جواب: $F(x,y)=e^{x^{۲}y}=-۲$ و واضح است $\nabla F(۱,\text{Ln}۲)$ بر منحنی داده شده عمود است پس:

$\nabla F=2xye^{x^2y}\vec{i}+x^2e^{x^2y}\vec{j}$

$\Rightarrow \nabla F(1,\mathrm{Ln}2)=2\mathrm{Ln}2e^{\mathrm{Ln}2}\vec{i}+e^{\mathrm{Ln}2}\vec{j}=(4\mathrm{Ln}2,2)$

در تمرین‌های ۳ و ۴ یک بردار قائم بر سطح داده شده در نقطه P را بنویسید.

۳) $f(x,y)=3x^2+4y^2$, $P(-2,1,16)$

جواب: $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ و $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ را بدست می‌آوریم:

$F(x,y,z)=3x^2+4y^2-z \Rightarrow \nabla F=6x\vec{i}+8y\vec{j}-k \Rightarrow \nabla F(-2,1,16)=(-12,8,-1)$

بنابراین $(-12,8,-1)$ بر سطح داده شده در نقطه P عمود است.

---

۴) $f(x,y)=y^2e^x$, $P(0,-3,9)$

جواب:

$F(x,y,z)=y^2e^x-z \Rightarrow \nabla F=y^2e^x\vec{i}+2ye^x\vec{j}-k$

$\Rightarrow \nabla F(0,-3,9)=9\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$

بنابراین $(9,-6,-1)$ بردار عمود بر سطح داده شده می‌باشد.

در تمرین‌های ۵ تا ۸ معادله صفحه مماس بر سطح داده شده در نقطه P را بنویسید.

۵) $f(x,y)=xy-x+y-5$, $P(0,2,7)$

جواب:

$f_x=y-1 \Rightarrow f_x(0,2)=1$

$f_y=x+1 \Rightarrow f_y(0,2)=1$, $f(0,2)=-3$

بنابراین معادله صفحه مماس عبارتست از:

$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

معادله صفحه مماس بر سطح در نقطه P:

$\Rightarrow z=-3+(x-0)+(y-2) \Rightarrow z=x+y-5$

---

۶) $f(x,y)=\mathrm{Sin}\pi xy$, $P(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$

جواب:

$f_x=\pi y\mathrm{Cos}\pi xy \Rightarrow f_x(-\sqrt{2},\sqrt{2})=\sqrt{2}\pi$

$f_y=\pi x\mathrm{Cos}\pi xy \Rightarrow f_y(-\sqrt{2},\sqrt{2})=-\sqrt{2}\pi$

$f(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})=۰$

بنابراین معادله صفحه مماس بر سطح داده شده در نقطه P عبارتست از:

$z=f(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})+f_x(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲})+f_y(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})(y-\sqrt{۲})$

$\Rightarrow z=\sqrt{۲}\pi(x+\sqrt{۲})-\sqrt{۲}\pi(y-\sqrt{۲}) \Rightarrow z=\sqrt{۲}\pi(x-y)+۴\pi$

---

۷) $f(x,y)=Ln(x^{۲}+y^{۲})$, $P(-۱,۰,۰)$

جواب:

$f_x=\frac{۲x}{x^{۲}+y^{۲}} \Rightarrow f_x(-۱,۰)=-۲$

$f_y=\frac{۲y}{x^{۲}+y^{۲}} \Rightarrow f_y(-۱,۰)=۰$

$f(-۱,۰)=۰$

بنابراین معادله صفحه مماس بر سطح داده شده در نقطه P عبارتست از:

$z=f(-۱,۰)+f_x(-۱,۰)(x+۱)+f_y(-۱,۰)(y-۰) \Rightarrow z=-۲(x+۱) \Rightarrow z=-۲x-۲$

---

۸) $f(x,y)=(۲+x-y^{۲})$, $P(۳,-۱,۳۶)$

جواب:

$f_x=۱ \Rightarrow f_x(۳,-۱)=۱$, $f_y=-۲y \Rightarrow f_y(۳,-۱)=۲$

$f(۳,-۱)=۴$

بنابراین معادله صفحه مماس بر سطح داده شده در نقطه P عبارتست از:

$z=f(۳,-۱)+f_x(۳,-۱)(x-۳)+f_y(۳,-۱)(y+۱)$

$\Rightarrow z=۴+(x-۳)+۲(y+۱) \Rightarrow z=x+۲y+۳$

---

۹) $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$, $P(\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{\sqrt{۲}})$

جواب: ابتدا بردار نرمال صفحه مطلوب یعنی ∇F را در نقطه P بدست می‌آوریم:

$F(x,y)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۱$ پس:

$\nabla F=۲x\vec{i}+۲y\vec{j}+۲z\vec{k} \Rightarrow \nabla F(\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{\sqrt{۲}})=(۱,-۱,\frac{-۲}{\sqrt{۲}})$

بنابراین با استفاده از این بردار نرمال و نقطه P معادله صفحه مماس عبارتست از:

$F_x(x-\frac{۱}{۲})+F_y(y+\frac{۱}{۲})+F_z(z+\frac{۱}{\sqrt{۲}})=۰ \Rightarrow$

$$1(x-\frac{1}{2})-1(y+\frac{1}{2})-\frac{2}{\sqrt{2}}(z+\frac{1}{\sqrt{2}})=0 \Rightarrow x-y-\frac{2z}{\sqrt{2}}=2$$

---

۱۰) $P(1,-2,-1)$, $xyz=2$

جواب: $F(x,y,z)=xyz-2$ پس:

$F_x=yz \Rightarrow F_x(1,-2,-1)=2$

$F_y=xz \Rightarrow F_y(1,-2,-1)=-1$

$F_z=xy \Rightarrow F_z(1,-2,-1)=-2$

بنابراین معادله صفحه مماس بر سطح داده شده در نقطه P عبارتست از:

$$F_x(0,-1,0)(x-0)+F_y(0,-1,0)(y+1)+F_z(0,-1,0)(z-0)=0$$

$$\Rightarrow -y-1=0 \Rightarrow y=-1$$

---

۱۱) معادله خط عمود بر سطح $4x^2-y^2+3z^2=10$ را در نقطه $P(2,-3,1)$ تعیین کنید.

جواب: $F(x,y)=4x^2-y^2+3z^2-10$، می‌دانیم $\nabla F(P)$ بردار مطلوب است پس:

$$\nabla F=8x\vec{i}-2y\vec{j}+6z\vec{k} \Rightarrow \nabla F(2,-3,1)=(16,6,6)$$

بنابراین معادله خط عبارتست از:

$$\frac{x-2}{16}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-1}{6}$$

---

۱۲) معادله خط عمود بر سطح $z=2e^{-x}\operatorname{Cos}y$ را در نقطه $P(0,\frac{\pi}{3},1)$ تعیین کنید.

جواب:

$$\nabla F=-2e^{-x}\operatorname{Cos}y\,\vec{i}-2e^{-x}\operatorname{Sin}y\,\vec{j}-\vec{k}$$

$$\Rightarrow \nabla F(0,\frac{\pi}{3},1)=(-1,-\sqrt{3},-1)$$

با استفاده از بردار فوق و نقطه P معادله خط عمود بر سطح را می‌نویسیم:

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-\frac{\pi}{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow -x=\frac{\frac{\pi}{3}-y}{\sqrt{3}}=1-z$$

---

۱۳) نقاطی از سطح $x^2-2y^2-4z^2=16$ را بیابید که صفحه مماس در آنها موازی با صفحه $3x-2y-4z=5$ باشد.

جواب: نکته: بردارهای نرمال دو صفحه موازی، با یکدیگر موازیند.

$F(x,y,z)=x^2-2y^2-4z^2-16$ قرار می‌دهیم. بردار نرمال صفحه مماس بر F در نقطه $P(P_1,P_2,P_3)$ برابر است با $\nabla F(P_1,P_2,P_3)$ پس:

$$\nabla F=2x\vec{i}-4y\vec{j}-8z\vec{k} \Rightarrow \nabla F(P_1,P_2,P_3)=(2P_1,-4P_2,-8P_3)$$

$\nabla F(P_1,P_2,P_3)$ با بردار نرمال $3x-2y+4z=5$ یعنی $(3,-2,4)$ موای است یعنی:

$$\begin{cases}2P_1=3\alpha\\-4P_2=-2\alpha\\-8P_3=4\alpha\end{cases}\overset{\alpha\in R}{\rightarrow}\begin{cases}P_1=\frac{3}{2}\alpha\\P_2=\frac{1}{2}\alpha\\P_3=-\frac{1}{2}\alpha\end{cases}\Rightarrow P(P_1,P_2,P_3)=(\frac{3}{2}\alpha,\frac{1}{2}\alpha,\frac{-1}{2}\alpha)$$

به ازای $\alpha\in R$های مختلف نقاط مورد نظر بدست می‌آید.

---

۱۴) نقاطی از سطح $z=9-4x^2-y^2$ را بیابید که صفحه مماس در آنها موازی با صفحه $z=4y$ باشد.

جواب:
$$\nabla F=-8x\vec{i}-2y\vec{j}-\vec{k} \Rightarrow \nabla F(P_1,P_2,P_3)=(-8P_1,-2P_2,-P_3)$$

حال بردار نرمال $z=4y$ بردار $(0,4,-1)$ می‌باشد.

$$\begin{cases}-8P_1=0\alpha\\-2P_2=4\alpha\\-P_3=-\alpha\end{cases}\overset{\alpha\in R}{\rightarrow}\begin{cases}P_1=0\\P_2=-2\alpha\\P_3=\alpha\end{cases}\Rightarrow P(P_1,P_2,P_3)=(0,-2\alpha,\alpha)$$

به ازای $\alpha\in R$های مختلف نقاط مورد نظر بدست می‌آید.

---

۱۵) نشان دهید دو سطح $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $10z=25+x^2+y^2$ در نقطه (۵و۴و۳) یک صفحه مماس مشترک دارند.

جواب: نکته: دو سطح $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ در نقطه P دارای صفحه مماس مشترک‌اند هرگاه بردارهای عمود بر دو سطح در نقطه P با هم موازی باشند یعنی $\nabla F(P)=K\nabla G(P)$ پس:

$F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-z$ و $G(x,y,z)=25+x^2+y^2-10z$ پس:

$$\nabla F=\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\vec{j}-\vec{k} \Rightarrow \nabla F(۳,۴,۵)=(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵},-۱)$$

$$\nabla G=۲x\vec{i}+۲y\vec{j}-۱۰\vec{k} \Rightarrow \nabla G(۳,۴,۵)=(۶,۸,-۱۰)$$

بنابراین به ازای $k=\frac{۱}{۱۰}$ تساوی $\nabla F(۳,۴,۵)=K\nabla G(۳,۴,۵)$ برقرار است پس دو صفحه F و G در (۵و۴و۳) دارای صفحه مماس مشترک‌اند.

---

۱۶) نشان دهید که دو سطح $z=xy-۲$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ در نقطه $(۱,۱,-۱)$ یک صفحه مماس مشترک دارند.

جواب: $F(x,y,z)=xy-۲-z$ و $G(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲-۳$

$$\nabla F=(y,x,-۱) \Rightarrow \nabla F(۱,۱,-۱)=(۱,۱,-۱)$$

$$\nabla G=(۲x,۲y,۲z) \Rightarrow \nabla G(۱,۱,-۱)=(۲,۲,-۲)$$

بنابراین به ازای $k=\frac{۱}{۲}$ تساوی $\nabla F(۱,۱,-۱)=KG(۱,۱,-۱)$ برقرار است.

---

۱۷) نشان دهید که هر خط نرمال بر کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ از مرکز آن می‌گذرد.

جواب: هر خط عمود بر کره را خط نرمال بر کره می‌گویند از طرفی بردار مطلوب برای تشکیل معادله خط نرمال بر کره، بردار گریان کره می‌باشد. $F(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲-۱$ پس:

$$\nabla F=۲x\vec{i}+۲y\vec{j}+۲z\vec{k}$$

فرض کنید $(x_۰,y_۰,z_۰)$ نقطه‌ای دلخواه روی کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ باشد با این نقطه و بردار $\nabla F(x_۰,y_۰,z_۰)=(۲x_۰,۲y_۰,۲z_۰)$ معادله خط نرمال را می‌نویسیم:

$$\frac{x-x_۰}{۲x_۰}=\frac{y-y_۰}{۲y_۰}=\frac{z-z_۰}{۲z_۰}$$: معادله خط

پس نشان می‌دهیم که این خط از مرکز کره (۰ و ۰ و ۰) می‌گذرد.

$$\frac{۰-x_۰}{۲x_۰}=\frac{۰-y_۰}{۲y_۰}=\frac{۰-z_۰}{۲z_۰} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

که یک رابطه همواره صحیح است پس نقطه (۰ و ۰ و ۰) در معادله صدق می‌کند بنابراین خط از مبدأ می‌گذرد.

۱۸) نشان دهید که هر خط نرمال بر مخروط دو پارچه $z^۲=x^۲+y^۲$ محور z را قطع می‌کند.

جواب: باید نشان دهیم که هر خط عمود بر مخروط، محور z را قطع کند پس:

$F(x,y,z)=x^۲+y^۲-z^۲$

$\nabla F=۲x\vec{i}+۲y\vec{j}-۲z\vec{k}$

فرض می‌کنیم $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ روی خط باشد با استفاده از این نقطه و بردار $\nabla F(x_\circ,y_\circ,z_\circ)=(۲x_\circ,۲y_\circ,-۲z_\circ)$ معادله خر نرمال را می‌نویسیم:

معادله خط: $\frac{x-x_\circ}{۲x_\circ}=\frac{y-y_\circ}{۲y_\circ}=\frac{z-z_\circ}{-۲z_\circ}$

می‌دانیم که معادله محور zها با بردار نرمال (k و ۰ و ۰) برابر است با $x=y=\circ$ فقط کافی است نشان دهیم خط $x=y=\circ$ و خط نرمال متقاطع‌اند. پس نشان می‌دهیم که دستگاه حاصل از این دو خط دارای جواب است یعنی دو خط متقاطع‌اند:

$$\begin{cases} x=y=\circ \\ \frac{x-x_\circ}{۲x_\circ}=\frac{y-y_\circ}{۲y_\circ}=\frac{z-z_\circ}{-۲z_\circ} \end{cases} \Rightarrow x=y=\circ \Rightarrow \frac{\circ-x_\circ}{۲x_\circ}=\frac{\circ-y_\circ}{۲y_\circ}=\frac{z-z_\circ}{-۲z_\circ} \Rightarrow$$

$$\frac{z-z_\circ}{-۲z_\circ}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow z=۲z_\circ$$

پس $(\circ,\circ,۲z_\circ)$ نقطه تقاطع است.

تمرین ۸.۷ ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره صفحه ۳۹۴

در تمرین‌های ۱ تا ۱۲ تعیین کنید که هر تابع در چه نقطه‌ای دارای ماکسیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه زین اسبی است.

۱) $F(x,y)=x^۲+۲y^۲-۶x+۸y-۱$

جواب: ابتدا نقاط بحرانی f را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x=۲x-۶=\circ \\ f_y=۴y+۸=\circ \end{cases} \Rightarrow x=۳\ ,\ y=-۲$$

پس $(۳,-۲)$ تنها نقطه بحرانی f می‌باشد پس Δ را تشکیل می‌دهیم:

$f_{xy}=\circ \quad , \quad f_{xx}=۲ \quad , \quad f_{yy}=۴$

$\Delta=f_{xx}(۳,-۲)f_{yy}(۳,-۲)-f_{xy}^{۲}(۳,-۲)=۸$

بنابراین $\Delta>۰$ و $A>۰$

مطابق آزمون مشتق دوم نقطه $(۳,-۲)$ یک نقطه مینیمم نسبی است.

---

۲) $f(x,y)=x^۲+۶xy+۱۲y^۲-۶x+۱۰y-۲$

جواب:

$$\begin{cases} f_x=۲x+۶y-۶=۰ \\ f_y=۶x+۲۴y+۱۰=۰ \end{cases}$$

حال با این حل دستگاه نقاط بحرانی بدست می‌آید.

$$\Rightarrow x=۱۷\quad ,\ y=\frac{-۱۴}{۳}$$

پس $(۱۷,\frac{-۱۴}{۳})$ نقطه بحراین f می‌باشد.

$$f_{xy}=۶\quad ,\quad f_{xx}=۲\quad ,\quad f_{yy}=۲۴$$

$$\Rightarrow \Delta=f_{xx}(۱۷,\frac{-۱۴}{۳})f_{yy}(۱۷,\frac{-۱۴}{۳})-\left[f_{xy}(۱۷,\frac{-۱۴}{۳})\right]^۲=$$

$$۲(۲۴)-۳۶=۱۲>۰$$

بنابراین $\Delta>۰$ و $A>۰$

مطابق با آزمون مشتق دوم $(۱۷,\frac{-۱۴}{۳})$ یک مینیمم نسبی است.

---

۳) $g(x,y)=x^۲+۲xy+۲y^۲-۶x+۱۰y-۵$

جواب: با حل دستگاه نقاط بحرانی تابع g را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} g_x=۲x+۲y-۶=۰ \\ g_y=۲x+۴y+۱۰=۰ \end{cases}\Rightarrow y=-۸\ ,\ x=۱۱$$

پس $(۱۱,-۸)$ نقطه بحرانی g است.

$$g_{xx}=۲\quad ,\quad g_{yy}=۴\quad ,\quad g_{xy}=۲$$

$$\Rightarrow \Delta=g_{xx}(۱۱,-۸)\,g_{yy}(۱۱,-۸)-\left[g_{xy}(۱۱,-۸)\right]^۲=۴>۰$$

بنابراین $\Delta>۰$ و $A>۰$

مطابق با آزمون مشتق دوم نقطه $(۱۱,-۸)$ یک مینیمم نسبی است.

---

۴) $g(x,y)=x^۲y-۲xy+۲y^۲-۱۵y$

جواب: با حل دستگاه نقاط بحرانی تابع g را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} g_x=۲xy-۲y=۰ \\ g_y=x^۲-۲x+۴y-۱۵=۰ \end{cases}\Rightarrow ۲xy=۲y\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1)\ y\neq 0 \Rightarrow x=1 \rightarrow y=4 \\ 2)\ y=0 \Rightarrow x^2-2x-15=0 \rightarrow x=5\ ,\ x=-3 \end{cases}$$

پس نقاط بحرانی g عبارتست از (۴ و ۱) و (۰ و ۵) و (۰ و ۳−) پس:

$$g_{xx}=2y \rightarrow g_{xx}(1,4)=8\ ,\ g_{xx}(5,0)=0\ ,\ g_{xx}(-3,0)=0$$

$$g_{yy}=4 \rightarrow g_{yy}(1,4)=g_{yy}(5,0)=g_{yy}(-3,0)=4$$

$$g_{xy}=2x-2 \rightarrow g_{xy}(1,4)=0\ ,\ g_{xy}(5,0)=8\ ,\ g_{xy}(-3,0)=-8$$

با توجه به $\Delta=AC-B^2$ داریم:

(۴ و ۱) یک نقطه Min نسبی است. $(1,4):\Delta=8(4)-0=32>0\ ,\ A>0$

(۰ و ۵) یک نقطه زین اسبی است. $(5,0):\Delta=(0)(4)-8^2=-64<0$

(۰ و ۳-) یک نقطه زین اسبی است. $(-3,0):\Delta=(0)(4)-(-8)^2=-64<0$

---

۵) $f(x,y)=3x^2-3xy^2+y^3+3y^2$

جواب: با حل دستگاه نقاط بحرانی تابع f را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x=6x-3y^2=0 \\ f_y=-6xy+3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow 6x=3y^2$$

با جایگذاری رابطه $6x=3y^2$ در معادله دوم داریم:

$$-3y^3+3y^2+6y=0 \Rightarrow y(-3y^2+3y+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow x=0 \\ y=-1 \rightarrow x=\frac{1}{2} \\ y=2 \rightarrow x=2 \end{cases}$$

بنابراین (۰ و ۰) و (-1 و $\frac{1}{2}$) و (۲ و ۲) نقاط بحرانی تابع f می‌باشند پس:

$$f_{xx}=6\quad ,\quad f_{yy}=-6x+6y+6 \Rightarrow \begin{cases} f_{yy}(0,0)=6 \\ f_{yy}(\frac{1}{2},-1)=-3 \\ f_{yy}(2,2)=6 \end{cases}$$

$$f_{xy}=-6y \Rightarrow \begin{cases} f_{xy}(0,0)=0 \\ f_{xy}(\frac{1}{2},-1)=6 \\ f_{xy}(2,2)=-12 \end{cases}$$

(۰ و ۰) یک نقطه Min نسبی است. $(0,0): \Delta = (6)(6)-0=36>0\ ,\ A>0$

(-۱ و $\frac{1}{2}$) یک نقطه زین اسبی است. $(\frac{1}{2},-1): \Delta = 6(-3)-6^2=-54<0$

(۲ و ۲) یک نقطه زین اسبی است. $(2,2): \Delta = 6(6)-(-12)^2=-108<0$

---

۶) $f(x,y)=\frac{x}{x+y}$

جواب: با حل دستگاه نقاط بحرانی تابع f را بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} f_x=\dfrac{y}{(x+y)^2}=0 \\ f_y=\dfrac{-x}{(x+y)^2}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=0$$

نقطه (۰ و ۰) جواب دستگاه فوق است اما چون این نقطه در دامنه f موجود نمی‌باشد پس تابع اکسترمم نسبی ندارد.

---

۷) $f(x,y)=4xy+2x^2y-xy^2$

جواب: با حل دستگاه نقاط بحرانی تابع f را بدست می‌آوریم:

$$f_x=4y+4xy-y^2=0 \Rightarrow y(4+4x-y)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=4+4x \Rightarrow \begin{cases} x=0\ \ y=-\frac{2}{3} \\ x=\frac{2}{3}\ \ y=\frac{4}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$f_y=4x+2x^2-2xy=0$$

بنابراین (۰ و ۰) و (۰ و ۲−) و (۴ و ۰) و ($\frac{4}{3}$ و $\frac{-2}{3}$) نقاط بحرانی تابع f هستند پس:

$$f_{xx}=4y \to f_{xx}(0,0)=0\ ,\ f_{xx}(-2,0)=0\ ,\ f_{xx}(0,4)=16\ ,\ f_{xx}(\tfrac{-2}{3},\tfrac{4}{3})=\tfrac{16}{3}$$

$$f_{yy}=-2x \to f_{yy}(0,0)=0\ ,\ f_{yy}(-2,0)=4\ ,\ f_{yy}(0,4)=16\ ,\ f_{yy}(\tfrac{-2}{3},\tfrac{4}{3})=\tfrac{4}{3}$$

$$f_{xy}=4+4x-2y \to \begin{array}{l} f_{xy}(0,0)=4\ ,\ f_{xy}(-2,0)=-4 \\ f_{xy}(0,4)=-4\ ,\ f_{xy}(\tfrac{-2}{3},\tfrac{4}{3})=\tfrac{-4}{3} \end{array}$$

(۰ و ۰) یک نقطه زین اسبی است. $(0,0): \Delta=(0)(0)-4^2=-16<0$

(۰ و ۲−) یک نقطه زین اسبی است. $(-2,0): \Delta=(0)4-(-4)^2=-16<0$

$(\circ,۴): \Delta = ۱۶(\circ)-(-۴)^{۲}=-۱۶<\circ$ (۴ و ۰) یک نقطه زین اسبی است.

$(\frac{-۲}{۳},\frac{۴}{۳}): \Delta=\frac{۱۶}{۲}(\frac{۴}{۳})-(\frac{-۴}{۳})^{۲}=\frac{۴۸}{۹}>\circ$ ($\frac{۴}{۳}$ و $\frac{-۲}{۳}$) یک نقطه مینیمم نسبی است.

---

۸) $f(x,y)=۱-x^{۴}-۳y^{۳}$

جواب: با حل دستگاه نقطه بحرانی f بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x=-۴x^{۳}=\circ \\ f_y=-۹y^{۲}=\circ \end{cases} \Rightarrow x=\circ\ ,\ y=\circ$$

تنها نقطه بحرانی (۰ و ۰) است.

$f_{xx}=-۱۲x^{۲} \Rightarrow f_{xx}(\circ,\circ)=\circ$

$f_{yy}=-۱۸y \Rightarrow f_{yy}(\circ,\circ)=\circ$

$f_{xy}=\circ$

بنابراین $\Delta=AC-B^{۲}$ برابر است با $\Delta=\circ$ پس آزمون مشتق دوم بی‌نتیجه است اما داریم:

$f(x,\circ)=۱-x^{۴}\leq ۱=f(\circ,\circ)$

اگر $y>\circ$: $f(\circ,y)=۱-۳y^{۳}\leq ۱=f(\circ,\circ)$

اگر $y<\circ$: $f(\circ,y)=۱-۳y^{۳}\geq ۱=f(\circ,\circ)$

بنابراین برای $x\in R$ و $y\in R^{-}$ نقطه (۰ و ۰) یک نقطه زین اسبی است.

---

۹) $g(x,y)=e^{x}\,\mathrm{Sin}y$

جواب: با حل دستگاه نقاط بحرانی تابع g را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} g_x=e^{x}\,\mathrm{Sin}y=\circ \xrightarrow{e^{x}\neq\circ} \mathrm{Sin}y=\circ \\ g_y=e^{x}\,\mathrm{Cos}y=\circ \xrightarrow{e^{x}\neq\circ} \mathrm{Cos}y=\circ \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Sin}y=\mathrm{Cos}y=\circ$$

برای جواب داشتن دستگاه باید $\mathrm{Sin}y=\mathrm{Cos}y=\circ$ یعنی Siny و Cosy همزمان صفر شوند و این غیر ممکن است پس دستگاه فوق دارای جواب نیست. پس تابع g دارای هیچ نقطه اکسترمم نیست.

---

۱۰) $f(U,V)=e^{UV}$

جواب: با حل دستگاه نقاط بحرانی تابع f را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_U = Ve^{UV} = 0 \\ f_V = Ue^{UV} = 0 \end{cases} \Rightarrow U = V = 0$$

تنها نقاط بحرانی f نقطه (۰ و ۰) است پس:

$f_{UU} = V^2 e^{UV} \to f_{UU}(0,0) = 0$

$f_{VV} = U^2 e^{UV} \to f_{VV}(0,0) = 0$

$f_{UV} = e^{UV} + Ue^{UV} \to f_{UV}(0,0) = 1$

با توجه به $\Delta = (0)(0) - (1)^2 < 0$ نقطه (۰ و ۰) یک نقطه زین اسبی است.

---

۱۱) $f(x,y) = \dfrac{4y + x^2y^2 + 8x}{xy}$

جواب: با حل دستگاه نقاط بحرانی تابع f را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{x^2y^3 - 4y^2}{x^2y^2} = \dfrac{x^2y - 4}{x^2} = 0 \\ f_y = \dfrac{x^3y^2 - 8x^2}{x^2y^2} = \dfrac{xy^2 - 8}{y^2} = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم $x = \dfrac{8}{y^2}$ با قرار دادن این مقدار در معادله اول داریم: $y = 2$

بنابراین $x = 1$ و $y = 2$ یعنی (۲ و ۱) یک نقطه بحرانی f است پس:

$f_{xx} = \dfrac{8x}{x^4} = \dfrac{8}{x^3} \to f_{xx}(1,2) = 8$

$f_{yy} = \dfrac{16y}{y^4} = \dfrac{16}{y^3} \to f_{yy}(1,2) = 2$

$f_{xy} = 1$

بنابراین $\Delta = 8(2) - (1)^2 = 15 > 0$ و $A > 0$ و $(1,2)$ یک نقطه مینیمم نسبی است.

---

۱۲) $f(x,y) = \operatorname{Sin}x + \operatorname{Sin}y \quad 0 \le x \le 2\pi \;,\; 0 \le y \le 2\pi$

جواب: با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} f_x = \operatorname{Cos}x = 0 \\ f_y = \operatorname{Cos}y = 0 \end{cases} \xrightarrow[0 \le y \le 2\pi]{0 \le x \le 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \;,\; y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

بنابراین $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$، $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$، $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ نقاط بحرانی تابع f هستند.

$f_{xx}=-\mathrm{Sin}x \rightarrow f_{xx}=(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})=-۱ \quad , \quad f_{xx}(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})=۱$

$f_{xx}=(\frac{۳\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})=۱ \quad , \quad f_{xx}(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})=-۱$

$f_{yy}=-\mathrm{Sin}y \rightarrow f_{yy}=(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})=-۱ \quad , \quad f_{yy}(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})=۱$

$f_{yy}=(\frac{۳\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})=۱ \quad , \quad f_{yy}(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})=-۱$

$f_{xy}=۰$

$\Delta(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})=(-۱)(-۱)-۰=۱>۰ \;,\; A<۰$ — $(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ یک نقطه Max نسبی است.

$\Delta(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})=(۱)(۱)-۰=۱>۰ \;,\; A>۰$ — $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ یک نقطه Min نسبی است.

$\Delta(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})=(۱)(-۱)-۰=-۱<۰ \;,\; A<۰$ — $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ یک نقطه زین اسبی است.

$\Delta(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})=(-۱)(۱)-۰=-۱<۰$ — $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ یک نقطه زین اسبی است.

---

۱۳) سه عدد مثبت به قسمی بیابید که مجموع آنها ۲۴ و حاصلضرب آنها ماکسیمم است.

جواب: سه عد را با z و y و x نشان می‌دهیم و داریم:

$x+y+z=۲۴ \Rightarrow z=۲۴-x-y$

$A=xyz \Rightarrow A=f(x,y)=xy(۲۴-x-y) \Rightarrow ۲۴xy-x^۲y-xy^۲$

برای پیدا کردن نقاط ماکسیمم f(x,y) داریم:

$$\begin{cases} f_x=۲۴y-۲xy-y^۲=۰ \\ f_y=۲۴x-۲xy-x^۲=۰ \end{cases}$$

که جواب این دستگاه برابر است با (۲۴ و ۰) و (۸ و ۸)

اما f(۰ و ۲۴)=۰ و f(۸ و ۸)=۵۱۲ بنابراین x=y=z=۸ ماکسیمم می‌شود.

---

۱۴) سه عدد مثبت به قسمی بیابید که حاصلضرب آنها ۲۴ و مجموعه آنها مینیمم باشد.

جواب: سه عدد مثبت را با x و y و z نمایش می‌دهیم و داریم:

$D: x+y+z \quad , \; xyz=۲۴$

چون: $z=\frac{۲۴}{xy}$ پس:

$$D=f(x,y)=x+y+\frac{۲۴}{xy}$$

برای بدست آوردن نقاط مینیمم f داریم:

$$\begin{aligned} f_x &= ۱-\frac{۲۴y}{x^۲y^۲}=\frac{x^۲y-۲۴}{x^۲y}=۰ \\ f_y &= ۱-\frac{۲۴x}{x^۲y^۲}=\frac{xy^۲-۲۴}{xy^۲}=۰ \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x^۲y=۲۴ \rightarrow y=\frac{۲۴}{x^۲} \\ xy^۲=۲۴ \xrightarrow{y=\frac{۲۴}{x^۲}} x(\frac{(۲۴)^۲}{x^۴})=۲۴ \rightarrow \frac{۲۴}{x^۳}=۱ \end{cases}$$

بنابراین $x=\sqrt[۳]{۲۴}$ و $y=\sqrt[۳]{۲۴}$ حال با کمک آزمون مشتق دوم داریم:

$$f_{xx}=\frac{۴۸}{x^۳y} \rightarrow f_{xx}(\sqrt[۳]{۲۴}\,,\sqrt[۳]{۲۴})>۰$$

$$f_{yy}=\frac{۴۸}{xy^۳} \rightarrow f_{yy}(\sqrt[۳]{۲۴}\,,\sqrt[۳]{۲۴})>۰ \Rightarrow D(\sqrt[۳]{۲۴},\sqrt[۳]{۲۴})>۰\,,\; A>۰$$

$$f_{xy}=\frac{۲۴}{x^۲y^۲} \rightarrow (\sqrt[۳]{۲۴}\,,\sqrt[۳]{۲۴})>۰$$

بنابراین $(\sqrt[۳]{۲۴}\,,\sqrt[۳]{۲۴})$ نقطه مینیمم است.

---

۱۵) ابعاد مکعب مستطیلی را بیابید که مساحت کل آن ۴۸ و حجم آن‌ها ماکسیمم باشد.

جواب: ابعاد مکعب را x و y و z می‌نامیم و داریم $۲xy+۲(x+y)z=۴۸$ و $V=xyz$ و $z=\frac{۲۴-xy}{x+y}$

پس:

$$V=f(x,y)=(xy)(\frac{۲۴-xy}{x+y})=\frac{۲۴xy-x^۲y^۲}{x+y}$$

برای بدست آوردن نقاط ماکسیمم f داریم:

$$\begin{cases} f_x=\frac{۲۴y^۲-x^۲y^۲-۲xy^۳}{(x+y)^۲}=۰ \\ f_y=\frac{۲۴x^۲-۲x^۳y-x^۲y^۲}{(x+y)^۲}=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۴y^۲-x^۲y^۲-۲xy^۳=۰ \\ ۲۴y^۲-۲x^۳y-x^۲y^۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^۲(۲۴-x^۲-۲xy)=۰ \\ x^۲(۲۴-۲xy-y^۲)=۰ \end{cases}$$

پس $x=۰ \rightarrow x^۲=۰$ و $y=۰ \rightarrow y^۲=۰$ بنابراین (۰ و ۰) یک جواب دستگاه فوق می‌باشد.

$$\begin{cases} ۲۴-x^۲-۲xy=۰ \\ ۲۴-xy-y^۲=۰ \end{cases} \Rightarrow x=\pm y \Rightarrow \begin{cases} x=y \to x=y=۲\sqrt{۲} \\ x=-y \to x^۲=-۲۴ \quad \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

بنابراین $(۲\sqrt{۲},۲\sqrt{۲})$ نیز یک نقطه بحرانی است. که یک نقطه مطلوب می‌باشد زیرا (۰ و ۰) یک نقطه است که نمی‌تواند ابعاد یک مکعب با حجم ماکسیمم است.

---

۱۶) نقطه‌ای را در فضا بیابید بطوری که مجموع مختصات آن ۲۴ و فاصله‌اش از مبدأ مختصات مینیمم باشد.

جواب: نقطه مورد نظر را به صورت (x,y,z) در نظر می‌گیریم و داریم: $x+y+z=۲۴$ و $d=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ و $z=۲۴-x-y$ پس:

$$d^۲=f(x,y)=x^۲+y^۲+(۲۴-x-y)^۲=۲x^۲+۲y^۲+۲xy-۴۸y-۴۸x+(۲۴)^۲$$

برای یافتن مینیمم f داریم:

$$\begin{cases} f_x=۲y+۴x-۴۸=۰ \\ f_y=۴y-۴۸+۲x=۰ \end{cases} \Rightarrow x=۸\ ,\ y=۸$$

چون $f_{xx}=۴=f_{yy}$، $f_{xy}=۲$ بنابراین $A>۰$ و $\Delta=۱۲>۰$ پس (۸ و ۸) مینیمم نسبی f می‌باشد پس نقطه مورد نظر برابر است با: (۸ و ۸ و ۸)

---

۱۷) برداری را در فضا تعیین کنید بطوری که اندازه آن ۲۰ و مجموع مولفه‌های آن ماکسیمم باشد.

جواب: بردار مورد نظر را به صورت $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=۲۰$ و $D=x+y+z$ چون $z=\sqrt{۴۰۰-x^۲-y^۲}$ بنابراین:

$$D=f(x,y)=x+y+\sqrt{۴۰۰-x^۲-y^۲}$$

حال نقطه ماکسیمم f را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x=۱-\dfrac{x}{\sqrt{۴۰۰-x^۲-y^۲}}=\dfrac{\sqrt{۴۰۰-x^۲-y^۲}-x}{\sqrt{۴۰۰-x^۲-y^۲}}=۰ \\ f_y=۱-\dfrac{y}{\sqrt{۴۰۰-x^۲-y^۲}}=\dfrac{\sqrt{۴۰۰-x^۲-y^۲}}{\sqrt{۴۰۰-x^۲-y^۲}}=۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=400 \\ 2y^2+x^2=400 \end{cases} \Rightarrow y=\pm\frac{20}{\sqrt{3}} \quad , \quad x=\pm\frac{20}{\sqrt{3}}$$

بنابراین نقاط $(\pm\frac{20}{\sqrt{3}} , \pm\frac{20}{\sqrt{3}})$ نقاط بحرانی f می‌باشند اما داریم:

$$f(\frac{20}{\sqrt{3}} , \frac{20}{\sqrt{3}})=\frac{60}{\sqrt{3}} \quad , \quad f(\frac{20}{\sqrt{3}} , -\frac{20}{\sqrt{3}})=f(\frac{-20}{\sqrt{3}} , \frac{20}{\sqrt{3}})=\frac{40}{\sqrt{3}}$$

$$f(\frac{-20}{\sqrt{3}} , \frac{-20}{\sqrt{3}})=\frac{-20}{\sqrt{3}}$$

بنابراین مقدار ماکسیمم f عبارتست از $\frac{60}{\sqrt{3}}$ که مجموع نقطه $(\frac{20}{\sqrt{3}} , \frac{20}{\sqrt{3}} , \frac{20}{\sqrt{3}})$ می‌باشد.

---

۱۸) فرض کنید (x_0,y_0) یک نقطه بحرانی f است بطوری که $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ و $f_{yy}(x_0,y_0)<0$ نشان دهید که f در (x_0,y_0) یک نقطه زین اسبی است.

جواب: می‌دانیم اگر (x_0,y_0) یک نقطه بحرانی f باشد و $\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2<0$ آنگاه (x_0,y_0) یک نقطه زین اسبی است داریم:

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 \xrightarrow[(f_{xy})^2>0]{f_{xx}>0,f_{yy}<0} \Delta<0$$

پس چون $\Delta<0$ است نقطه (x_0,y_0) یک نقطه زین اسبی است.

---

۱۹) کوتاهترین فاصله از $P(1 \text{ و } 1 \text{ و } 1)$ از صفحه $4x-3y+z=5$ را تعیین کنید.

جواب: فرض می‌کنیم (x,y,z) نقطه‌ای روی صفحه $4x-3y+z=5$ باشد حال فاصله نقطه از P عبارتست از:

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$$

چون $z=5+3y-4x$ پس

$$d^2=f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2+(4+3y-4x)^2$$

$$f_x=2(x-1)+2(4+3y-4x)(0-4)=34x-24y-34=0$$

$$f_y=2(y-1)+2(4+3y-4x)(3)=20y-24x+22=0$$

حال با حل معادله فوق بدست می‌آوریم:

$$y=\frac{17}{26} \quad , \quad x=\frac{19}{3}$$

$f_{xx}=۳۴ \quad , \quad f_{yy}=۲۰ \quad , \quad f_{xy}=-۲۴ \Rightarrow \Delta>۰ \, , \, A>۰$

بنابراین $(\frac{۱۷}{۲۶}$ و $\frac{۱۹}{۳})$ نقطه مینیمم f است و مقدار آن $\frac{۲۳۴}{۶۷۶}$ می‌باشد بنابراین کوتاهترین فاصله $\sqrt{\frac{۲۳۴}{۶۷۶}}$ می‌باشد.

---

۲۰) نزدیکترین نقاط نمودار $xy^۳z^۲=۱۶$ تا مبدأ مختصات را بیابید.

جواب: فاصله نقطه تا مبدأ برابر است با $d=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$

پس: $z^۲=\frac{۱۶}{xy^۳}$

$$d^۲=x^۲+y^۲+\frac{۱۶}{xy^۳}$$

$$\begin{cases} f_x=۲x-\frac{۱۶}{x^۲y^۳}=۰ \\ f_y=۲y-\frac{۴۸}{xy^۴}=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x^۳y^۳-۱۶=۰ \Rightarrow x=\frac{۲}{y} \\ ۲xy^۵-۴۸=۰ \Rightarrow x=\frac{۲}{\sqrt[۴]{۱۲}} \Rightarrow y=\sqrt[۴]{۱۲} \end{cases}$$

بنابراین نقطه بحرانی عبارتست از $(\frac{۴}{\sqrt[۴]{۱۲}} , \sqrt[۴]{۱۲})$

$$f_{xx}=۲+\frac{۳۲xy^۳}{x^۴y^۶}=۲+\frac{۳۲}{x^۳y^۳} \Rightarrow f_{xx}(\frac{۲}{\sqrt[۴]{۱۲}} , \sqrt[۴]{۱۲})>۰$$

$$f_{yy}=۲+\frac{۴۸(۴)xy^۳}{x^۲y^۸}=۲+\frac{۴۸(۴)}{xy^۵} \Rightarrow f_{yy}(\frac{۲}{\sqrt[۴]{۱۲}} , \sqrt[۴]{۱۲})>۰$$

$$f_{xy}=\frac{۱۶(۳)}{x^۲y^۴} \Rightarrow f_{xy}(\frac{۲}{\sqrt[۴]{۱۲}} , \sqrt[۴]{۱۲})>۰$$

$$\Rightarrow \Delta>۰ \quad , \quad A>۰$$

بنابراین $(\frac{۲}{\sqrt[۴]{۱۲}} \, , \, \sqrt[۴]{۱۲})$ نقطه مینیمم است.

تمرین ۹.۷) مضرب لاگرانژ صفحه ۴۰۴

در تمرین‌های ۱ تا ۴، ماکسیمم و مینیمم f را تحت شرایط داده شده پیدا کنید.

۱) $f(x,y)=x+y^۲ \quad , \quad x^۲+y^۲=۴$

جواب:

$$F(x,y,\lambda)=x+y^۲+\lambda(x^۲+y^۲-۴)$$

$$\begin{cases} F_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 2y + 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow 2y = -2\lambda y \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

با استفاده از معادله دوم دو حالت زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} y \neq 0 \to \lambda = -1 \xrightarrow[\text{جایگذاری می‌کنیم}]{\text{در معادله اول}} x = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در معادله سوم}} y = \pm\frac{\sqrt{15}}{2} \\ y = 0 \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در معادله سوم}} x = \pm 2 \end{cases}$$

بنابراین $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2})$ و $(\pm 2, 0)$ نقاط اکسترمم تابع f می‌باشند اما داریم:

$$f(2,0) = 2 \quad , \quad f(-2,0) = -2 \quad , \quad f(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2}) = \frac{17}{4}$$

ماکسیمم و مینیمم f به ترتیب برابرند با $\frac{17}{4}$ و -2

---

۲) $x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad f(x,y) = x^3 + 2y^3$

جواب:

$$F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} F_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 6y^2 + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم داریم $6y^2 + 2\lambda y = 0$ پس $y = \frac{-2\lambda}{6}$

از معادله اول داریم $3x^2 + 2\lambda x = 0$ پس $x = -2\frac{\lambda}{3}$

با قرار دادن x و y در معادله سوم داریم:

$$(\frac{-2\lambda}{3})^2 + (\frac{-\lambda}{3})^2 - 1 = 0 \to \frac{5\lambda^2 - 9}{9} = 0 \to \lambda = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$$

بنابراین $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ و $y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ یعنی $(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}})$ نقاط اکسترمم می‌باشند.

$$f(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{Max} \quad , \quad f(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}) \Rightarrow (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}) \Rightarrow \text{Min}$$

---

۳) $(x+1)^2 + y^2 = 1 \quad , \quad f(x,y) = xy$

جواب:

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda((x+1)^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} F_x = y + 2\lambda(x+1) = 0 \\ F_y = x + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = (x+1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

از معادله سوم $x=-2\lambda y$ این مقدار را در معادله اول قرار می‌دهیم بنابراین:

$$y + 2\lambda(-2\lambda y + 1) = 0 \Rightarrow y - 4\lambda^2 y + 2\lambda = 0 \Rightarrow y = \frac{-2\lambda}{1-4\lambda^2}$$

$$\xrightarrow{x=-2\lambda y} x = \frac{4\lambda^2}{1-4\lambda^2}$$

حال با قرار دادن x و y در معادله دوم داریم:

$$\left(\frac{4\lambda^2}{1-4\lambda^2}+1\right)^2 + \left(\frac{-2\lambda}{1-4\lambda^2}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow -16\lambda^4 + 12\lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \;,\; \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; y = 0$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \;,\; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \;,\; y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین (۰ و ۰) و $\left(-\frac{3}{2} \,,\, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ نقاط اکسترمم f تحت g اند.

$$f(0,0) = 0 \quad , \quad f\left(\frac{-3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{+3\sqrt{3}}{4}\ \text{Max}$$

$$f\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}\ \text{Min}$$

---

۴) $f(x,y,z)=xy+yz \;,\; x^2+y^2+z^2=8$

جواب:

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + yz + \lambda(x^2+y^2+z^2-8)$$

$$\begin{cases} F_x = y + 2\lambda x = 0 \\ F_y = x + z + 2\lambda y = 0 \\ F_z = y + 2\lambda = 0 \\ F_\lambda = x^2+y^2+z^2-8 = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم بدست می‌آوریم $z=-x-2\lambda y$ که این مقدار را در معادله سوم قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} y+2\lambda x=0 \\ y+2\lambda(-x-2\lambda y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+2\lambda x=0 \\ y-2\lambda x-4\lambda^2 y=0 \end{cases} \Rightarrow y=2\lambda^2 y \Rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow x=0\ ,\ z=0 \\ y\neq 0 \rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{F_x} y=\frac{-2x}{\sqrt{2}} \xrightarrow{F_y} x=z \xrightarrow{F_\lambda} x^2+2x^2+x^2-8=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین $(\sqrt{2},-2,\sqrt{2})$ و $(-\sqrt{2},2,-\sqrt{2})$ نقاط بحرانی هستند. به همین ترتیب با استفاده از $\lambda=\frac{-1}{\sqrt{12}}$ نقاط بحرانی $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ و $\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ بدست می‌آید و

$$f(0,0,0)=0\ ,\ f(\pm\sqrt{2},\pm 2,\pm\sqrt{2})=-4\sqrt{2} \Rightarrow \text{Min}$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-4\sqrt{2}}{3}$$

در تمرین‌های ۵ تا ۸، مینیمم تابع f را تحت شرط داده شده به دست آورید.

۵) $f(x,y,z)=xyz\ ,\ x^2+y^2+4z^2=6$

جواب:

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+4z^2-6)$$

$$\begin{cases} F_x=yz+2\lambda x=0 \\ F_y=xz+2\lambda y=0 \\ F_z=xy+8\lambda z=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2+4z^2-6=0 \end{cases}$$

از معادله اول داریم $x=\frac{-yz}{2\lambda}$ با قرار دادن این مقدار در معادله دوم داریم:

$$\frac{-yz^2}{2\lambda}+2\lambda y=\frac{yz^2-4\lambda^2 y}{-2\lambda}=\frac{y(z^2-4\lambda^2)}{-2\lambda}$$

$y=0$ یا $z=\pm 2\lambda$ اگر $y=0$ با استفاده از دو معادله سوم داریم:

$$8\lambda z=0 \Rightarrow \lambda=0 \quad \text{یا} \quad z=0$$

اگر $\lambda=0$ تناقض بوجود می‌آید. زیرا اگر $\lambda=0$ آنگاه $x=y=z=0$ که در F_λ صدق نمی‌کند.

بنابراین $z=0$ با قرار دادن این مقدار و $y=0$ در معادله F_λ بدست می‌آوریم:

$$x=\pm\sqrt{6}$$

حال اگر $z=\pm 2\lambda$ با قرار دادن این مقدار در معادلات دوم و سوم داریم:

$$z=-2\lambda:\begin{cases}-2\lambda x+2\lambda y=0\\ xy-16\lambda^2=0\end{cases}\Rightarrow x=y\Rightarrow x^2=16\lambda^2\Rightarrow x=\pm 4\lambda$$

حال مقادیر x و y و z را در معادله F_λ قرار می‌دهیم:

$$16\lambda^2+16\lambda^2+16\lambda^2=6\Rightarrow 48\lambda^2=6\Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{8}}$$

بنابراین $x=y=\pm\frac{4}{\sqrt{8}}$ و $z=\pm\frac{2}{\sqrt{8}}$

بنابراین نقاط $(0,0,\pm\sqrt{6})$ و $(\pm\frac{4}{\sqrt{8}},\pm\frac{4}{\sqrt{8}},\pm\frac{2}{\sqrt{8}})$ نقاط اکسترمم می‌باشند اما داریم:

$$f(\pm\sqrt{6},0,0)=0\quad,\quad f(\frac{4}{\sqrt{8}},\frac{4}{\sqrt{8}},\frac{2}{\sqrt{8}})=\frac{4}{\sqrt{8}}$$

$$f(\frac{4}{\sqrt{8}},\frac{4}{\sqrt{8}},\frac{-2}{\sqrt{8}})=\frac{-4}{\sqrt{8}}\quad,\quad f(\frac{-4}{\sqrt{8}},\frac{-4}{\sqrt{8}},\frac{2}{\sqrt{8}})=\frac{4}{\sqrt{8}}$$

$$f(\frac{-4}{\sqrt{8}},\frac{-4}{\sqrt{8}},\frac{-2}{\sqrt{8}})=\frac{-4}{\sqrt{8}}$$

مابقی نقاط، نقاط اکسترمم نیستند زیرا باید x=y باشد بنابراین مینیمم تابع $-\frac{4}{\sqrt{n}}$ می‌باشد.

---

۶) $x+y+z=4\quad,\quad f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2$

جواب:

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+2y^2+z^2+\lambda(x+y+z-4)$$

$$\begin{cases}F_x=2x+\lambda=0\Rightarrow x=\frac{-\lambda}{2}\\ F_y=4y+\lambda=0\Rightarrow y=\frac{-\lambda}{4}\\ F_z=2z+\lambda=0\Rightarrow z=\frac{-\lambda}{2}\\ F_\lambda=x+y+z-4=0\end{cases}$$

هر سه مقدار را در معادله چهارم یعنی F_λ قرار می‌دهیم:

$$(\frac{-\lambda}{2})+(\frac{-\lambda}{4})+(\frac{-\lambda}{2})=4\Rightarrow\frac{-5\lambda}{4}=4\Rightarrow\lambda=\frac{-16}{5}$$

بنابراین $(\frac{16}{10}$ و $\frac{16}{20}$ و $\frac{16}{10})$ تنها نقطه اکسترمم تابع f است و

$$f(\frac{16}{10},\frac{16}{20},\frac{16}{10})=\frac{32}{5}$$

---

۷) $z=4y^2\quad,\quad F(x,y,z)=x+2y-3z$

جواب:

$$F(x,y,z,\lambda)=x+2y-3z+\lambda(z-4y^2)$$

$$\begin{cases} F_x = ۱ = ۰ \\ F_y = ۲ - ۸\lambda y \\ F_z = -۳ + \lambda = ۰ \\ F_\lambda = z - ۴y^۲ = ۰ \end{cases}$$

دستگاه فوق جواب ندارد ۰≠۱ بنابراین f دارای اکسترمم نمی‌باشد.

---

۸) $f(x,y,z) = x^۴ + ۸y + ۲۷z^۲$, $x+y+z = \frac{۹۷}{۲۷}$

جواب:

$$F(x,y,z,\lambda) = x^۴ + ۸y + ۲۷z^۲ + \lambda(x+y+z-\frac{۱۱}{۲})$$

$$\begin{cases} F_x = ۴x^۳ + \lambda = ۰ \\ F_y = ۳۲y^۳ + \lambda = ۰ \\ F_z = ۵۴z + \lambda = ۰ \\ F_\lambda = x+y+z-\frac{۱۱}{۲} = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۴x^۲}{۳۲y^۳} = ۱ \Rightarrow x = ۲y \\ \frac{۳۲y^۳}{۵۴z} = ۱ \Rightarrow z = \frac{۱۶}{۲۷}y^۳ \end{cases}$$

مقادیر بدست آمده را در F_λ قرار می‌دهیم:

$$۲y + y + \frac{۱۶}{۲۷}y^۳ = \frac{۹۷}{۲۷} \Rightarrow (y-۱)(\frac{۱۶}{۲۷}y^۲ + \frac{۱۶}{۲۷}y + \frac{۹۷}{۲۷}) = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

بنابراین ($\frac{۱۶}{۲۷}$و ۱ و ۲) یک نقطه اکسترمم می‌باشد.

---

۹) تمرین ۱۴ از بخش ۷ را به روش مضرب لاگرانژ حل کنید.

جواب: باید مینیمم $f(x,y,z)=x+y+z$ را با شرط $xyz=۲۴$ بدست آوریم

$$F(x,y,z,\lambda) = x+y+z+\lambda(xyz-۲۴)$$

$$\begin{cases} F_x = ۱ + \lambda yz = ۰ \\ F_y = ۱ + \lambda xz = ۰ \\ F_z = ۱ + \lambda xy = ۰ \\ F_\lambda = xyz - ۲۴ = ۰ \end{cases}$$

از معادله اول $\lambda = \frac{-۱}{yz}$ بدست می‌آید که در معادله دوم و سوم قرار می‌دهیم و

$x=y$ و $x=z$ بدست می‌آید پس $x=y=z$ از معادله چهارم داریم:

$$x^۳=۲۴ \Rightarrow x=۲\sqrt[۳]{۳} \Rightarrow y=z=۲\sqrt[۳]{۳}$$

یعنی نقطه $(۲\sqrt[۳]{۳}, ۲\sqrt[۳]{۳}, ۲\sqrt[۳]{۳})$ مینیمم f می‌باشد.

---

۱۰) تمرین ۱۳ از بخش ۸.۷ را به روش لاگرانژ حل کنید.

جواب: باید نقاط ماکسیمم $f(x,y,z)=xyz$ را با شرط $x+y+z=۲۴$ بدست آوریم

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x+y+z-۲۴)$$

$$\begin{cases} F_x=yz+\lambda=۰ \\ F_y=xz+\lambda=۰ \\ F_z=xy+\lambda=۰ \\ F_\lambda=x+y+z-۲۴=۰ \end{cases}$$

از معادله اول $\lambda=-yz$ با قرار دادن این مقدار در معادله دوم داریم:

$$xz=yz \Rightarrow \begin{cases} z=۰ \xrightarrow{F_y} \lambda=۰ \Rightarrow x=y=z=۰ \ (I) \\ x=y \ (II) \end{cases}$$

(I) درست نمی‌باشد زیرا با قرار دادن $x=y=z=۰$ در F_λ، $-۲۴=۰$ بدست می‌آید.

پس (II) درست است. از معادله سوم $\lambda=-xy$ بدست می‌آید که در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$xz=xy \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \rightarrow \lambda=۰ \rightarrow x=y=z=۰ \quad \text{نادرست است} \\ z=y \end{cases}$$

بنابراین $x=y=z$ با قرار دادن F_λ داریم:

$$x+x+x=۲۴ \Rightarrow ۳x=۲۴ \Rightarrow x=۸ \Rightarrow x=y=z=۸$$

بنابراین (۸ و ۸ و ۸) نقطه ماکسیمم f می‌باشد.

---

۱۱) تمرین ۱۶ از بخش ۸.۷ را به روش لاگرانژ حل کنید.

جواب: نقطه مینیمم $f(x,y,z)=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ را تحت $x+y+z=۲۴$ بدست آوریم

$$F(x,y,z,\lambda)=x^۲+y^۲+z^۲+\lambda(x+y+z-۲۴)$$

$$\begin{cases} F_x=۲x+\lambda=۰ \\ F_y=۲y+\lambda=۰ \\ F_z=۲z+\lambda=۰ \\ F_\lambda=x+y+z-۲۴=۰ \end{cases}$$

از معادلات اول و دوم و سوم داریم:

$$z=\frac{-\lambda}{۲}\ ,\ y=\frac{-\lambda}{۲}\ ,\ x=\frac{-\lambda}{۲}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله چهارم داریم:

$$\frac{-۳\lambda}{۲}-۲۴=۰ \Rightarrow \lambda=-۱۶ \Rightarrow x=y=z=\frac{-(-۱۶)}{۲}=۸$$

پس (۸ و ۸ و ۸) مینیمم تابع f می‌باشد.

---

۱۲) تمرین ۱۷ از بخش ۸.۷ را به روش مضرب لاگرانژ حل کنید.

جواب: نقطه ماکسیمم $f(x,y,z)=x+y+z$ را تحت $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=۲۰$ بدست می‌آوریم:

$$F(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(x^۲+y^۲+z^۲-۴۰۰)$$

$$\begin{cases} F_x=۱+۲\lambda x=۰ \\ F_y=۱+۲\lambda y=۰ \\ F_z=۱+۲\lambda z=۰ \\ F_\lambda=x^۲+y^۲+z^۲-۴۰۰=۰ \end{cases}$$

از سه معادله اول و دوم و سوم بدست می‌آوریم: $x=y=z=\frac{-۱}{۲\lambda}$

با قرار دادن این مقادیر در معادله چهارم داریم:

$$\frac{۳}{۴\lambda^۲}=۴۰۰ \Rightarrow \lambda^۲=\frac{۳}{۱۶۰۰} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۴۰}$$

بنابراین $x=y=z=\pm\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}$ پس $(\frac{۲۰}{\sqrt{۳}},\frac{۲۰}{\sqrt{۳}},\frac{۲۰}{\sqrt{۳}})$ نقطه اکسترمم می‌باشد.

در تمرین‌های ۱۳ و ۱۴ ماکسیمم و مینیمم f را در ناحیه داده شده تعیین کنید.

۱۳) $f(x,y)=۲x^۲+y^۲+۲y-۳\ ,\ x^۲+y^۲\leq ۴$

جواب: ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x=۴x=۰ \\ f_y=۲y+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow x=۰ , y=-۱$$

بنابراین (۱ـ و ۰) نقطه بحرانی می‌باشد. برای یافتن اکسترمم f مشتقات جزئی تابع لاگرانژ زیر را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$F(x,y,\lambda)=۲x^۲+y^۲+۲y-۳+\lambda(x^۲+y^۲-۴)$$

$$\begin{cases} F_x=۲x+۲\lambda x \\ F_y=۲y+۲+۲\lambda y=۰ \\ F_\lambda=x^۲+y^۲-۴=۰ \end{cases}$$

از معادله F_x داریم: $4x=-2\lambda x$ پس:

$$\begin{cases} x\neq 0 \rightarrow \lambda=-2 \xrightarrow{F_y} y=1 \xrightarrow{F_\lambda} x=\pm 3 \\ x=0 \xrightarrow{F_y} y=\pm 2 \end{cases}$$

بنابراین (۰ و ۳±) و (۲± و ۰) نقاط اکسترمم f می‌باشند اما (۰ و ۳±) در ناحیه داده شده قرار ندارند پس:

$$f(0,-1)=-4=\text{Min} \;,\; f(0,2)=5=\text{Max} \;,\; f(0,-2)=-3$$

---

۱۴) $f(x,y)=xy \;,\; 2x^2+y^2\leq 4$

جواب: مشابه تمرین فوق ابتدا نقاط بحرانی f را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_x=y=0 \\ f_y=x=0 \end{cases}$$

بنابراین (۰ و ۰) نقطه بحرانی f است. حال نقاط اکسترمم f قید $2x^2+y^2=4$ بدست می آوریم پس:

$$F(x,y,z,\lambda)=xy+\lambda(2x^2+y^2-4)$$

$$\begin{cases} F_x=y+4\lambda x=0 \\ F_y=x+2\lambda y=0 \\ F_\lambda=2x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

با تشکیل $\frac{F_x}{F_y}$ داریم:

$$\frac{y}{x}=\frac{2x}{y} \Rightarrow y^2=2x^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{2} \xrightarrow{F_y} x=\pm 1$$

بنابراین $(\pm 1,\pm\sqrt{2})$ نقاط اکسترمم تابع f می‌باشند اما داریم:

$$f(0,0)=0,\quad f(1,\sqrt{2})=f(-1,-\sqrt{2})=\sqrt{2}=\text{Max}$$
$$f(-1,-\sqrt{2})=f(1,-\sqrt{2})=-\sqrt{2}=\text{Min}$$

---

۱۵) تمرین ۱۹ از بخش ۸.۷ را به روش مضرب لاگرانژ حل کنید.

جواب: فرض می‌کنیم (x,y,z) نقطه‌ای روی صفحه $4x-3y+z=5$ باشد. هدف مینیمم کردن $d^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ تحت قید $-4x+3y-z+5=0$ می‌باشد پس:

$$F(x,y,z,\lambda)=d^2+\lambda(-4x+3y-z+5)$$

$$\begin{cases} F_x=2(x-1)-4\lambda \rightarrow x=1+2\lambda \\ F_y=2(y-1)-3\lambda=0 \rightarrow y=1-\frac{3}{2}\lambda \\ F_z=2(z-1)-\lambda=0 \rightarrow z=1+\frac{\lambda}{2} \\ F_\lambda=4x-3y+z-5=0 \end{cases}$$

با قرار دادن مقادیر x و y در معادله چهارم داریم:

$$-4(1+2\lambda)+3(1-\frac{3}{2}\lambda)-1-\frac{\lambda}{2}+5=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3}{13}$$

بنابراین $(x,y,z)=(\frac{29}{26},\frac{17}{26},\frac{19}{13})$ نقطه مینیمم d است و مقدار آن $\sqrt{\frac{234}{676}}$ می‌باشد.

---

۱۶) ابعاد یک استوانه را به قسمی بیابید که مساحت کل آن 6π سانتی‌متر مربع و حجم آن ماکسیمم باشد.

جواب: اگر شعاع قاعده r و ارتفاع h باشد داریم:

$V=f(r,h)=\pi r^2h$ و $2\pi r^2+2\pi rh=6\pi$

حال باید ماکسیمم f را تحت $2\pi r^2+2\pi rh-6\pi=0$ بدست آوریم پس:

$$F(r,h,\lambda)=\pi r^2h+\lambda(2\pi r^2+2\pi rh-6\pi)$$

$$\begin{cases} F_r=2\pi rh+\lambda(4\pi r+2\pi h)=0 \\ F_h=\pi r^2+2\lambda\pi r=0 \\ F_\lambda=2\pi r^2+2\lambda rh-6\lambda=0 \end{cases}$$

از معادله دوم $r=-2\lambda$ بدست می‌آید که در معادله اول قرار می‌دهیم و داریم:

$$-4\pi\lambda h-8\pi\lambda^2+2\pi\lambda h=0 \xrightarrow{2\pi\lambda} -2h-4\lambda+h=0 \rightarrow h=-4\lambda$$

با قرار دادن h و r در معادله سوم داریم:

$$2\pi(4\lambda^2)+2\pi(-2\lambda)(-4\lambda)-6\pi=0 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

بنابراین $(r,h)=(\pm1,\pm2)$ نقطه بحرانی می‌باشند اما چون r و h ارتفاع و شعاع استوانه می‌باشند پس باید مثبت باشند بنابراین $(r,h)=(1,2)$ نقطه ماکسیمم است و مقدار آن 2π می‌باشد.

آزمون چهار گزینه‌ای فصل هفتم

۱) فرض کنید $z=Ln(x^2+y^2)$ در این صورت $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) $\frac{2x+2y}{x^2+y^2}$ ج) $\frac{3}{x^2+y^2}$ د) ۱

۲) مشتق سویی $f(x,y,z)=x^2-yz+z^2x$ در $P(1,-4,3)$ و در جهت از P به $Q(2,-1,8)$ برابر است با:

الف) $\frac{52\sqrt{35}}{35}$ ب) ۰ ج) $\frac{\sqrt{35}}{35}$ د) $\sqrt{230}$

۳) اگر $z=f(u-v,v-u)$ آنگاه:

الف) $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=0$ ب) $\frac{\partial z}{\partial u}v+\frac{\partial z}{\partial v}u=0$

ج) $\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0$ د) هر سه عبارت نادرست است

۴) اگر منحنی C اثر $z=9-x^2-y^2$ در صفحه $x=1$ باشد معادلات پارامتری خط مماس بر C در نقطه (۴ و ۲ و ۱) عبارت‌اند از:

الف) $x=1$, $y=t$, $z=-4t+12$ ب) $x=t$, $y=1$, $z=-4t+12$

ج) $x=1$, $y=t^2$, $z=-4t$ د) هر سه گزینه نادرست است

۵) اگر $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ آنگاه $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$ برابر است با:

الف) ۲ ب) $\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ج) $\sqrt{2}$ د) $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۶) فرض کنید r و h شعاع قاعده و ارتفاع استوانه‌ای باشند اگر r و h به ترتیب با آهنگهای ۰/۰۱ و ۰/۰۲ سانتی‌متر بر دقیقه تغییر کنند آهنگ افزایش حجم استوانه در لحظه‌ای که $r=4$ و $h=7$ سانتی‌متر است برابر است با:

الف) $0/88\pi$ ب) $\pi r^2 h$ ج) $(2\pi)(4)(7)$ د) π

۷) اگر دما در نقطه (x,y) برابر $T=x^3y^2$ باشد آنگاه اگر در این نقطه در مسیر بردار $4\vec{i}-3\vec{j}$ حرکت کند آهنگ افزایش تغییر دما در $(-1,2)$ برابر است با:

الف) ۱۰۸ ب) ۱۰۸− ج) $\frac{60}{5}$ د) $108\sqrt{5}$

۸) فرض کنید $f(x,y)=x^۲-۴xy$ در چه جهتی آهنگ افزایش f در نقطه (۲ و ۱) ماکسیمم است؟

الف) $-۶\vec{i}-۴\vec{j}$ ب) $۶\vec{i}$ ج) $-۴\vec{j}$ د) $۶\vec{i}-۴\vec{j}$

۹) معادلات پارامتری خط عمود بر $۴x^۲+۹y^۲+z^۲=۴۹$ در نقطه (۳ و ۲ـ و ۱) عبارت است از:

الف) $(۱+۸t, -۲, -۳۶t, ۳+۶t)$ ب) $(۸t, -۳۶t, ۶t)$

ج) $(۸+t, -۳۶-۲t, ۶+۳t)$ د) هر سه گزینه نادرست هستند

۱۰) مقدار مینیمم نسبی $f(x,y)=x^۲+۳y-y^۳$ برابر است با:

الف) $f(۰,-۱)=-۲$ ب) $f(۰,۰)=۰$

ج) $f(۱,۲)=-۱$ د) f مینیمم نسبی ندارد

۱۱) دمای یک صفحه فلزی واقع بر صفحه xy در هر نقطه برابر است با $T=۵۴-\frac{۲}{۳}x^۲-۴y^۲$. آهنگ افزایش دمای صفحه فلزی در نقطه (۳ و ۲) روی خط $x=۲$ برابر است با:

الف) ۲۴ـ ب) ۲۴ ج) ۰ د) ۱۲

۱۲) اگر $f(x,y)=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ آنگاه $\sqrt{f_x^۲+f_y^۲+۱}$ برابر است با:

الف) $\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}$ ب) $\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}$ ج) $\frac{-۲x-۲y}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}$ د) $\frac{۲x}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}$

۱۳) اگر P و V و T به ترتیب فشار، حجم و دمای گازی باشند، آنگاه $PV=KT$ که در آن K ثابت است. آهنگ تغییر دما در هر لحظه برابر است با:

الف) $\frac{dT}{dt}=\frac{V}{K}.\frac{dP}{dt}-\frac{P}{K}.\frac{dV}{dt}$ ب) $\frac{dt}{dt}=V.\frac{dP}{dt}+P\frac{dV}{dt}$

ج) $\frac{dT}{dt}=\frac{V}{K}.\frac{dP}{dt}+\frac{P}{K}.\frac{dV}{dt}$ د) $\frac{dT}{dt}=\frac{V}{K^۲}.\frac{dP}{dt}+\frac{P}{K^۲}.\frac{dV}{dT}$

۱۴) مقدار ماکسیمم آهنگ افزایش $f(x,y)=x^۲-۴xy$ در نقطه P(۲ و ۱) برابر است با:

الف) $\sqrt{۵۲}$ ب) ۵۲ ج) ۱۲ د) ۱۲ـ

۱۵) کوتاهترین فاصله از نقطه P(۱ـ و ۱ و ۲) تا صفحه $۴x-۳y+z=۰$ برابر است با:

الف) $\frac{۴}{\sqrt{۲۶}}$ ب) $\sqrt{۲۶}$ ج) $\frac{۱}{۲۶}$ د) ۲۶

۱۶) معادله صفحه مماس بر نمودار $۷z=۴x^۲-۲y^۲$ در $P(-۲,-۱,۲)$ برابر است با:

الف) $x+۴y-۷z=-۲۰$
ب) $-۱۶x+۴y-۷z=۱۴$
ج) $x+۴y-۷z=-۴$
د) $(x+۲)+۴(y+۱)-۷(z-۲)$

۱۷) اگر $f(x,y)=x^۲-۴xy+y^۳+۴y$ آنگاه

الف) f در (۴ و ۲) مینیمم نسبی و در $(\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۲}{۳})$ ماکسیمم نسبی دارد.
ب) f در (۲ و ۴) مینیمم نسبی و در $(\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۳})$ نقطه زین اسبی دارد.
ج) f ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی ندارد.
د) هر سه گزینه فوق نادرست است.

۱۸) ابعاد مکعب مستطیلی به حجم ۱۰۰۰ واحد مکعب که مساحت آن مینیمم باشد عبارتست از:

الف) ۱۰ و ۱۰ و ۱۰
ب) ۱۰ و ۲۰ و ۵۵
ج) $\frac{۱۰}{\sqrt{۲}}, ۱۰, ۱۰\sqrt{۲}$
د) هر سه گزینه فوق نادرست است

۱۹) فرض کنید $f(x,y)=۳x^۲-xy$ مقدار تقریبی $f(۱/۹۸, ۰/۰۱)$ با استفاده از df برابر است با:

الف) ۰/۲۴
ب) ۱۰/۲۴
ج) ۹/۷۶
د) ۱۰

۲۰) کدام بردار زیر در (۱ـ و ۱) بر نمودار $x^۲-xy+۳y^۲=۱$ قائم است.

الف) $۳\vec{i}-۷\vec{j}$
ب) $\vec{i}$
ج) $-۷\vec{j}$
د) $۳\vec{i}$

۲۱) فرض کنید $f(x,y,z)=\frac{۱۰۰}{x^۲+y^۲+z^۲}$ در این صورت ∇f برابر است با:

الف) $\frac{-۲۰۰}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}$
ب) $\frac{-۲۰۰(x+y+z)}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}$
ج) $\frac{-۲۰۰}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}$
د) برابر با این عبارتها نیست

پاسخ آزمون چهار گزینه‌ای فصل هفتم

۱) گزینه (الف) صحیح است

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x}{x^۲+y^۲}\Rightarrow\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}=\frac{۲(x^۲+y^۲)-۴x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۲y}{x^۲+y^۲}\Rightarrow\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=\frac{۲(x^۲+y^۲)-۴y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}=\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}\Rightarrow\frac{۴(x^۲+y^۲)-۴x^۲-۴y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}=۰$$

---

۲) گزینه (الف) صحیح است

ابتدا جهت مشتق‌گیری را مشخص می‌کنیم:

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(۱,۳,۵)$$

طبق تعریف مشتق سویی $(D_U F_P=\nabla f_{(p)}.\vec{U})$ داریم:

$$\nabla f=(۲x+z^۲)\vec{i}+(-z)\vec{j}+(-y+۲zx)\vec{k}\Rightarrow\nabla f(۱,-۴,۳)=(۱۱,-۳,۱۰)$$

$$D_{\overrightarrow{PQ}}f_{(P)}=(۱۱,-۳,۱۰).\frac{(۱,۳,۵)}{\sqrt{۳۵}}=\frac{۱۱-۹+۵۰}{\sqrt{۳۵}}=\frac{۵۲}{\sqrt{۳۵}}=\frac{۵۲\sqrt{۳۵}}{\sqrt{۳۵}}$$

---

۳) گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا قرار می‌دهیم $u-v=x$ و $v-u=y$ بنابراین داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}(۱)+\frac{\partial f}{\partial y}(-۱)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}(-۱)+\frac{\partial f}{\partial y}(۱)$$

بنابراین $\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=۰$

---

۴) گزینه (الف) صحیح است

برای بدست آوردن اثر $z=۹-x^۲-y^۲$ در صفحه $x=۱$ کافی است در معادله $z=۹-x^۲-y^۲$ قرار می‌دهیم $x=۱$ که عبارت است از $z=۸-y^۲$ معادله خط مماس بر $z=۸-y^۲$ را در

نقطه (۴و۲) بدست می‌آوریم:

$$m=z'=-۲y \xrightarrow{y=۲} m=-۴$$

با کمک $m=-۴$ و نقطه (۴ و ۲) معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$z-۴=-۴(y-۲) \Rightarrow z=-۴y+۱۲$$

حال داریم:

$x=۱\ ,\ y=t\ ,\ z=-۴t+۱۲$ معادلات پارامتری خط

---

۵) گزینه (ج) صحیح است.

$$\sqrt{۱+f_x^۲+f_y^۲}=\sqrt{۱+\left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right)^۲+\left(\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right)^۲}=\sqrt{\frac{۲(x^۲+y^۲)}{x^۲+y^۲}}=\sqrt{۲}$$

---

۶) گزینه (الف) صحیح است.

حجم استوانه برابر است با $v=\pi r^۲h$ پس:

$$\frac{dv}{dt}=۲\pi rh\frac{dr}{dt}+\pi r^۲\frac{dh}{dt} \Rightarrow ۲\pi(۴)(۰/۰۱)+\pi(۰/۰۲)=۰/۸۸\pi$$

---

۷) گزینه (ج) صحیح است

مشتق جهتی T در نقطه (۲ ,۱-) را در جهت $\vec{u}=(۴,-۳)$ بدست می‌آوریم:

$$\nabla T=۳x^۲y^۲\vec{i}+۲x^۳y\vec{j} \to \nabla T(-۱,۲)=(۱۲,-۴)$$

$$|(۴,۳)|=۵$$

$$D_{\vec{u}}T(-۱,۲)=\nabla T(-۱,۲).\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(۱۲,-۴).(\frac{۴}{۵},\frac{-۳}{۵})=\frac{۶۰}{۵}$$

---

۸) گزینه (الف) صحیح است.

آهنگ افزایش تابع f در نقطه (۲ و ۱) در جهت گرادیان ماکسیمم نسبی است بنابراین:

$$\nabla f=(۲x-۴y)\vec{i}-۴x\vec{j} \Rightarrow \nabla f(۱,۲)=-۶\vec{i}-۴\vec{j}$$

---

۹) گزینه (الف) صحیح است

ابتدا بردار موازی که همان گرادیان $۴x^۲+۹y^۲+z^۲=۴۹$ در نقطه (۳, ۲-, ۱) است بدست

می‌آوریم:

$$f(x,y,z)=4x^2+9y^2+z^2-49$$

$$\nabla f=8x\vec{i}+18y\vec{j}+2z\vec{k} \Rightarrow \nabla f(1,-2,3)=(8,-36,6)$$

با استفاده از این بردار و نقطه $(1,-2,3)$ داریم:

$$\text{معادله خط}: \begin{cases} x=8t+1 \\ y=-36t-2 \\ z=6t+3 \end{cases}$$

---

۱۰) گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا نقاط بحرانی f را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x=2x=0 \\ f_y=3-3y^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \quad , \quad y=\pm 1$$

بنابراین $(0,\pm 1)$ نقاط بحرانی f هستند اما داریم:

$$f(0,1)=2\,Max \quad , \quad f(0,1)=-2\,min$$

---

۱۱) گزینه (الف) صحیح است.

مشتق جهتی T در نقطه (۳ و ۲) را در جهتی موازی با خط $x=2$ بدست می‌آوریم:

$$\nabla T=\frac{4}{3}x\vec{i}-8y\vec{j} \Rightarrow \nabla T(2,3)=(\frac{8}{3},-24)$$

$$D_{\vec{j}}T(2,3)=\nabla T(2,3).(0,1)=(\frac{8}{3},-24).(0,1)=-24$$

---

۱۲) گزینه (ب) صحیح است.

$$f_x=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad , \quad f_y=\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}+1}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

---

۱۳) گزینه (ج) صحیح است

$$PV=KT \Rightarrow T=\frac{PV}{K} \Rightarrow \frac{dT}{dt}=\frac{dP}{dt}.\frac{V}{K}+\frac{dV}{dt}.\frac{P}{K}$$

۱۴) گزینه (الف) صحیح است.

ماکسیمم آهنگ افزایش f در جهت گرادیان است بنابراین ابتدا ∇f را بدست می‌آوریم:

$$\nabla f=(2x-4y)\vec{i}+(-4x)\vec{j}\rightarrow \nabla f(1,2)=(-6,-4)$$

مقدار این ماکسیمم افزایش برابر است با $|\nabla f|$ بنابراین:

$$\nabla f\,|\,1,2\,|=\sqrt{52}$$

---

۱۵) گزینه (الف) صحیح است.

کوتاهترین فاصله نقطه (x_0,y_0,z_0) از صفحه $ax+by+cz+d=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d=\frac{|8-3-1|}{\sqrt{6+9+1}}=\frac{4}{\sqrt{26}}$$

---

۱۶) گزینه (ب) صحیح است.

$$f(x,y,z)=4x^2-2y^2-7z$$

$$\nabla f=8x\vec{i}-4y\vec{j}-7\vec{k}\Rightarrow \nabla f(-2,-1,2)=(-16,4,-7)$$

با استفاده از این بردار و نقطه $(-2,-1,2)$ معادله صفحه را می‌نویسیم:

$$-16(x+2)+4(y+1)-7(z-2)=0\Rightarrow -16x+4y-7z=14$$

---

۱۷) گزینه (ب) صحیح است.

ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x=2x-4y=0\Rightarrow x=2y \\ f_y=-4x+3y^2+4=0 \end{cases} \overset{f_y}{\Rightarrow} -8y+3y^2+4=0 \quad \begin{matrix}\Rightarrow y=2,\ y=\frac{2}{3}\\ \Rightarrow x=4,\ x=\frac{4}{3}\end{matrix}$$

بنابراین (۲ و ۴) و $(\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{3})$ نقاط بحرانی f هستند اما داریم:

$$f_{xx}=2$$

$$f_{yy}=6y\Rightarrow f_{yy}(4,2)=12\ ,\ f_{yy}(\tfrac{4}{3},\tfrac{2}{3})=4$$

$$f_{xy}=-4$$

(۲ و ۴) یک نقطه مینیمم نسبی است. $\Delta(۴,۲)=۲(۱۲)-(-۴)^{۲}=۸>۰\ ,\ A>۰$

$(\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۳})$ یک نقطه زین اسبی است. $\Delta(\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳})=۲(۴)-(-۴)^{۲}=-۸<۰$

۱۸ـ گزینه (الف) صحیح است.

ابعاد این مکعب مستطیل را با x و y و z نشان می‌دهیم و داریم:

$$S=۲xy+۲(x+y)z\ ,\ xyz=۱۰۰۰\Rightarrow z=\frac{۱۰۰۰}{xy}$$

$$S=f(x,y)=۲xy+۲(x+y)\frac{۱۰۰۰}{xy}=۲xy+\frac{۲۰۰۰}{y}+\frac{۲۰۰۰}{x}$$

$$\begin{cases} f_x=۲y-\frac{۲۰۰۰}{x^{۲}}\Rightarrow f_{xx}=\frac{۴۰۰۰}{x^{۳}} \\ f_y=۲x-\frac{۲۰۰۰}{y^{۲}}\Rightarrow f_{yy}=\frac{۴۰۰۰}{y^{۲}} \\ f_{xy}=۲ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x=۲y-\frac{۲۰۰۰}{x^{۲}}=۰ \\ f_y=۲x-\frac{۲۰۰۰}{y^{۲}}=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow x=۱۰\ ,\ y=۱۰$$

$$D(۱۰,۱۰)=f_{xx}(۱۰,۱۰)f_{yy}(۱۰,۱۰)-\left[f_{xy}(۱۰,۱۰)\right]^{۲}=(۴)(۴)-(۲)^{۲}=۱۲>۰$$

$$f_{xx}(۱۰,۱۰)=۴>۰$$

پس f در (۱۰ و ۱۰) دارای مینیمم نسبی است در نتیجه مقدار مینیمم مساحت کل مکعب مستطیل مورد نظر برابر است با:

$$S=f(۱۰,۱۰)=۲(۱۰)(۱۰)+\frac{۲۰۰۰}{۱۰}+\frac{۲۰۰۰}{۱۰}=۶۰۰$$

ابعاد این مکعب مستطیل برابر است با:

$$Z=\frac{۱۰۰۰}{(۱۰)(۱۰)}=۱۰\qquad (۱۰,۱۰,۱۰)$$

۱۹ـ گزینه (پ) صحیح است.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۶x-y\qquad ,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-x$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=(۶x-y)dx+(-x)dy$$

حال به ازای $x=۲$ و $y=۱$ و $dx=-۰/۰۲$ و $dy=۰/۰۱$ قرار می‌دهیم:

$df=(۱۲-۱)(-۰/۰۲)+(-۲)(۰/۰۱)=-۰/۲۴$

بنابراین از تساوی $f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=df$ داریم:

$f(۱/۹۸, ۱/۰۱)=f(۲, ۱)-۰/۲۴=۱۰-۰/۲۴=۹/۷۶$

---

۲۰) گزینه (الف) صحیح است.

بردار قائم بر نمودار، بردار گرادیان می‌باشد.

$f(x,y)=x^۲-xy+۳y^۲-۱=۰$

$\nabla f=(۲x-y)\hat{i}+(-x+۶y)\hat{j} \rightarrow \nabla f(۱,-۱)=(۳,-۷)$

---

۲۱) گزینه (ج) صحیح است.

$$\nabla f=\frac{-۲۰۰x}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}\vec{i}+\frac{-۲۰۰y}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}\vec{j}+\frac{-۲۰۰z}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}\vec{k}=\frac{-۲۰۰}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}(x,y,z)$$

تمرینات فصل هشتم

انتگرالهای چندگانه

۱.۸) انتگرال دوگانه

انتگرالهای مکرر ۱ تا ۱۰ را محاسبه کنید.

۱) $\int_0^1\int_{-1}^1 x\,dy\,dx$

جواب: $\int_0^1\int_{-1}^1 x\,dy\,dx=\int_0^1 (xy]_{-1}^1)dx=\int_0^1 (x(1)-x(-1))dx=\int_0^1 2x\,dx=x^2]_0^1=1$

---

۲) $\int_0^1\int_0^1 e^{x+y}\,dy\,dx$

جواب: $\int_0^1\int_0^1 e^{x+y}\,dy\,dx=\int_0^1\left[\int_0^1 e^{x+y}\,dy\right]dx=\int_0^1 (e^{x+y}]_0^1)dx$

$=\int_0^1 (e^{x+1}-e^x)dx=(e^{x+1}-e^x)]_0^1=(e^2-e^1)-(e^1-1)=e^2-2e+1$

---

۳) $\int_0^1\int_x^{x^2} dy\,dx$

جواب: $\int_0^1\int_x^{x^2} dy\,dx=\int_0^1 [\int_x^{x^2} dy]dx=\int_0^1 (y]_x^{x^2})dx=\int_0^1 (x^2-x)dx$

$=(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2})]_0^1=(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})-(0)=\frac{-1}{6}$

---

۴) $\int_0^1\int_0^3 x\sqrt{x^2+y}\,dy\,dx$

جواب: $\int_0^1\int_0^3 x\sqrt{x^2+y}\,dy\,dx=\int_0^1 [\int_0^3 x\sqrt{x^2+y}\,dy]dx$

$=\int_0^1 (x.\frac{2}{3}(x^2+y)^{\frac{3}{2}}]_0^3)dx=\int_0^1 (\frac{2}{3}x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^4)dx$

ملاحظه می‌کنیم که حل این انتگرال کمی مشکل می‌باشد. لذا از روش تغییر ترتیب انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم.

$$\int_{\circ}^{1}\int_{\circ}^{3} x\sqrt{x^{2}+y}\,dydx=\int_{\circ}^{3}\int_{\circ}^{1} x\sqrt{x^{2}+y}\,dxdy$$

$$\int_{\circ}^{3}\left(\frac{1}{3}(x^{2}+y)^{\frac{3}{2}}\Big]_{\circ}^{1}\right)dy=\int_{\circ}^{3}\frac{1}{3}\left((1+y)^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)dy$$

$$=\frac{2}{3\times5}(1+y)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{15}y^{\frac{5}{2}}\Big]_{\circ}^{3}=\frac{2}{15}(\sqrt{4^{5}}-\sqrt{3^{5}}-1)=\frac{2}{15}(2^{5}-3^{\frac{5}{2}}-1)$$

---

۵) $\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\sqrt{4-y^{2}}} xdxdy$

جواب:

$$\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\sqrt{4-y^{2}}} xdxdy=\int_{\circ}^{2\pi}\left[\int_{\circ}^{\sqrt{4-y^{2}}} xdx\right]dy=\int_{\circ}^{2\pi}\left(\frac{x^{2}}{2}\Big]_{\circ}^{\sqrt{4-y^{2}}}\right)dy$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\frac{4-y^{2}}{2}dy=2y-\frac{y^{3}}{6}\Big]_{\circ}^{2\pi}=4\pi-\frac{4\pi^{3}}{3}$$

---

۶) $\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1} r\sqrt{1-r^{2}}\,drd\theta$

جواب:

$$\int_{\circ}^{2\pi}\left[\int_{\circ}^{1} r\sqrt{1-r^{2}}\,dr\right]d\theta=\int_{\circ}^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}(1-r^{2})^{\frac{3}{2}}\Big]_{\circ}^{1}\right)d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\frac{1}{3}d\theta=\frac{1}{3}\theta\Big]_{\circ}^{2\pi}=\frac{2n}{3}$$

---

۷) $\int_{1}^{3}\int_{\circ}^{x}\frac{2}{x^{2}+y^{2}}dydx$

جواب:

$$\int_{1}^{3}\int_{\circ}^{x}\frac{2}{x^{2}+y^{2}}dydx=\int_{1}^{3}\int_{\circ}^{x}\frac{2}{x^{2}(1+(\frac{y}{x})^{2})}dydx$$

$$\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy=xdu$$

$$\Rightarrow\int_{1}^{3}\int_{\circ}^{x}\frac{2}{x^{2}(1+(\frac{y}{x})^{2})}dydx=\int_{1}^{3}\int_{\circ}^{1}\frac{2}{x}\frac{du}{1+u^{2}}dx$$

$$=\int_{1}^{3}\left(\frac{2}{x}\tan^{-1}u\Big]_{\circ}^{1}\right)dx=\int_{1}^{3}\frac{2}{x}\cdot\frac{\pi}{4}dx=\frac{\pi}{2}Ln\,|x|\,\Big]_{1}^{3}=\frac{\pi}{2}Ln3$$

۸) $\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dydx$

جواب:
$$\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dydx=\int_0^1 (e^{x^2}y]_0^x)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

---

۹) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{Cosy} e^x Sinydxdy$

جواب:
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\int_0^{Cosy} e^x Sinydx]dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(Sinye^x]_0^{Cosy})dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} Siny(e^{Cosy}-1)dy=(-e^{Cosy}+Cosy)]_0^{\frac{\pi}{4}}=(-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2})-(-e^1+1)$$

$$=e-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

---

۱۰) $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} ydxdy$

جواب:
$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} ydxdy=\int_0^2 (yx]_0^{\sqrt{4-y^2}})dy=\int_0^2 (y\sqrt{4-y^2})dy$$

$$=-\frac{1}{3}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}]_0^2=-\frac{1}{3}(0-4^{\frac{3}{2}})=\frac{8}{3}$$

---

۱۱) فرض کنید R ناحیه محدود به خطوط x=۲ و x=۳ و y=۴ و y=۶ باشد. انتگرال دوگانه $\iint_R (x+y)dA$ را محاسبه کنید.

جواب:
$$\iint_R (x+y)dA=\int_{x=2}^{x=3}[\int_{y=4}^{y=6}(x+y)dy]dx=\int_{x=2}^{x=3}(xy+\frac{y^2}{2}]_{y=4}^{y=6})dx$$

$$=\int_{x=2}^{x=3}(2x+10)dx=x^2+10x]_{x=2}^{x=3}=(9+30)-(4+20)=15$$

---

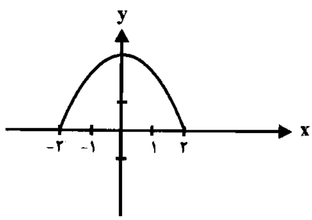
۱۲) فرض کنید R ناحیهٔ محدود به خطوط y=۲x و x=۰ و y=۰ است. انتگرال دوگانه $\iint_R (x+y)dA$ را محاسبه کنید.

جواب: فضای محدود به $x=0$ و $y=0$ و $y=2x$ یک خط می‌باشد، لذا انتگرال دوگانه بر روی آن قابل محاسبه نمی‌باشد.

---

۱۳) فرض کنید R ناحیه زیر سهمی $y=4-x^2$ و روی $[-1,1]$ است. انتگرال دوگانه $\iint_R xy^2dA$ را محاسبه کنید.

جواب: ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر است.



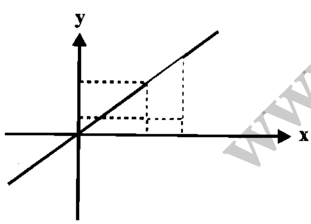
$$\Rightarrow \iint xy^2dA=\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=0}^{y=4-x^2} xy^2dydx=\int_{x=-1}^{x=1}\left(\frac{xy^3}{3}\right]_0^{4-x^2})dx$$

$$=\int_{x=-1}^{x=1}\frac{x}{3}(4-x^2)^3dx=\frac{1}{3}(-\frac{1}{8}(4-x^2)^4]_{x=-1}^{x=1}=\frac{1}{3}(-\frac{1}{8}(3^4-3^4))=0$$

---

۱۴) انتگرال دوگانه $\iint_R xdA$ را روی ذوزنقه محدود به خطوط $x=3$، $x=5$، $y=1$ و $y=x$ محاسبه کنید.

جواب: ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد.



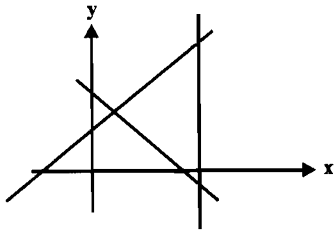
$$\Rightarrow \iint_R xdA=\int_{x=3}^{x=5}\int_{y=1}^{y=x} xdydx=\int_{x=3}^{x=5}\left((xy)\right]_{y=1}^{y=x})dx$$

$$=\int_{x=3}^{x=5}(x^2-x)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}]_{x=3}^{x=5}=\frac{98}{3}-\frac{16}{2}=\frac{148}{6}$$

---

۱۵) انتگرال دوگانه $\iint_R (3x-5)dA$ را روی مثلث محدود به خطوط $y=5+x$ و $y=-x+7$ و $x=10$ محاسبه کنید.

جواب: محل تلاقی دو خط $y=x+5$ و $y=-x+7$



$$\begin{cases} y=x+5 \\ y=-x+7 \end{cases} \Rightarrow x=1 \ , \ y=6$$

$$\Rightarrow \iint_R (3x-5)dA = \int_{x=1}^{x=10}\int_{y=-x+7}^{x+5}(3x-5)dy\,dx$$

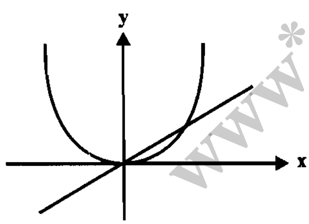
$$= \int_{x=1}^{x=10}((3xy-5y)]_{-x+7}^{x+5})dx = \int_{x=1}^{x=10}(6x^2-16x+10)dx$$

$$= 2x^3-8x^2+10x]_{x=1}^{x=10} = (2000-800+100)-(2-8+10) = 1296$$

---

۱۶) فرض کنید R ناحیه بین نمودارهای $y=x$ و $y=x^2$ باشد. انتگرال دوگانه $\iint_R xydA$ را محاسبه کنید.

جواب:



$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow (x=0 \ , y=0) \ , \ (x=1 \ , y=1)$$

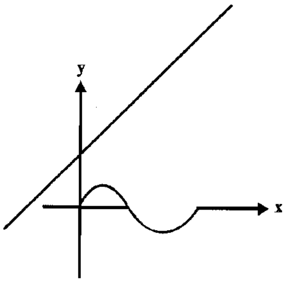
$$\iint_R xydA = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=x} xydydx = \int_{x=0}^{x=1}\frac{xy^2}{2}]_{x^2}^{x}dx = \int_{x=0}^{x=1}(\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{2})dx$$

$$= \frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{12}]_0^1 = \frac{1}{24}$$

---

۱۷) فرض کنید R ناحیه بین نمودارهای $y=1+x$ و $y=\text{Sinx}$ و روی بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ باشد. انتگرال دوگانه $\iint_R 1.dA$ را محاسبه کنید.

جواب:



$$\iint_R 1dA=\int_{x=\pi}^{x=2\pi}\int_{y=\text{Sinx}}^{y=1+x} 1dydx$$

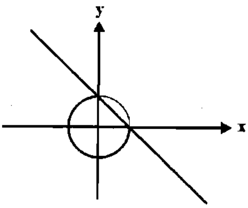
$$=\int_{x=\pi}^{x=2\pi}(y]_{y=\text{Sinx}}^{y=1+x})dx=\int_{x=\pi}^{x=2\pi}(1+x-\text{Sinx})dx=x+\frac{x^2}{2}+\text{Cosx}]_{x=\pi}^{x=2\pi}$$

$$=\pi+\frac{3\pi^2}{2}+2$$

---

۱۸) انتگرال دوگانه $\iint_R xy^2dA$ را روی ناحیهٔ بالای خط $y=1-x$ و درورن دایرهٔ $x^2+y^2=1$ محاسبه کنید.

جواب:



$$\iint_R xy^2dA=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} xy^2dydx=\int_{x=0}^{x=1}(\frac{xy^3}{3}]_{x=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}})dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\frac{x}{3}((1-x^2)^{\frac{3}{2}}-(1-x)^3)dx=\int_{x=0}^{x=1}\frac{1}{3}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx-\int_{x=0}^{x=1}\frac{1}{3}x(1-x)^3dx$$

$$=-\frac{1}{15}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}]_0^1-\int_{x=0}^{x=1}\frac{1}{3}x(1+3x^2-3x-x^3)dx$$

$$=-\frac{1}{15}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}]_0^1-(\frac{1}{6}x^2+\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{15}x^5))]_0^1=\frac{1}{20}$$

---

۱۹) فرض کنید R ناحیهٔ بین نمودارهای $y=x^3+x^2+1$ و $y=x^3+x+1$ روی بازه $[-1,1]$ است. انتگرال دوگانه $\iint_R x^2dA$ را محاسبه کنید.

جواب: در بازه [۱ و ۰] اندازه $y=x^3+x+1$ بیشتر از $y=x^3+x^2+1$ می‌باشد و در بازه $[-1,0]$ اندازه $y=x^3+x^2+1$ بیشتر از $y=x^3+x+1$ می‌باشد. بنابراین:

$$\iint_R x^2 dA = \int_{x=-1}^{x=0} \left(\int_{x=x^3+x+1}^{y=x^3+x^2+1} x^2 dy\right)dx + \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=x^3+x^2+1}^{y=x^3+x+1} x^2 dy\right)dx$$

$$= \int_{x=-1}^{x=0} \left(x^2 y\,\right]_{y=x^3+x+1}^{y=x^3+x^2+1}\Big) dx + \int_{x=0}^{x=1} \left(x^2 y\,\right]_{y=x^3+x^2+1}^{y=x^3+x+1}\Big)dx$$

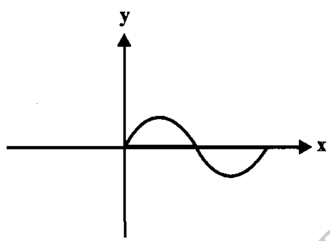
$$= \int_{x=-1}^{x=0} (x^4 - x^3)dx + \int_{x=0}^{x=1}(x^3 - x^4)dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_{x=-1}^{x=0} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

---

۲۰) انتگرال دوگانه $\iint_R 2y\,dA$ را روی ناحیه بین نمودار $y=\text{Sin}x$ و محور x در بازه $[0, 2\pi]$ محاسبه کنید.

جواب:



$$\iint_R 2y\,dA = \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{y=0}^{x=\text{Sin}x} 2y\,dy\right) dx + \int_{x=\pi}^{x=2\pi}\left(\int_{y=\text{Sin}x}^{y=0} 2y\,dy\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(y^2\right]_{y=0}^{y=\text{Sin}x}\Big)dx + \int_{x=\pi}^{x=2\pi} \left(y^2\right]_{y=\text{Sin}x}^{y=0}\Big)dx$$

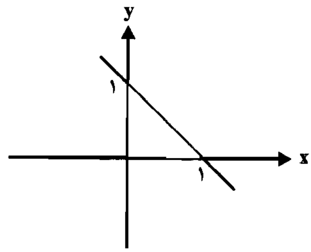
$$= \int_{x=0}^{x=\pi} (\text{Sin}x)^2 dx + \int_{x=\pi}^{x=2\pi} -(\text{Sin}x)^2 dx = \int_{x=0}^{x=\pi} \frac{1-\text{Cos}\,2x}{2}dx +$$

$$\int_{x=\pi}^{x=2\pi} -\frac{1-\text{Cos}\,2x}{2} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\text{Sin}\,2x\right)\Big]_0^{\pi} - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\text{Sin}\,2x\right)\Big]_{\pi}^{2\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

---

۲۱) **حجم جسم محدود به صفحهٔ $z=1-x-y$ و صفحه‌های مختصات را بیابید.**

جواب: ابتدا ناحیه R روی صفحه xoy را می‌یابیم.



$z=1-x-y=0 \Rightarrow y=1-x$

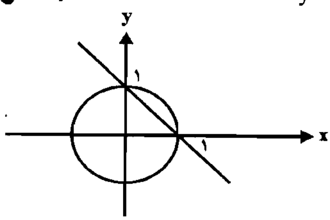
$$\Rightarrow V=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dydx=\int_0^1 (y-yx-\frac{y^2}{2}]_0^{1-x})dx$$

$$=\int_0^1(1-x-x+x^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+x)dx=\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2})dx$$

$$=(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x)]_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

---

۲۲) حجم ناحیهٔ هشت یک اول محدود به سهمگین $z=x^2+y^2$، صفحه $x+y=1$ و صفحه‌های مختصارت را محاسبه کنید.



جواب:

ناحیه R روی xoy

$$V=\int_0^1\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dxyx=\int_0^1(x^2y+\frac{y^3}{3}]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}})dx$$

$$=\int_0^1(x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-x^2(1-x)-\frac{(1-x)^3}{3})dx$$

$$=\int_0^1(\frac{2}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2})dx-(\frac{x^4}{3}+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3})]_0^1$$

$$=\int_0^1(\frac{2}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2})dx-\frac{3}{4}$$

$x=\mathrm{Sin}t \Rightarrow dx=\mathrm{Cos}tdt$

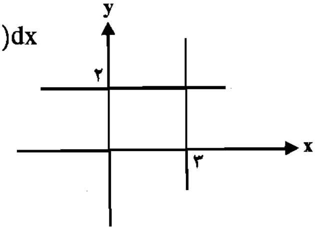
$$\Rightarrow V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{3}\mathrm{Sin}^2t\mathrm{Cos}^2t+\frac{1}{3}\mathrm{Cos}^3t)dt-\frac{3}{4}$$

$$+\frac{1}{6}(1+\mathrm{Cos}2t)dt-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}(t-\frac{1}{4}\mathrm{Sin}4t)+\frac{1}{6}(t+\frac{1}{2}\mathrm{Sin}2t)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}(\frac{\pi}{2})+\frac{1}{6}(\frac{\pi}{2})-\frac{3}{4}=\frac{\pi}{8}-\frac{3}{4}$$

---

۲۳) حجم جسم محدود به سطح $f(x,y)=4-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{16}y^2$، صفحه‌های $x=3$ و $y=2$ و صفحه‌های مختصات را محاسبه کنید.

جواب:

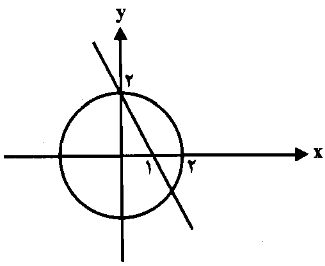


$$V=\int_0^3\int_0^2\left(4-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{16}y^2\right)dy\,dx=\int_0^3\left(4y-\frac{1}{9}x^2y-\frac{1}{48}y^3\Big]_0^2\right)dx$$

$$=\int_0^3\left(8-\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{6}\right)dx=\left(\left(8-\frac{1}{6}\right)x-\frac{2}{27}x^3\right)\Big]_0^3=\frac{43}{2}$$

---

۲۴) حجم ناحیه هشت یک اول محدود به نمودارهای $z=x^2+y^2+1$ و $2x+y=2$ و صفحه‌های مختصات را محاسبه کنید.



جواب: ابتدا ناحیه R روی صفحه xoy را می‌یابیم.

$$V=\int_0^2\int_{\frac{2-y}{2}}^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2+1)\,dx\,dy=\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}+xy^2+x\Big]_{\frac{2-y}{2}}^{\sqrt{4-y^2}}\right)dy$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{3}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}+y^2\sqrt{4-y^2}+\sqrt{4-y^2}-\frac{4}{3}+\frac{13y^3}{24}-\frac{15y^2}{12}+y\right)dy$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{3}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}+(1+y^2)\sqrt{4-y^2}\right)dy+\left(-\frac{4}{3}y+\frac{13y^4}{96}-\frac{5y^3}{12}+\frac{y^2}{2}\Big]_0^2\right)$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{3}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}+(1+y^2)\sqrt{4-y^2}\right)dy-\frac{11}{6}$$

$$y=2\text{Sin}t\Rightarrow dy=2\text{Cos}t\,dt\Rightarrow V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{1}{3}\sqrt{2^6\text{Cos}^6t}+2\text{Cos}t+8\text{Cos}t\text{Sin}^2t\right)2\text{Cos}t\right)dt-\frac{11}{6}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}\text{Cos}^4t+4\text{Cos}^2t+16\text{Cos}^2t\text{Sin}^2t\right)dt-\frac{11}{6}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}\text{Cos}^2t(1-\text{Sin}^2t)+4\text{Cos}^2t+16\text{Cos}^2t\text{Sin}^2t\right)dt-\frac{11}{6}$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{28}{3}\cos^2 t+\frac{8}{3}\sin^2 2t\right)dt-\frac{11}{6}$$

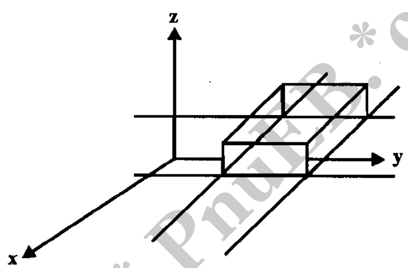
$$=\frac{28}{6}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+\frac{8}{6}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{11}{6}=3\pi-\frac{11}{6}$$

---

۲۵) انتگرالهای مکرر زیر نمایشگر حجم یک جسم هستند. این جسم را مشخص کنید.

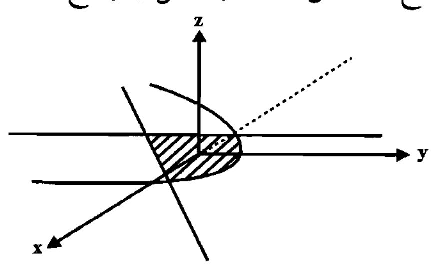
الف) $\int_{-2}^{1}\int_{1}^{4} 3dydx$

جواب: با توجه به حدود انتگرال‌گیری x بین ۲− و ۱ و y بین ۱ و ۴ تغییر می‌کند. اندازه تابع یعنی $z=f(x,y)=3$ می‌باشد. بنابراین این جسم با توجه به شکل این مکعب مستطیل می‌باشد.



ب) $\int_{1}^{2}\int_{x-1}^{1-x^2}(x^2+y^2)dydx$

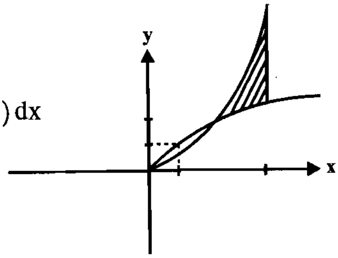
جواب: با توجه بین حدود انتگرال‌گیری داریم: $-1\le x\le 2$ و $x-1\le y\le 1-x^2$ و $z=x^2+y^2$ یعنی جسمی با سطح مقطع مشخص شده در شکل و ارتفاع $z=x^2+y^2$



---

۲۶) مساحت ناحیه محدود به سهمیهای $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ در بازه [۴ و ۱] را با استفاده از انتگرال مکرر محاسبه کنید.

جواب:



$$\begin{cases} y=x^{۲} \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۱$$

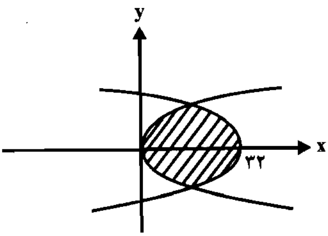
$$A=\iint_R dA=\int_{x=۱}^{x=۴}\left(\int_{y=\sqrt{x}}^{y=x^{۲}} dy\right)dx=\int_{x=۱}^{x=۴}\left(y\Big]_{y=\sqrt{x}}^{y=x^{۲}}\right)dx$$

$$=\int_{x=۱}^{x=۴}(x^{۲}-\sqrt{x})dx=\left(\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\right)\Big]_{x=۱}^{x=۴}=\frac{۴۹}{۳}$$

---

۲۷) مساحت ناحیه محدود به سهمیهای $x=y^{۲}$ و $x=۳۲-y^{۲}$ را با استفاده از انتگرال مکرر محاسبه کنید.

جواب:



$$\begin{cases} x=y^{۲} \\ x=۳۲-y^{۲} \end{cases} \Rightarrow y=\pm۴\ ,\ x=۱۶$$

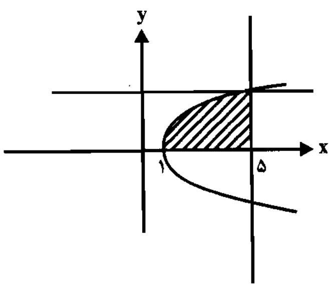
$$A=\iint_R dA=\int_{y=-۴}^{y=۴}\left(\int_{x=y^{۲}}^{x=۳۲-x^{۲}} dx\right)dy=\int_{y=-۴}^{y=۴}(۳۲-۲y^{۲})dy=۳۲y-\frac{۲}{۳}y^{۳}\Big]_{y=-۴}^{y=۴}$$

$$=۱۲۸-\frac{۱۲۸}{۳}+۱۲۸-\frac{۱۲۸}{۳}=\frac{۵۱۲}{۳}$$

انتگرالهای زیر را با تغییر ترتیب انتگرالها محاسبه کنید:

۲۸) $\int_{۰}^{۲}\int_{۱+y^{۲}}^{۵} ye^{(x-۱)^{۲}}dx\,dy$

جواب:



$$\begin{cases} ۰<y<۲ \\ ۱+y^{۲}<x<۵ \end{cases}$$

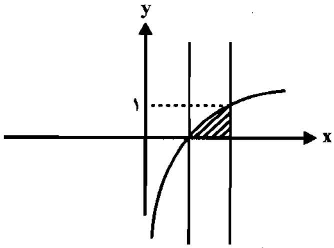
$$x=۱+y^{۲} \Rightarrow y=\sqrt{x-۱}$$

$$\int_{۰}^{۲}\int_{۱+y^{۲}}^{۵} ye^{(x-۱)^{۲}}dx\,dy=\int_{x=۱}^{x=۵}\int_{y=۰}^{y=\sqrt{x-۱}} ye^{(x-۱)^{۲}}dy\,dx$$

$$=\int_{x=۱}^{x=۵}\left(e^{(x-۱)^{۲}}\frac{y^{۲}}{۲}\Big]_{y=۰}^{y=\sqrt{x-۱}}\right)dx=\int_{x=۱}^{x=۵}\frac{x-۱}{۲}e^{(x-۱)^{۲}}dx$$

$$=\frac{1}{4}e^{(x-1)^2}\Big]_{x=1}^{x=5}=\frac{1}{4}(e^{16}-1)$$

۲۹) $\int_1^e\int_0^{Lnx} ydydx$



جواب:

$1<x<e \quad , \quad 0<y<Lnx$

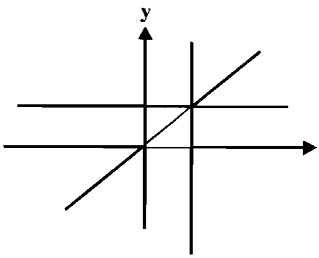
$y=Lnx \Rightarrow x=e^y$

$$\int_1^e\int_0^{Lnx} ydydx=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=e^y}^{x=e} ydxdy=\int_{y=0}^{y=1}(yx\Big]_{x=e^y}^{x=e})dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=1}(ey-ye^y)dy=e\frac{y^2}{2}\Big]_{y=0}^{y=1}-(ye^y-e^y)\Big]_{y=0}^{1}=\frac{e}{2}-(e-e-(0-1))=\frac{e}{2}-1$$

---

۳۰) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 Sinx^2 dxdy$



جواب:

$0<y<\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad , \quad y<x<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 Sinx^2 dxdy=\int_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_{y=0}^{y=x} y^2 Sinx^2 dydx$$

$$=\int_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}(Sinx^2\frac{y^3}{3}\Big]_{y=0}^{y=x})dx=\int_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{x^3}{3}Sinx^2dx$$

برای حل انتگرال بالا از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}u=\frac{x^2}{6}\\ dv=2xSinx^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{x}{3}dx\\ v=-Cosx^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{x^3}{3}Sinx^2dx=-\frac{x^2}{6}Cosx^2\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$-\int_{x=\cdot}^{x=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}}(-\frac{x}{۳}Cosx^{۲})dx=(-\frac{x^{۲}}{۶}Cosx^{۲}+\frac{۱}{۶}Sinx^{۲})]_{x=\cdot}^{x=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}}=(-\frac{\pi}{۱۲}(\cdot)+\frac{۱}{۶}-(\cdot+\cdot))=\frac{۱}{۶}$$

۲.۸) انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

انتگرالهای تمرینهای ۱ تا ۴ را در مختصات قطبی محاسبه کنید.

۱) $\iint_R xydA$، که در آن R ناحیهٔ محدود به دایرهٔ r=۵ می‌باشد.

جواب: با جایگذاری $rCos\theta$ به جای x و $rSin\theta$ به جای y و $rdrd\theta$ به جای dxdy خواهیم داشت:

$$\iint_R xydA=\int_{\theta=\cdot}^{\theta=۲\pi}\int_{r=\cdot}^{r=۵}(rCos\theta)(rSin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_{\theta=\cdot}^{\theta=۲\pi}\int_{r=\cdot}^{r=۵}r^{۳}Sin\theta Cos\theta drd\theta=\int_{\theta=\cdot}^{\theta=۲\pi}(Sin\theta Cos\theta\frac{r^{۴}}{۴}]_{\cdot}^{۵})d\theta$$

$$=\int_{\theta=\cdot}^{\theta=۲\pi}\frac{۶۲۵}{۴}Sin\theta Cos\theta d\theta=\frac{۶۲۵}{۴}\frac{(Sin\theta)^{۲}}{۲}]_{\theta=\cdot}^{\theta=۲\pi}=\frac{۶۲۵}{۴}(\cdot-\cdot)=\cdot$$

در حل انتگرال بالا فرض شده است که $u=Sin\theta \Rightarrow du=Cos\theta d\theta$

---

۲) $\iint_R x^{۲}dA$، که در آن R ناحیه محدود به دایره $r=۴Sin\theta$ است.

جواب:

$$\iint_R x^{۲}dA=\int_{\theta=\cdot}^{\theta=\pi}\int_{r=\cdot}^{r=۴Sin\theta}(rCos\theta)^{۲}rdrd\theta$$

$$=\int_{\cdot}^{\pi}\int_{\cdot}^{۴Sin\theta}r^{۳}Cos^{۲}\theta drd\theta=\int_{\cdot}^{\pi}(Cos^{۲}\theta\frac{r^{۴}}{۴}]_{\cdot}^{۴Sin\theta})d\theta$$

$$=\int_{\cdot}^{\pi}۶۴\,Cos^{۲}\theta Sin^{۴}\theta d\theta=\int_{\cdot}^{\pi}۶۴Cos^{۲}\theta Sin^{۲}\theta\,Sin^{۲}\theta d\theta$$

$$=\int_{\cdot}^{\pi}۱۶Sin^{۲}\theta(Sin^{۲}۲\theta)d\theta=۱۶\int_{\cdot}^{\pi}(\frac{۱-Cos۲\theta}{۲})(\frac{۱-Cos۴\theta}{۲})$$

$$=۴\int_{\cdot}^{\pi}(۱-Cos۴\theta-Cos۲\theta+Cos۲\theta Cos۴\theta)d\theta=$$

$$=4\int_0^{\pi}(1-\mathrm{Cos}4\theta-\mathrm{Cos}2\theta+\frac{1}{2}(\mathrm{Cos}2\theta+\mathrm{Cos}6\theta)d\theta$$

$$=4(\theta-\frac{1}{4}\mathrm{Sin}\theta-\frac{1}{2}\mathrm{Sin}2\theta+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\mathrm{Sin}2\theta+\frac{1}{6}\mathrm{Sin}6\theta)]_0^{\pi}$$

$$=4(\pi-0-0+\frac{1}{2}(0+0)-(0)=4\pi$$

در محاسبه انتگرال فوق از روابط زیر استفاده شده است:

$$2\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha=\mathrm{Sin}2\alpha$$

$$\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta=\frac{1}{2}(\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)+\mathrm{Cos}(\alpha+\beta))$$

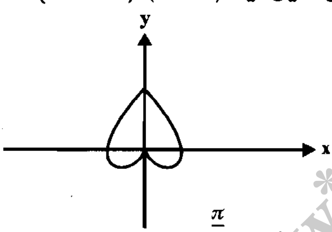
$$\mathrm{Sin}^2\theta=\frac{1-\mathrm{Cos}2\theta}{2}\quad,\quad \mathrm{Cos}^2\theta=\frac{1+\mathrm{Cos}2\theta}{2}$$

---

۳) $\iint_R (x^2+y^2)dA$**، که در آن R ناحیهٔ محدود به کار دیوئید (دلنما)** $r=2(1+\mathrm{Sin}\theta)$ **است.**

جواب:

$$x^2+y^2=r^2$$



$$\iint_R (x^2+y^2)dA=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2(1+\mathrm{Sin}\theta)} r^3 dr d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}([\frac{r^4}{4}]_0^{2(1+\mathrm{Sin}\theta)})d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2^4(1+\mathrm{Sin}\theta)^4 d\theta$$

$$=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{Sin}^4\theta+4\mathrm{Sin}^3\theta+6\mathrm{Sin}^2\theta+4\mathrm{Sin}\theta+1)d\theta=I$$

$$\mathrm{Sin}^2\theta=\frac{1-\mathrm{Cos}2\theta}{2}\quad,\quad \mathrm{Cos}^2\theta=\frac{1+\mathrm{Cos}2\theta}{2}$$

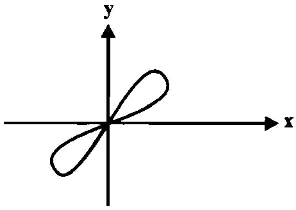
$$\Rightarrow I=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{35}{8}+\frac{\mathrm{Cos}4\theta}{8}-\frac{7}{2}\mathrm{Cos}2\theta-4\mathrm{Cos}^2\theta\mathrm{Sin}\theta+8\mathrm{Sin}\theta)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(35+\mathrm{Cos}4\theta-28\mathrm{Cos}2\theta-32\mathrm{Cos}^2\theta\mathrm{Sin}\theta+64\mathrm{Sin}\theta)d\theta$$

$$=(35\theta+\frac{1}{4}\mathrm{Sin}4\theta-(4\mathrm{Sin}2\theta+\frac{32}{3}\mathrm{Cos}^3\theta-64\mathrm{Cos}\theta)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=35\pi$$

---

۴) $\iint_R 1dA$، که در آن R یک حلقه از $r^2=9\mathrm{Sin}2\theta$ است.



جواب: $r^2=9\mathrm{Sin}2\theta \Rightarrow r=3\sqrt{\mathrm{Sin}2\theta}$

$$\iint_R 1dA=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=3\sqrt{\mathrm{Sin}2\theta}} r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=3\sqrt{\mathrm{Sin}2\theta}}\right)d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\frac{9}{2}\mathrm{Sin}2\theta d\theta=-\frac{9}{4}\mathrm{Cos}2\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\frac{9}{4}(-1-1)=\frac{9}{2}$$

در تمرین‌های ۵ تا ۸، حجم ناحیه داده شده را با استفاده از انتگرال دوگانه در مختصات قطبی محاسبه کنید.

۵) ناحیه درون کره $x^2+y^2+z^2=25$ و درون استوانه $x^2+y^2=9$

جواب: $x^2+y^2+z^2=25 \Rightarrow z=\pm\sqrt{25-(x^2+y^2)}=\pm\sqrt{25-r^2}$

$$\text{حجم}=2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{3}\sqrt{25-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}-\frac{1}{3}(25-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{r=0}^{r=3}d\theta=2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}-\frac{1}{3}((16)^{\frac{3}{2}}-25^{\frac{3}{2}})d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}61d\theta=\frac{2}{3}(61\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi})=\frac{244}{3}\pi$$

---

۶) ناحیه زیر سهمیگون $z=x^2+y^2$ و روی دایره $x^2+y^2=2x$

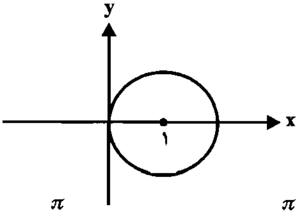
جواب: $x^2+y^2=2x \Rightarrow x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

که معادله دایره‌ای به مرکز (۰ و ۱) و شعاع ۱ می‌باشد.

$$z=x^{۲}+y^{۲}=(r\cos\theta)^{۲}+(r\sin\theta)^{۲}=r^{۲}$$

$$x^{۲}+y^{۲}=۲x \Rightarrow r^{۲}=۲x \Rightarrow r^{۲}=۲r\cos\theta \Rightarrow r=۲\cos\theta$$

$$\iint_R (x^{۲}+y^{۲})dA=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۲\cos\theta} r^{۲}r\,dr\,d\theta$$



$$=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{r^{۴}}{۴}\Big]_{۰}^{۲\cos\theta}\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}۴\cos^{۴}\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}۴\cos^{۲}\theta\cos^{۲}\theta\,d\theta$$

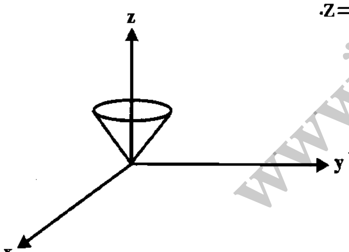
$$=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}۴\left(\frac{۱+\cos۲\theta}{۲}\right)\left(\frac{۱+\cos۲\theta}{۲}\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+۲\cos۲\theta+\cos^{۲}۲\theta)d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\left(۱+۲\cos۲\theta+\frac{۱+\cos۴\theta}{۲}\right)d\theta=\theta+\sin۲\theta+\frac{۱}{۲}\theta+\frac{۱}{۸}\sin۴\theta\Big]_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۳\pi}{۲}$$

---

۷) ناحیهٔ محدود به مخروط $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ و صفحه $z=۲$.

جواب:



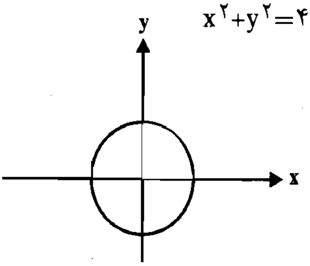
$$\iint_R \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\,dA=\int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}\int_{r=۰}^{r=۲}\sqrt{r^{۲}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}\left(\frac{r^{۳}}{۳}\Big]_{r=۰}^{r=۲}\right)d\theta=\int_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}\frac{۸}{۳}d\theta=\frac{۸}{۳}\theta\Big]_{۰}^{۲\pi}=\frac{۱۶\pi}{۳}$$

---

۸) ناحیهٔ زیر سطح $z=x^{۳}+xy^{۲}$ و روی ربع اول دایره $x^{۲}+y^{۲}=۴$

جواب: $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}=۴ \Rightarrow r=۲$



$$z=x^3+xy^2=(r\cos\theta)^3+(r\cos\theta\, r^2\sin^2\theta)=r^3\cos\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^3\cos\theta$$

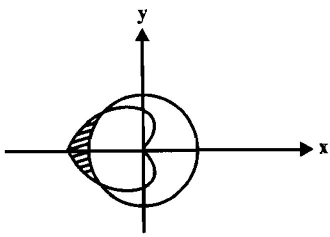
$$\Rightarrow \iint_R (x^3+xy^2)dA=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=2} r^3\cos\theta\, r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta \frac{r^5}{5}\Big]_0^2\right)d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}\cos\theta\, d\theta=\frac{32}{5}\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{5}$$

---

۹) مساحت درون نمودار $r=2-2\cos\theta$ و بیرون دایرهٔ $r=3$ را با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

جواب:



$$r=3=2-2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$$

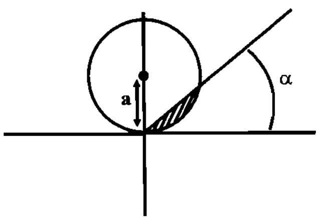
$$A=\iint_R dA=\int_{\theta=\frac{2\pi}{3}}^{\theta=\frac{4\pi}{3}}\int_{r=3}^{r=2-2\cos\theta} r\,dr\,d\theta=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{r^2}{2}\Big]_{r=3}^{2-2\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(4\cos^2\theta-8\cos\theta-5)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)-8\cos\theta-5\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(2\theta+\sin 2\theta-8\sin\theta-5\theta)\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=-\pi+\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

---

۱۰) مساحت قسمتی از دایره را که در شکل ۵.۲.۸ نشان داده شده است، محاسبه کنید.



جواب: ابتدا باید معادله دایره را بیابیم، داریم:

$$(x-0)^2+(y-a)^2=a^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ay+a^2=a^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ay=0$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2ar\sin\theta = 0 \Rightarrow r^2 = 2ar\sin\theta \Rightarrow r = 2a\sin\theta$$

$$\iint_R dA = \int_0^{\alpha}\int_0^{2a\sin\theta} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\alpha}\left(\frac{r^2}{2}\Big]_0^{2a\sin\theta}\right)d\theta = \int_0^{\alpha} 2a^2\sin^2\theta\, d\theta$$

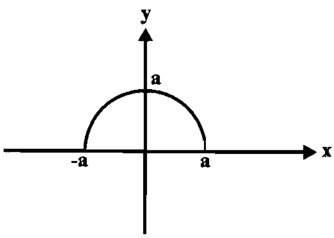
$$= \int_0^{\alpha} 2a^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \left(a^2\theta - \frac{a^2}{2}\sin 2\theta\right)\Big]_0^{\alpha} = \left(a^2\alpha - \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha\right)$$

$$= a^2\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)$$

در تمرین‌های ۱۱ تا ۱۴، انتگرال‌های داده شده را در مختصات قطبی محاسبه کنید.

۱۱) $\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

جواب: ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد.



با جایگذاری $r\cos\theta$ و $r\sin\theta$ به ترتیب به جای x و y و قرار دادن $rdrd\theta$ $(rd\theta dr)$ به جای $dydx$ $(dxdy)$ داریم:

$$(x^2+y^2) = (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) = r^2$$

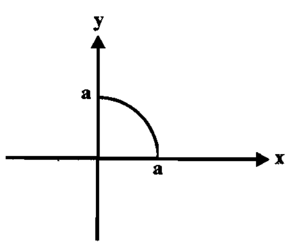
$$\Rightarrow \int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx = \int_0^{H}\int_0^{a} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(e^{-r^2}\Big]_0^a\right)d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(e^{-a^2}-1)d\theta = -\frac{1}{2}(e^{-a^2}-1)\theta\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\pi(e^{-a^2}-1)$$

---

۱۲) $\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dydx$

جواب: ناحیه انتگرال‌گیری به صورت روبرو است.



$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} = r^3$$

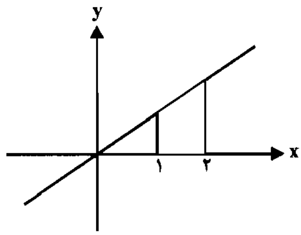
$$\Rightarrow \int_{۰}^{a}\int_{۰}^{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}dydx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{a}r^{۳}.rdrd\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{r^{۵}}{۵}]_{۰}^{a})d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{a^{۵}}{۵}d\theta=\frac{a^{۵}}{۵}\theta]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi a^{۵}}{۱۰}$$

---

۱۳) $\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{x}\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}dydx$

جواب: ناحیه انتگرال‌گیری به صورت روبرو می‌باشد.



$$\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{r^{۲}(Cos^{۲}\theta+Sin^{۲}\theta)}}=\frac{۱}{r}$$

$$\begin{cases} x=۱=rCos\theta \Rightarrow r=\frac{۱}{Cos\theta} \\ x=۲=rCos\theta \Rightarrow r=\frac{۲}{Cos\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{۱}^{۲}\int_{۱}^{x}\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}dydx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{\frac{۱}{Cos\theta}}^{\frac{۲}{Cos\theta}}\frac{۱}{r}rdrd\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}(r]_{\frac{۱}{Cos\theta}}^{\frac{۲}{Cos\theta}})d\theta$$

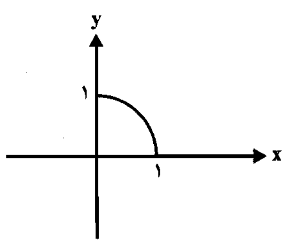
$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}(\frac{۲}{Cos\theta}-\frac{۱}{Cos\theta})d\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}Sec\theta d\theta=Ln\,|Sec\theta+tan\theta\,|\,]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}$$

$$=Ln\,|\sqrt{۲}+۱|-Ln\,|۱|=Ln(۱+\sqrt{۲})$$

---

۱۴) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\sqrt{۱-x^{۲}}}e^{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}dydx$

جواب: ناحیه انتگرال‌گیری به صورت روبرو می‌باشد.



$$\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=r \Rightarrow \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\sqrt{۱-x^{۲}}}e^{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}dydx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۱}e^{r}rdrd\theta$$

از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} du = re^r \\ v = r \end{cases} \overset{dr}{\Rightarrow} \begin{cases} u = e^r \\ dv = dr \end{cases}$$

$$\int e^r r dr = re^r - \int e^r dr = re^r - e^r$$

$$\Rightarrow \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\circ}^{۱} e^r r dr d\theta = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} (re^r - e^r]_{\circ}^{۱}) d\theta = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} (e^۱ - e^۱ - (\circ - ۱)) d\theta = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} d\theta = \theta]_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi}{۲}$$

۳.۸) مساحت رویه

در تمرین‌های ۱ تا ۱۰ مساحت رویهٔ داده شده را محاسبه کنید.

۱) قسمتی از نمودار $z = x^۲$ روی ناحیهٔ محدود به $x = \circ$ و $x = ۲$ و $y = \circ$ و $y = ۳$

جواب: می‌دانیم مساحت رویهٔ $z = f(x,y)$ روی ناحیه محدود و بستهٔ R مشروط بر آنکه f_x، f_y پیوسته باشند، از فرمول زیر محاسبه می‌گردد.

$$S = \iint_R \sqrt{۱ + [f_x(x,y)]^۲ + [f_y(x,y)]^۲}\, dA$$

$$f(x,y) = x^۲ \Rightarrow f_x(x,y) = ۲x \quad , \quad f_y(x,y) = \circ$$

$$\Rightarrow S = \int_{\circ}^{۲} \int_{\circ}^{۳} \sqrt{۴x^۲ + ۱}\, dy dx = \int_{\circ}^{۲} \sqrt{۴x^۲ + ۱}\, y]_{\circ}^{۳} dx = \int_{\circ}^{۲} ۳\sqrt{۴x^۲ + ۱}\, dx$$

$$۲x = \tan t \Rightarrow ۲dx = (۱ + \tan^۲ t) dt = \operatorname{Sec}^۲ t\, dt$$

$$\Rightarrow S = \int_{\circ}^{\tan^{-۱}۴} ۳\sqrt{۱ + \tan^۲ t}\,(۱ + \tan^۲ t) dt = ۳\int_{\circ}^{\tan^{-۱}۴} (۱ + \tan^۲ t)^{\frac{۳}{۲}} dt$$

$$= ۳\int_{\circ}^{\tan^{-۱}۴} \sec^۳ t\, dt$$

$$\begin{cases} u = \sec t \\ dv = \sec^۲ t\, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \sec t \tan t\, dt \\ v = \tan t \end{cases}$$

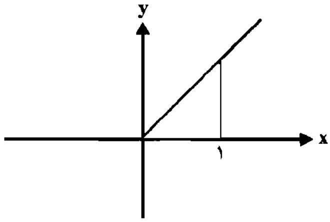
$$\Rightarrow \int \sec^۳ t\, dt = \sec t \tan t - \int \sec t \tan^۲ t\, dt = \sec t \tan t - \int \sec t (\sec^۲ t - ۱) dt$$

$$= \sec t \tan t - \int \sec^۳ t\, dt + \int \sec t\, dt = \sec t\, \mathrm{tnat} + \mathrm{Ln}\, |\sec t + \tan t|$$

$$\Rightarrow 2\int \sec^3 t\,dt = \sec t \tan t + \operatorname{Ln}|\sec t + \tan t|$$

$$\Rightarrow S = 3\int_0^{\tan^{-1}2} \sec^3 t\,dt = 3\left(\frac{1}{2}(\sec t\tan t + \operatorname{Ln}(\sec t + \tan t))\right]_0^{\tan^{-1}2} = 27/87$$

۲) قسمتی از نمودار $z=1-x^2$ روی ناحیهٔ محدود به $y=x$ و $y=0$ و $x=1$



جواب:

$$f_x(x,y)=-2x\ ,\ f_y(x,y)=0$$

$$\Rightarrow S=\int_0^1\int_0^x \sqrt{1+4x^2}\,dy\,dx=\int_0^1\left(\sqrt{1+4x^2}\,y\right]_0^x)dx=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

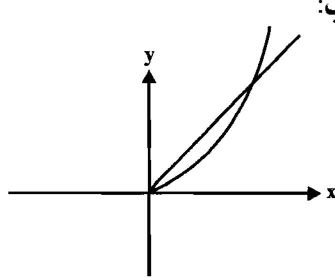
$$=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{1}{12}((5)^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{1}{12}(\sqrt{5^3}-1)$$

---

۳) قسمتی از نمودار $z=2x+3y$ روی ناحیه R محدود به نمودارهای $y=x$ و $y=x^2$

جواب:

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$



$$f_x(x,y)=2\ ,\ f_y(x,y)=3$$

$$\Rightarrow S=\int_0^1\int_{x^2}^x \sqrt{1+4+9}\,dy\,dx=\int_0^1\left(\sqrt{14}\,y\right]_{x^2}^x)dx=\int_0^1 \sqrt{14}(x-x^2)dx$$

$$=\sqrt{14}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^1=\sqrt{14}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{14}}{6}$$

---

۴) قسمتی از نمودار $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ روی دایرهٔ $4x^2+4y^2=a^2$

جواب:

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\ ,\ f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow S=\iint_R \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dydx=\iint_R \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dydx$$

با استفاده از تغییر متغیر قطبی داریم:

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $dydx=rdrd\theta$

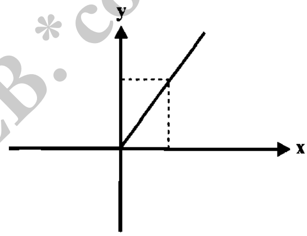
$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}(-a\sqrt{a^2-r^2}\,]_0^{\frac{a}{2}})d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}-a^2(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)d\theta=2\pi a^2(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)$$

---

۵) قسمتی از نمودار $z=y^2$ **روی ناحیهٔ محدود به** $y=2x$ **و** $x=0$ **و** $y=1$

جواب: $f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=2y$

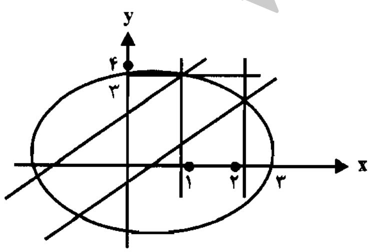


$y=2x \Rightarrow x=\frac{y}{2}$

$$\Rightarrow S=\int_0^1\int_0^{\frac{y}{2}}\sqrt{1+4y^2}\,dxdy=\int_0^1\frac{y}{2}\sqrt{1+4y^2}\,dy=\frac{1}{24}(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1=\frac{1}{24}(\sqrt{5^3}-1)$$

---

۶) قسمتی از نمودار $x^2+y^2=9$ **روی مستطیل به راسهای (۰ و ۱) و (۰ و ۲) و (۴ و ۱) و (۴ و ۲).**

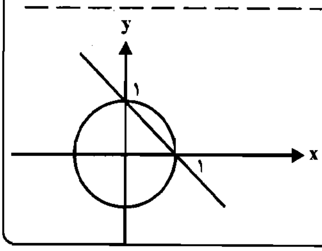


جواب:

معادله رویه داده نشده است.

---

۷) قسمتی از نمودار $z=1-x^2-y^2$ **روی صفحهٔ** xy



جواب: روی صفحه xy، $z=0$ می‌باشد لذا

$z=1-x^2-y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$ معادله دایرهٔ واحد

$f_x(x,y)=-2x$, $f_y(x,y)=-2y$

$$S=\iint_R \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dydx$$

با تغییر مختصات قطبی داریم:

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}(\sqrt{5^3}-1)d\theta=\frac{\pi}{6}(\sqrt{5^3}-1)$$

---

۸) قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=16$ که در درون استوانه $x^2-4x+y^2=0$ واقع است.

جواب:

$$x^2+y^2+z^2=16 \Rightarrow z=\sqrt{16-x^2-y^2}$$

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\quad,\quad f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$$

$$x^2-4x+y^2=0 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$$

که در مختصات قطبی عبارتست از

$$r=4\cos\theta$$

$$\Rightarrow S=\iint_R \sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dxdy$$

$$=\iint_R \frac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\theta}\frac{4rdrd\theta}{\sqrt{16-r^2}}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-4(16-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{4\cos\theta})d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-4(16-16\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}+16)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-16\sin\theta+16)d\theta=16\cos\theta+16\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=16\pi$$

---

۹) رویهٔ حاصل از دوران منحنی $f(x)=x^3$ در بازه [۰ و ۱] حول محور x

جواب: می‌دانیم مساحت حاصل از دوران $f(x)$ واقع در بازه $[a,b]$ حول محور x از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{[f'(x)]^2+1}\,dx$$

$$\Rightarrow S=2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{(3x^2)^2+1}\,dx=2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{9x^4+1}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{54}(9x^4+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1=\frac{2\pi}{54}(\sqrt{10^3}-1)$$

---

۱۰) رویهٔ حاصل از دوران منحنی $f(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$ در بازه [۵ و ۴] حول محور x

جواب:

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow S=2\pi\int_4^5\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$=2\pi\int_4^5\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^{-1}+\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_4^5\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=2\pi\int_4^5\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right)]_4^5=2\pi\left(\frac{25}{18}\right)=\frac{25\pi}{9}$$

۴.۸) انتگرال سه‌گانه

انتگرالهای مکرر تمرینهای ۱ تا ۱۰ را محاسبه کنید.

۱) $\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 (y-xz)\,dz\,dy\,dx$

جواب:

$$\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 (y-xz)\,dz\,dy\,dx=\int_0^3\int_{-1}^1 \left(yz-\frac{xz^2}{2}]_2^4\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^3\int_{-1}^1 (2y-6x)\,dy\,dx=\int_0^3 (y^2-6xy]_{-1}^1)\,dx=\int_0^3 -12x\,dx=-6x^2]_0^3=-54$$

۲) $\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 (y-xz)dy\,dx\,dz$

جواب: $\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 (y-xz)dy\,dx\,dz=\int_0^3\int_{-1}^1 (\frac{y^2}{2}-xyz]_2^4)dxdz$

$=\int_0^3\int_{-1}^1 (6-2xz)dxdz=\int_0^3 (6x-zx^2]_{-1}^1)dz=\int_0^3 12dz=12z]_0^3=36$

---

۳) $\int_{-1}^1\int_0^x\int_{x-y}^{x+y} (z-2x-y)dz\,dy\,dx$

جواب: $\int_{-1}^1\int_0^x\int_{x-y}^{x+y} (z-2x-y)dz\,dy\,dx=\int_{-1}^1\int_0^x (\frac{z^2}{2}-2xz-yz]_{x-y}^{x+y})dydx$

$=\int_{-1}^1\int_0^x (-2y^2-2xy)dydx=\int_{-1}^1 (-\frac{2}{3}y^3-xy^2]_0^x)dx$

$=\int_{-1}^1 -\frac{5}{3}x^3dx=-\frac{5}{12}x^4]_{-1}^1=0$

---

۴) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\mathrm{Cos}z\,dydxdz$

جواب: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\mathrm{Cos}z\,dydxdz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (x\mathrm{Cos}zy]_0^{\sqrt{1-x^2}})dxdz$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Cos}z)dxdz=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{1}{3}\mathrm{Cos}z(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1)dz$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\mathrm{Cos}zdz=\frac{1}{3}\mathrm{Sin}z]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$

---

۵) $\int_0^{\mathrm{Ln}3}\int_0^1\int_0^y (z^2+1)e^{y^2}dx\,dz\,dy$

جواب: $\int_0^{\mathrm{Ln}3}\int_0^1\int_0^y (z^2+1)e^{y^2}dx\,dz\,dy=\int_0^{\mathrm{Ln}3}\int_0^1 ((z^2+1)e^{y^2}x]_0^y)dz\,dy$

$=\int_0^{\mathrm{Ln}3}\int_0^1 ((z^2+1)e^{y^2}.y)dz\,dy=\int_0^{\mathrm{Ln}3} (ye^{y^2}(\frac{z^3}{3}+z)]_0^1)dy$

$$=\int_{0}^{Ln3}\frac{4}{3}ye^{y^2}dy=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)e^{y^2}\Big]_0^{Ln3}=\frac{2}{3}\left(e^{(Ln3)^2}-e^0\right)=\frac{2}{3}\left(e^{2Ln3}-1\right)$$

---

۶) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}\int_0^{y}\int_0^{y}(1+y^2z\cos xz)\,dx\,dz\,dy$

جواب:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}\int_0^{y}\int_0^{y}(1+y^2z\cos xz)\,dx\,dz\,dy=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}\int_0^{y}\left(x+y^2\sin xz\Big]_0^y\right)dz\,dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}\int_0^{y}(y+y^2\sin yz)\,dz\,dy=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}\left(yz-y\cos yz\Big]_0^y\right)dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}(y^2-y\cos y^2+y)\,dy=\left(\frac{y^3}{3}-\frac{1}{2}\sin y^2+\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}=\frac{\pi}{18}\sqrt{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{12}$$

---

۷) $\int_{-15}^{13}\int_1^{e}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}z(Lnx^2)\,dz\,dx\,dy$

جواب:

$$\int_{-15}^{13}\int_1^{e}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}z(Lnx^2)\,dz\,dx\,dy=\int_{-15}^{13}\int_1^{e}\left((Lnx^2)\frac{z^2}{2}\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)dx\,dy$$

$$=\int_{-15}^{13}\int_1^{e}\frac{1}{2x}Lnx^2\,dx\,dy=I$$

$$\begin{cases}2xLnx^2dx=dV\ \Rightarrow\ V=Lnx^2\\ u=\dfrac{1}{4x^2}\ \Rightarrow\ du=-\dfrac{1}{4x}dx\end{cases}$$

$$I=\int_{-15}^{13}\left(\frac{1}{4x^2}Lnx^2\Big]_1^e\right)dy-\int_{-15}^{13}\int_1^{e}-\frac{1}{4x}Lnx^2\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow I=\int_{-15}^{13}\frac{1}{2e^2}dy+\frac{1}{2}I\Rightarrow\frac{1}{2}I=\int_{-15}^{13}\frac{1}{2e^2}dy=\frac{1}{2e^2}(28)\ \Rightarrow\ I=\frac{28}{e^2}$$

---

۸) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin z}x^2\sin y\,dx\,dy\,dz$

جواب:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin z}x^2\sin y\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin y\frac{x^3}{3}\Big]_0^{\sin z}\right)dy\,dz$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\sin z^{3}\sin y\right)dy\,dz=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{3}\sin z^{3}\cos y\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\Big)dz$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\sin z^{3}dz=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\sin z(1-\cos^{2}z)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{3}\sin z-\frac{1}{3}\sin z\cos^{2}z\right)dz$$

$$\left(-\frac{1}{3}\cos z+\frac{1}{9}\cos^{3}z\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=(0-0)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}$$

---

۹) $\int_{0}^{1}\int_{1+x}^{2x}\int_{z}^{x+z}x\,dy\,dz\,dx$

جواب:

$$\int_{0}^{1}\int_{1+x}^{2x}\int_{z}^{x+z}x\,dy\,dz\,dx=\int_{0}^{1}\int_{1+x}^{2x}\left(xy\right]_{z}^{x+z}\Big)dz\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}\int_{1+x}^{2x}x^{2}dz\,dx=\int_{0}^{1}\left(x^{2}z\right]_{1+x}^{2x}\Big)dx=\int_{0}^{1}(x^{3}+x^{2})dx$$

$$=\left(\frac{x^{4}}{4}-\frac{x^{3}}{3}\right)\Big]_{0}^{1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{-1}{12}$$

---

۱۰) $\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^{2}}\int_{0}^{x+y}2x^{2}y\,dz\,dy\,dx$

جواب:

$$\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^{2}}\int_{0}^{x+y}2x^{2}y\,dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^{2}}\left(2x^{2}yz\right]_{0}^{x+y}\Big)dy\,dx$$

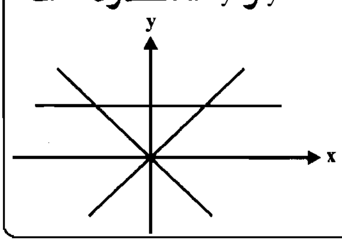
$$=\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^{2}}(2x^{3}y+2x^{2}y^{2})dy\,dx=\int_{-1}^{2}\left(x^{3}y^{2}+\frac{2}{3}x^{2}y^{3}\right]_{1}^{x^{2}}\Big)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(x^{7}+\frac{2}{3}x^{8}-x^{3}-\frac{2}{3}x^{2}\right)dx=\left(\frac{x^{8}}{8}+\frac{2}{27}x^{9}-\frac{x^{4}}{4}-\frac{2}{9}x^{3}\right)\Big]_{-1}^{2}=\frac{513}{8}$$

---

۱۱) فرض کنید D به صفحه‌های $y=1$، $z=0$، $y=x$، $y=-x$ و $z=y$ محدود است. انتگرال سه‌گانه $\iiint_{D}e^{y}dV$ را حساب کنید.

جواب: ناحیه انتگرال‌گیری به صورت روبرو است.



$$\iiint_D e^y\,dV=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=-y}^{x=y}\int_{z=0}^{z=y} e^y\,dz\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_{-y}^{y}(e^y z]_0^y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{-y}^{y} ye^y\,dx\,dy=\int_0^1(ye^y x]_{-y}^{y})dy=\int_0^1 2y^2e^y\,dy$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases}u=2y^2\to du=4ydy\\ dv=e^y dy\to v=e^y\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_0^1 2y^2e^y dy=2y^2e^y]_0^1-\int_0^1 4ye^y dy=2e-\int_0^1 4ye^y dy$$

استفاده دوباره از روش جزء به جزء:

$$\begin{cases}u=4y\to du=4dy\\ dv=e^y dy\to v=e^y\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2e-\int_0^1 4ye^y dy=2e-(4ye^y]_0^1-\int_0^1 4e^y dy)$$

$$=2e-4e+4e^y]_0^1=-2e+4e-4=2e-4$$

---

۱۲) فرض کنید مکعب D به صفحه‌های $x=1$، $x=3$، $y=0$، $y=2$، $z=-2$ و $z=0$ محدود است. انتگرال $\iiint_D ye^{xy}dV$ را محاسبه کنید.

جواب:

$$\iiint_D ye^{xy}dV=\int_{-2}^{0}\int_0^2\int_1^3 ye^{xy}dx\,dy\,dz=\int_{-2}^{0}\int_0^2(e^{xy}]_1^3)dy\,dz$$

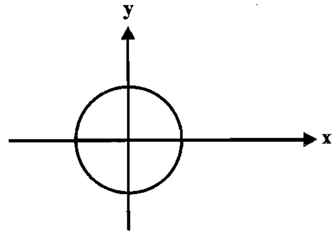
$$=\int_{-2}^{0}\int_0^2(e^{3y}-e^y)dy\,dz=\int_{-2}^{0}((\frac{1}{3}e^{3y}-e^y)]_0^2)dz=\int_{-2}^{0}(\frac{1}{3}e^6-e^2+\frac{2}{3})dz$$

$$=(\frac{1}{3}e^6-e^2+\frac{2}{3})z]_{-2}^{0}=\frac{2}{3}e^6-2e^2+\frac{4}{3}$$

---

۱۳) فرض کنید D به نمودار $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ و صفحهٔ xy محدود است. انتگرال $\iiint_D zy\,dV$ را محاسبه کنید.

جواب: در صفحه xy، $z=0$ می‌باشد لذا $z=\sqrt{1-x^2-y^2}=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$ که نمایشگر دایره واحد می‌باشد.



$$\iiint_D zy\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr^2\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\sin\theta\frac{z^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{1-r^2}}\right)dr\,d\theta=$$

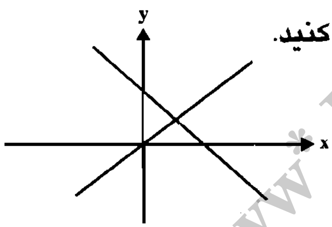
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^2\sin\theta}{2}(1-r^2)dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\theta}{6}r^3-\frac{\sin\theta}{10}r^5\right)\Big]_0^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\theta}{6}-\frac{\sin\theta}{10}\right)d\theta=\left(\frac{-1}{6}\cos\theta+\frac{1}{10}\cos\theta\right)\Big]_0^{2\pi}=0$$

---

۱۴) حجم ناحیه D محدود به صفحه‌های $z=10+x+y$ و $y=2-x$ و $y=x$ و $z=0$ و $x=0$ واقع در هشت یک اول دستگاه مختصات را محاسبه کنید.

جواب:



$$y=2-x=x \Rightarrow x=1$$

$$V=\iiint_D dV=\int_0^1\int_x^{2-x}\int_0^{10+x+y}dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_x^{2-x}\left(z\Big]_0^{10+x+y}\right)dy\,dx$$

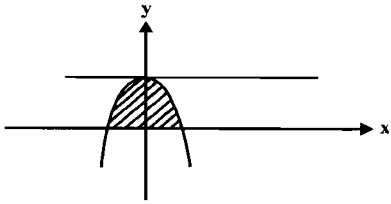
$$=\int_0^1\int_x^{2-x}(10+x+y)dy\,dx=\int_0^1\left(10y+xy+\frac{y^2}{2}\Big]_x^{2-x}\right)dx$$

$$=\int_0^1(22-20x-2x^2)dx=\left(22x-10x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big]_0^1=\frac{34}{3}$$

---

۱۵) فرض کنید D ناحیه محدود به نمودارهای $z=x^2+2y+1$ و $z=y+2$ در هشت یک اول دستگاه مختصات باشد. حجم D را بیابید.

جواب: تصویر D روی صفحه xoy عبارتست از:



در صفحه xoy، $z=0$ می‌باشد.

$$y=\frac{-x^2-1}{2}$$

می‌بینیم که در هشت یک اول دستگاه مختصات قائم تصویری وجود ندارد بنابراین $V=0$ می‌باشد.

۵.۸) انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای

در تمرین‌های ۱ تا ۶، معادلات داده شده را در مختصات استوانه‌ای بنویسید.

۱) $y=-4$

جواب: $y=r\sin\theta=-4 \Rightarrow r=\dfrac{-4}{\sin\theta}$

---

۲) $x=5z$

جواب: $x=r\cos\theta=5x \Rightarrow z=\dfrac{1}{5}r\cos\theta$

---

۳) $x+y+z=3$

جواب: $x+y+z=r\cos\theta+r\sin\theta+z=3 \Rightarrow r(\cos\theta+\sin\theta)+z=3$

---

۴) $x^2+y^2+z^2=16$

جواب: $x^2+y^2+z^2=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2+z^2=r^2+z^2=16 \Rightarrow r^2+z^2=16$

---

۵) $x^2+y^2+z=1$

جواب: $x^2+y^2+z=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2+z=r^2+z=1 \Rightarrow r^2+z=1$

---

۶) $4x^2+4y^2-z^2=0$

جواب: $4x^2+4y^2-z^2=4(r\cos\theta)^2+4(r\sin\theta)^2-z^2=4r^2-z^2=0 \Rightarrow 4r^2-z^2=0$

انتگرالهای مکرر تمرینهای ۷ تا ۱۰ را محاسبه کنید.

۷) $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^5 e^z r\,dz\,dr\,d\theta$

جواب:

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^5 e^z r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_1^2 (re^z]_0^5)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_1^2 r(e^5-1)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}((e^5-1)\frac{r^2}{2}]_1^2)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}(e^5-1)\,d\theta=\frac{3}{2}(e^5-1)\theta]_0^{2\pi}=\frac{3}{2}(e^5-1)2\pi=3\pi(e^5-1)$$

---

۸) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$

جواب:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\,\mathrm{Sin}\theta\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (r\mathrm{Sin}\theta z]_0^{\sqrt{1-r^2}})\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{Sin}\theta\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{Si}\theta n]_0^1)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\mathrm{Sin}\theta\,d\theta=-\frac{1}{3}\mathrm{Cos}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

---

۹) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{2\mathrm{Sin}\theta}\int_0^{r^2} r^2\mathrm{Cos}\theta\,dz\,dr\,d\theta$

جواب:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{2\mathrm{Sin}\theta}\int_0^{r^2} r^2\mathrm{Cos}\theta\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{2\mathrm{Sin}\theta}(r^2\mathrm{Cos}\theta z]_0^{r^2})\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{2\mathrm{Sin}\theta} r^4\mathrm{Cos}\theta\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\frac{r^5}{5}\mathrm{Cos}\theta]_0^{2\mathrm{Sin}\theta})\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{32}{5}\mathrm{Sin}^5\theta\,\mathrm{Cos}\theta\,d\theta=\frac{32}{5}\frac{(\mathrm{Sin}\theta)^6}{6}]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=-\frac{32}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{-16}{15}$$

---

۱۰) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1-2\mathrm{Cos}2\theta}\int_0^1 r\mathrm{Sin}\theta\,dz\,dr\,d\theta$

جواب:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1-2\mathrm{Cos}2\theta}\int_0^1 r\mathrm{Sin}\theta\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1-2\mathrm{Cos}2\theta}(r\mathrm{Sin}\theta z]_0^1)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{۱-۲Cos۲\theta} rSin\theta\, dr\, d\theta=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}(Sin\theta\frac{r^۲}{۲}]_{۰}^{۱-۲Cos۲\theta})d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{۲}Sin\theta(۱-۲Cos۲\theta)^۲d\theta=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{۲}Sin\theta(۱-۲(۲Cos^۲\theta-۱))^۲d\theta$$

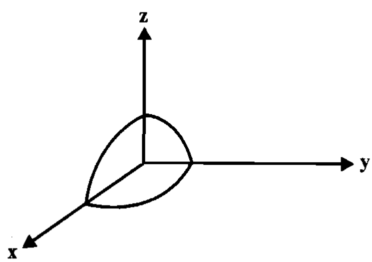
$$=\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}(۹Sin\theta+۱۶Cos^۴\theta\, Sin\theta-۲۴Cos^۲\theta\, Sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}(-۹Cos\theta-\frac{۱۶Cos^۵\theta}{۵}+\frac{۲۴Cos^۳\theta}{۳})]_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}=۰$$

انتگرال‌های سه‌گانهٔ تمرینهای ۱۱ تا ۱۲ را در مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

۱۱) $\iiint_D zdV$ **که در آن D هشت یک اول کرهٔ** $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ **است.**

جواب: ناحیه انتگرال‌گیری به صورت مقابل می‌باشد.



$$x^۲+y^۲+z^۲=۱ \Rightarrow z=\sqrt{۱-r^۲}$$

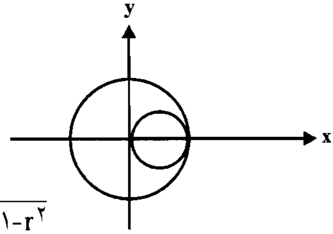
$$\Rightarrow\iiint_D zdV=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\sqrt{۱-r^۲}} zr\, dz\, dr\, d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۱}(r\frac{z^۲}{۲}]_{۰}^{\sqrt{۱-r^۲}})drd\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۱}\frac{r}{۲}(۱-r^۲)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}((-\frac{۱}{۸}(۱-r^۲)^۲]_{۰}^{۱})d\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۸}d\theta=\frac{۱}{۸}\theta]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{۱۶}\pi$$

---

۱۲) $\iiint_D yzdV$ **که در آن D ناحیهٔ محدود به استوانه** $r=Cos\theta$**، صفحه xy و کرهٔ** $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ **است.**



جواب:

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow r^2+z^2=1 \Rightarrow z=\pm\sqrt{1-r^2}$$

با توجه به تقارن داریم:

$$\iiint_D yz\,dV = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r^2\sin\theta z\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\left(r^2\sin\theta\frac{z^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{1-r^2}}\right)dr\,d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\left(\frac{r^2\sin\theta}{2}-\frac{r^4\sin\theta}{2}\right)dr\,d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{r^3\sin\theta}{6}-\frac{r^5\sin\theta}{10}\right)\Big]_0^{\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{6}-\frac{\cos^5\theta\sin\theta}{10}\right)d\theta$$

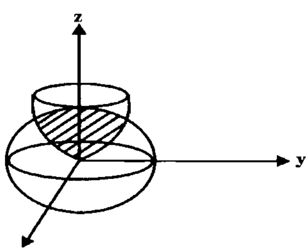
$$=2\left(-\frac{1}{24}\cos^4\theta+\frac{\cos^6\theta}{60}\right)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2(0+0-0-0)=0$$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۱۵، حجم ناحیه فضایی داده شده را پیدا کنید.

۱۳) ناحیه D که از بالا، به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2$ و از پائین به $z=x^2+y^2$ محدود است.

جواب:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ x^2+y^2=z\end{cases} \Rightarrow z^2+z-2=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=1,-2$$



اما از آنجا که $z=x^{2}+y^{2}$، عددی مثبت است. بنابراین $z=-2$ قابل قبول نیست.

$$\begin{cases} x^{2}+y^{2}+z^{2}=2 \Rightarrow z=\sqrt{2-r^{2}} \\ x^{2}+y^{2}=z \Rightarrow z=r^{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{r^{2}}^{\sqrt{2-r^{2}}} 1.r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}([rz]_{r^{2}}^{\sqrt{2-r^{2}}})dr\,d\theta$$

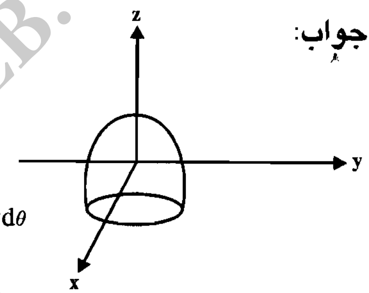
$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}(r\sqrt{2-r^{2}}-r^{3})drd\theta=\int_{0}^{2\pi}(-\frac{1}{3}(2-r^{2})^{\frac{3}{2}}-\frac{r^{4}}{4}]_{0}^{1})d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}(\frac{-7}{12}+\frac{1}{3}2\sqrt{2})d\theta=2\pi(-\frac{7}{12}+\frac{2\sqrt{2}}{3})$$

---

۱۴) ناحیه D که از بالا به سهمیوار $z=1-x^{2}-y^{2}$ و از پائین به صفحه $z=-3$ محدود است.

جواب:



$$\begin{cases} z=1-x^{2}-y^{2} \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow x^{2}+y^{2}=4 \Rightarrow r^{2}=4 \Rightarrow r=2$$

$$\Rightarrow V=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{-3}^{1-r^{2}} 1.rdzdrd\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}([rz]_{-3}^{1-r^{2}})drd\theta$$

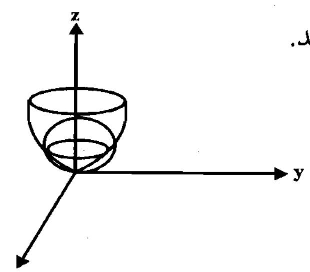
$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} r(4-r^{2})drd\theta=\int_{0}^{2\pi}(-\frac{1}{4}(4-r^{2})^{2}]_{0}^{2})d\theta=\int_{0}^{2\pi}4d\theta=8\pi$$

از تغییر متغیر $u=4-r^{2}$ و $du=-2rdr$ استفاده شده است.

---

۱۵) ناحیه D که در بالای مخروط $z=x^{2}+y^{2}$ و درون کرهٔ $x^{2}+y^{2}+z^{2}=4z$ واقع است.

جواب: در واقع $z=x^{2}+y^{2}$ معادله یک سهمیوار مدور می‌باشد.



$$\begin{cases} x^{2}+y^{2}+z^{2}=4z \\ x^{2}+y^{2}=z \end{cases} \Rightarrow z=4z-z^{2} \Rightarrow z=0 \text{ یا } z=3$$

$$z=x^{2}+y^{2} \Rightarrow 0\le x^{2}+y^{2}=r^{2}\le 3 \Rightarrow 0\le r\le\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\sqrt{۳}}\int_{r^۲}^{\sqrt{۴-r^۲}} rdzdrd\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\sqrt{۳}}\left(rz\right]_{r^۲}^{\sqrt{۴-r^۲}+۲}\Big)dr\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\sqrt{۳}}(r\sqrt{۴-r^۲}+۲r-r^۳)drd\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\left((-\frac{۱}{۳}(۴-r^۲)^{\frac{۳}{۲}}+r^۲-\frac{r^۴}{۴})\right]_{۰}^{\sqrt{۳}}\Big)d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۳۷}{۱۲}d\theta=\frac{۳۷}{۱۲}\theta\Big]_{۰}^{۲\pi}=\frac{۳۷\pi}{۶}$$

۶.۸) انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی

۱) اگر $(۱,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۶})$ مختصات کروی نقطهٔ p باشد، مختصات دکارتی آن را بیابید.

جواب:

$$\left.\begin{array}{l} x=\rho \sin\phi \cos\theta=۱(\sin\frac{\pi}{۲})(\cos\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ y=\rho \sin\phi \sin\theta=۱(\sin\frac{\pi}{۲})(\sin\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\\ z=\rho \cos\phi=۱\cos\frac{\pi}{۲}=۰\end{array}\right\}\Rightarrow (x,y,z)=(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲},۰)$$

---

۲) اگر $(۵,\frac{\pi}{۲},۰)$ مختصات کروی نقطهٔ p باشد، مختصات دکارتی آن را تعیین کنید.

جواب:

$$\left.\begin{array}{l} x=\rho \sin\phi \cos\theta=۵(\sin\frac{\pi}{۲})(\cos۰)=۵\\ y=\rho \sin\phi \sin\theta=۵(\sin\frac{\pi}{۲})(\sin۰)=۰\\ z=\rho \cos\phi=۵(\cos\frac{\pi}{۲})=۰\end{array}\right\}\Rightarrow (x,y,z)=(۵,۰,۰)$$

---

۳) اگر (۱ و ۰ و ۱) مختصات دکارتی نقطه p باشد مختصات کروی آن را بیابید.

جواب:

$$\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲=۱+۰+۱=۲\Rightarrow \rho=\sqrt{۲}$$

$$x=\rho \sin\phi \cos\theta\ ,\ y=\rho \sin\phi \sin\theta\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta\Rightarrow \theta=\tan^{-۱}\frac{y}{x}\Rightarrow \theta=\tan^{-۱}(\frac{۰}{۱})=۰$$

$$z=\rho \cos\phi\Rightarrow \phi=\cos^{-۱}(\frac{z}{\rho})=\cos^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۲}})=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow (\rho,\phi,\theta)=(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴},۰)$$

۴) اگر $(\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}, ۲, ۲)$ مختصات دکارتی نقطه p باشد، مختصات کروی آن را تعیین کنید.

جواب:

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x} = \tan^{-۱}(\frac{۲}{۲}) = \frac{\pi}{۴}$$

$$\rho = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} = \sqrt{\frac{۳۲}{۳}}$$

$$\phi = \cos^{-۱}(\frac{z}{\rho}) = \cos^{-۱}\left(\frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}}{\sqrt{\frac{۳۲}{۳}}}\right) = \cos^{-۱}(\frac{۱}{۲}) = \frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow (\rho, \phi, \theta) = (\sqrt{\frac{۳۲}{۳}}, \frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۴})$$

در تمرین‌های ۵ تا ۸، انتگرالهای مکرر داده شده را محاسبه کنید.

۵) $\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۰^{۱} \rho^۲ \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

جواب:

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۰^{۱} \rho^۲ \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} (\frac{\rho^۳}{۳}\sin\phi]_۰^۱) d\phi d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{۳}\sin\phi \, d\phi \, d\theta = \int_۰^{۲\pi} (-\frac{۱}{۳}\cos\phi]_۰^{\frac{\pi}{۴}}) d\theta = \int_۰^{۲\pi} (\frac{۲-\sqrt{۲}}{۶}) d\theta = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۶}\theta]_۰^{۲\pi} = \frac{\pi(۲-\sqrt{۲})}{۳}$$

---

۶) $\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۱^{۳} \rho^۳ \cos\phi \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

جواب:

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۱^{۳} \rho^۳ \cos\phi \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{\rho^۴}{۴}\cos\phi\sin\phi]_۱^۳) d\phi d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} ۲۰\cos\phi\sin\phi d\phi d\theta = \int_۰^{۲\pi} (۱۰\sin^۲\phi]_۰^{\frac{\pi}{۲}}) d\theta = \int_۰^{۲\pi} ۱۰ d\theta = ۱۰\theta]_۰^{۲\pi} = ۲۰\pi$$

---

۷) $\int_۰^{\pi}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\int_۱^{۲} \rho^۴ \sin^۲\phi \cos^۲\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

جواب:

$$\int_۰^{\pi}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\int_۱^{۲} \rho^۴ \sin^۲\phi \cos^۲\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_۰^{\pi}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} (\frac{\rho^۵}{۵}\sin^۲\phi\cos^۲\theta]_۱^۲) d\phi d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{31}{5}\sin^2\phi\cos^2\theta\,d\phi d\theta=\int_0^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{31}{5}\cos^2\theta\left(\frac{1-\cos2\phi}{2}\right)d\phi d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{31}{5}\cos^2\theta\left(\frac{1}{2}\phi-\frac{1}{4}\sin2\phi\right)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)d\theta=\int_0^{\pi}\frac{31}{5}\cos^2\theta\left(\frac{\pi}{4}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{31\pi}{20}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{31\pi}{20}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin2\theta\right)\Big]_0^{\pi}=\frac{31\pi^2}{40}$$

---

۸) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\theta}\int_0^{9\sec\phi}\rho\cos^2\phi\cos\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

جواب:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\theta}\int_0^{9\sec\phi}\rho\cos^2\phi\cos\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\theta}\left(\frac{\rho^2}{2}\cos^2\phi\cos\theta\Big]_0^{9\sec\phi}\right)d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\theta}\frac{81}{2}\cos\theta\,d\phi\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{81}{2}\cos\theta\,\phi\Big]_0^{\theta}\right)d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{81}{2}\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\begin{cases}u=\theta\\ dV=\cos\theta\,d\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=d\theta\\ V=\sin\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{81}{2}\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{81}{2}\theta\sin\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{81}{2}\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{81}{2}.\frac{\pi(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{24}+\left(\frac{81}{2}\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\right)=\left(\frac{\pi(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{24}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{81}{2}\right)$$

در تمرین‌های ۹ و ۱۰، انتگرالهای سه‌گانهٔ داده شده را در مختصات کروی محاسبه کنید.

۹) $\iiint_D x^2dV$ **که در آن D ناحیه بین دو کرهٔ** $x^2+y^2+z^2=4$ **و** $x^2+y^2+z^2=9$ **است.**

جواب: با جایگذاری $x=\rho\sin\phi\cos\theta$ و $dV=\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ داریم:

$$\iiint_D x^2dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^{3}\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{2}^{3}\rho^{4}\mathrm{Sin}^{3}\phi\mathrm{Cos}^{2}\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\rho^{5}}{5}\mathrm{Sin}^{3}\phi\,\mathrm{Cos}^{2}\theta\Big]_{2}^{3}\right)d\phi\, d\theta$$

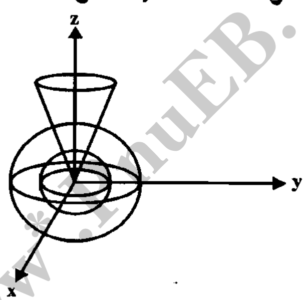
$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{211}{5}\mathrm{Sin}^{3}\phi\,\mathrm{Cos}^{2}\theta\, d\phi\, d\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{211}{5}\mathrm{Sin}\phi\,(1-\mathrm{Cos}^{2}\phi)\,\mathrm{Cos}^{2}\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{211}{5}\left(-\mathrm{Cos}\phi+\frac{\mathrm{Cos}^{3}\phi}{3}\right)\mathrm{Cos}^{2}\theta\Big]_{0}^{\pi}\right)d\theta=\int_{0}^{2\pi}\frac{844}{15}\mathrm{Cos}^{2}\theta d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\frac{844}{5}\left(\frac{1+\mathrm{Cos}2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{844}{5}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\mathrm{Sin}2\theta}{4}\right)\Big]_{0}^{2\pi}=\frac{844\pi}{15}$$

---

۱۰) $\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dV$، که در آن D ناحیه واقع در بالای صفحه xy و محدود به مخروط $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ و دو کرهٔ $x^2+y^2+z^2=9$ و $x^2+y^2+z^2=81$ است.



جواب: می‌دانیم هر سطح به فرم $z^2\mathrm{Cot}^2\phi=x^2+y^2$ مخروطی است که زاویه آن با محور zها برابر ϕ می‌باشد. لذا:

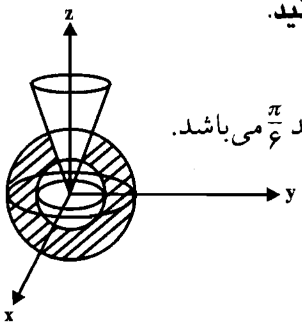
$$z=\sqrt{3x^2+3y^2}\Rightarrow z^2\frac{1}{3}=x^2+y^2\Rightarrow \mathrm{Cot}\phi=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow V=\iiint_D\frac{1}{\rho^2}dV=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{3}^{9}\frac{1}{\rho^2}\rho^2\,\mathrm{Sin}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\rho\,]_{3}^{9})\,\mathrm{Sin}\phi\, d\phi\, d\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}6\mathrm{Sin}\phi d\phi d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}(-6\mathrm{Cos}\phi\,]_{0}^{\frac{\pi}{3}})d\theta=\int_{0}^{2\pi}3d\theta=3\theta]_{0}^{2\pi}=6\pi$$

۱۱) حجم ناحیهٔ D بین دو کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ و زیر مخروط $z=\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۳}}$ را با استفاده از مختصات کروی حساب کنید.



جواب: همانند تمرین قبل $z=\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۳}}$ مخروطی با زاویه مولد $\frac{\pi}{۶}$ می‌باشد.

$$۳z^۲=x^۲+y^۲ \Rightarrow \text{Cot}\phi=\sqrt{۳} \Rightarrow \phi=\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow V=\iiint_D \rho^۲\text{Sin}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\pi}\int_۱^۲ \rho^۲\text{Sin}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\pi}(\frac{\rho^۳}{۳}\text{Sin}\phi]_۱^۲)d\phi\, d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\pi}\frac{۷}{۳}\text{Sin}\phi\, d\phi\, d\theta=\int_۰^{۲\pi}(-\frac{۷}{۳}\text{Cos}\phi]_{\frac{\pi}{۶}}^{\pi})d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\frac{۷}{۳}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})d\theta=\frac{۷}{۳}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})۲\pi$$

---

۱۲) با استفاده از مختصات کروی فرمولی برای حجم یک کره پیدا کنید.

جواب: معادله کره‌ای به معادله $x^۲+y^۲+z^۲=r^۲$ به صورت $\rho=r$ در مختصات قطبی می‌باشد.

لذا:

$$V=\iiint_D dV$$

که در آن V ناحیه داخل کره می‌باشد.

$$V=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۰^{r}\rho^۲\text{Sin}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}(\frac{\rho^۳}{۳}\text{Sin}\phi]_۰^{r})\, d\phi d\theta$$

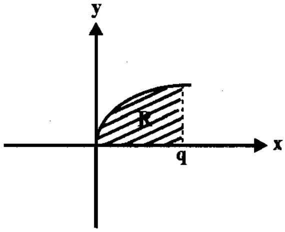
$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\frac{r^۳}{۳}\text{Sin}\phi\, d\phi\, d\theta=\int_۰^{۲\pi}(-\frac{r^۳}{۳}\text{Cos}\phi]_۰^{\pi})d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\frac{2r^3}{3}d\theta=\frac{2r^3}{3}\theta]_{\circ}^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

۷.۸) کاربردهای فیزیکی

در تمرین‌های ۱ تا ۴، جرم و مرکز جرم ورق مسطحهٔ با چگالی $\rho(x,y)$ و محدود به نمودارهای معادلات داده شده را پیدا کنید.

جواب: $\rho(x,y)=x+y\ ,\ y=0\ ,\ x=9\ ,\ y=\sqrt{x}$



$$m=\iint_R \rho(x,y)dA$$

$$\Rightarrow m=\int_{\circ}^{9}\int_{\circ}^{\sqrt{x}}(x+y)dydx=\int_{\circ}^{9}(xy+\frac{y^2}{2}]_{\circ}^{\sqrt{x}})dx=\int_{\circ}^{9}(x\sqrt{x}+\frac{x}{2})dx$$

$$=(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{4})]_{\circ}^{9}=\frac{2}{5}\times 243+\frac{81}{4}=\frac{2349}{20}$$

$$M_x=\iint_R y\rho(x,y)dA=\int_{\circ}^{9}\int_{\circ}^{\sqrt{x}}(yx+y^2)dydx=\int_{\circ}^{9}(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}]_{\circ}^{\sqrt{x}})dx$$

$$=\int_{\circ}^{9}(\frac{x^2}{2}+\frac{x\sqrt{x}}{3})dx=(\frac{x^3}{6}+\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}})]_{\circ}^{9}=\frac{729}{6}+\frac{486}{15}=\frac{4617}{30}$$

$$M_y=\iint_R x\rho(x,y)dA=\int_{\circ}^{9}\int_{\circ}^{\sqrt{x}}(x^2+xy)dydx=\int_{\circ}^{9}(x^2y+\frac{xy^2}{2}]_{\circ}^{\sqrt{x}})dx$$

$$=\int_{\circ}^{9}(x^2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2})dx=(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^3}{6})]_{\circ}^{9}=\frac{10449}{14}$$

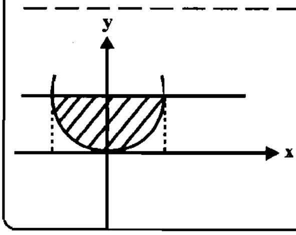
$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=1/31\ ,\ \ \bar{x}=\frac{M_y}{m}=6/35$$

---

۲) $\rho(x,y)=|x|\ ,\ y=4\ ,\ y=x^2$

جواب:

$$\rho(x,y)=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x>0\end{cases}$$



$$m=\iint_R \rho(x,y)dA=\int_{-2}^{0}\int_{x^2}^{4} -xdydx+\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{4} xdydx$$

$$=\int_{-2}^{0}(-xy]_{x^2}^{4})dx+\int_{0}^{2}(xy]_{x^2}^{4})dx=\int_{-2}^{0}(-4x+x^3)dx+\int_{0}^{2}(4x-x^3)dx$$

$$=(-2x^2+\frac{x^4}{4})]_{-2}^{0}+(2x^2-\frac{x^4}{4})]_{0}^{2}=4+4=8$$

$$M_x=\iint_R y\rho(x,y)dA=\int_{-2}^{0}\int_{x^2}^{4} -xydydx+\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{4} xydydx$$

$$=\int_{-2}^{0}(-x\frac{y^2}{2}]_{x^2}^{4})dx+\int_{0}^{2}(x\frac{y^2}{2}]_{x^2}^{4})dx=\int_{-2}^{0}(\frac{x^5}{2}-8x)dx+\int_{0}^{2}(8x-\frac{x^5}{2})dx$$

$$=(\frac{x^6}{12}-4x^2)]_{-2}^{0}+(4x^2-\frac{x^6}{12})]_{0}^{2}=(-\frac{64}{12}+16)+(16-\frac{64}{12})=\frac{64}{3}$$

$$M_y=\iint_R x\rho(x,y)dA=\int_{-2}^{0}\int_{x^2}^{4} -x^2dydx+\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{4} x^2dydx$$

$$=\int_{-2}^{0}(-x^2y]_{x^2}^{4})dx+\int_{0}^{2}(x^2y]_{x^2}^{4})dx=\int_{-2}^{0}(x^4-4x^2)dx+\int_{0}^{2}(4x^2-x^4)dx$$

$$=(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3})]_{-2}^{0}+(\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5})]_{0}^{2}=0$$

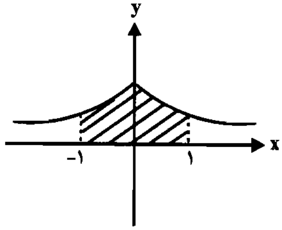
$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{8}{3}\quad,\quad \bar{x}=\frac{M_y}{m}=0$$

---

۳) $\rho(x,y)=|xy|\quad,\ x=1\quad,\ x=-1\quad,\ y=0\quad,\ y=e^{-x^2}$

جواب:

$$\rho(x,y)=|xy|=\begin{cases}xy & x>0\\ -xy & x<0\end{cases}$$



$$m=\iint_R \rho(x,y)dA=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{e^{-x^2}} -xy\,dydx+\int_{0}^{1}\int_{0}^{e^{-x^2}} xydydx$$

$$=\int_{-۱}^{۰}(-\frac{xy^۲}{۲}]_{۰}^{e^{-x^۲}})dx+\int_{۰}^{۱}(\frac{xy^۲}{۲}]_{۰}^{e^{-x^۲}})dx=\int_{-۱}^{۰}\frac{-xe^{-۲x^۲}}{۲}dx+\int_{۰}^{۱}\frac{xe^{-۲x^۲}}{۲}dx$$

$$=\frac{۱}{۸}e^{-۲x^۲}]_{-۱}^{۰}-\frac{۱}{۸}e^{-۲x^۲}]_{۰}^{۱}=\frac{۱-e^{۲}}{۴}$$

$$M_x=\iint_R y\rho(x,y)dA=\int_{-۱}^{۰}\int_{۰}^{e^{-x^۲}}-xy^۲dydx+\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{e^{-x^۲}}xy^۲dydx$$

$$=\int_{-۱}^{۰}(-\frac{xy^۳}{۳}]_{۰}^{e^{-x^۲}})dx+\int_{۰}^{۱}(\frac{xy^۳}{۳}]_{۰}^{e^{-x^۲}})dx=\int_{-۱}^{۰}-\frac{xe^{-۳x^۲}}{۳}dx+\int_{۰}^{۱}\frac{xe^{-۳x^۲}}{۳}dx$$

$$=\frac{۱}{۱۸}e^{-۳x^۲}]_{-۱}^{۰}-\frac{۱}{۱۸}e^{-۳x^۲}]_{۰}^{۱}=\frac{۱-e^{-۳}}{۹}$$

$$M_y=\iint_R x\rho(x,y)dA=\int_{-۱}^{۰}\int_{۰}^{e^{-x^۲}}-x^۲ydydx+\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{e^{-x^۲}}x^۲ydydx$$

$$=\int_{-۱}^{۰}(-\frac{x^۲y^۲}{۲}]_{۰}^{e^{-x^۲}})dx+\int_{۰}^{۱}(\frac{x^۲y^۲}{۲}]_{۰}^{e^{-x^۲}})dx=\int_{-۱}^{۰}-\frac{x^۲e^{-۲x^۲}}{۲}dx+\int_{۰}^{۱}\frac{x^۲e^{-۲x^۲}}{۲}dx=۰$$

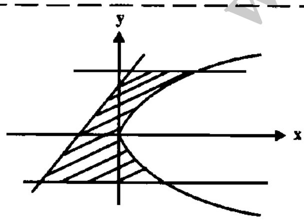
زیرا تابع $f(x)=\frac{x^۲e^{-۲x^۲}}{۲}$ تابعی زوج می‌باشد، لذا $\int_{-۱}^{۰}f(x)dx$ برابر با $\int_{۰}^{۱}f(x)dx$ می‌باشد

و $\int_{-۱}^{۰}-f(x)dx+\int_{۰}^{۱}f(x)dx=۰$ می‌باشد.

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{۴-۴e^{-۳}}{۹-۹e^{-۲}}\quad,\quad\bar{x}=\frac{M_y}{m}=۰$$

---

۴) $\rho(x,y)=۱$, $y=۳$, $y=-۲$, $y-x=۲$, $x=y^۲$



جواب:

$$m=\iint_R\rho(x,y)dA=\int_{-۲}^{۳}\int_{y-۲}^{y^۲}dxdy=\int_{-۲}^{۳}(x]_{y-۲}^{y^۲})dy=\int_{-۲}^{۳}(y^۲-y+۲)dy$$

$$=\frac{y^۳}{۳}-\frac{y^۲}{۲}+۲y]_{-۲}^{۳}=\frac{۱۱۵}{۶}$$

$$M_x=\iint_R y\rho(x,y)\,dA=\int_{-۲}^{۳}\int_{y-۲}^{y^۲}(yx]_{y-۲}^{y^۲})\,dy$$

$$=\int_{-2}^{3}(y^3-y^2+2y)\,dy=\frac{y^4}{4}-\frac{y^3}{3}+y^2\Big]_{-2}^{3}=\frac{115}{12}$$

$$M_y=\iint_R x\rho(x,y)\,dA=\int_{-2}^{3}\int_{y-2}^{y^2}x\,dx\,dy=\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{2}\Big]_{y-2}^{y^2}\right)dy$$

$$=\int_{-2}^{3}\left(\frac{y^4}{2}-\frac{y^2}{2}+2y-2\right)dy=\frac{y^5}{10}-\frac{y^3}{6}+y^2-2y\Big]_{-2}^{3}=\frac{50}{3}$$

$$\bar{y}=\frac{Mx}{m}=\frac{1}{2}\quad,\quad \bar{x}=\frac{My}{m}=\frac{20}{23}=0/869$$

---

۵) گشتاورهای دوم I_x ، I_y ، I_0 را برای ورق مسطحهٔ تمرین ۱ پیدا کنید.

جواب:

$$I_x=\iint_R y^2\rho(x,y)\,dA=\int_0^9\int_0^{\sqrt{x}}(xy^2+y^3)\,dy\,dx=\int_0^9\left(\frac{xy^3}{3}+\frac{y^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int_0^9\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3}+\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(\frac{2}{21}x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^3}{12}\right)\Big]_0^9=269/035$$

$$I_y=\iint_R x^2\rho(x,y)\,dA=\int_0^9\int_0^{\sqrt{x}}(x^3+x^2y)\,dy\,dx=\int_0^9\left(x^3y+\frac{x^2y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int_0^9\left(x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^3}{2}\right)dx=\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{x^4}{8}\Big]_0^9=5194/125$$

$$I_0=\iint_R (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dA=I_x+I_y=5463/16$$

---

۶) تمرین ۵ را برای ورق مسطحه تمرین ۲ حل کنید.

جواب:

$$I_x=\iint_R y^2\rho(x,y)\,dA=\int_{-2}^{0}\int_{x^2}^{4}-xy^2\,dy\,dx+\int_0^2\int_{x^2}^{4}xy^2\,dy\,dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(-x\frac{y^3}{3}\Big]_{x^2}^{4}\right)dx+\int_0^2\left(x\frac{y^3}{3}\Big]_{x^2}^{4}\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{x^7}{3}-\frac{64}{3}x\right)dx$$

$$+\int_0^2\left(\frac{64}{3}x-\frac{x^7}{3}\right)dx=\left(\frac{x^8}{24}-\frac{32}{3}x^2\right)\Big]_{-2}^{0}+\left(\frac{32}{3}x^2-\frac{x^8}{24}\right)\Big]_0^2=64$$

$$I_y=\iint_R x^2\rho(x,y)\,dA=\int_{-2}^{0}\int_{x^2}^{4}-x^3\,dy\,dx+\int_0^2\int_{x^2}^{4}x^3\,dy\,dx$$

$$=\int_{-۲}^{۰}(-\frac{x^۴}{۴}]_{x^۲}^{۴})\,dx+\int_{۰}^{۲}(\frac{x^۴}{۴}]_{x^۲}^{۴})\,dx=\int_{-۲}^{۰}(\frac{x^۸}{۴}-۶۴)\,dx$$

$$+\int_{۰}^{۲}(۶۴-\frac{x^۸}{۴})\,dx=(\frac{x^۹}{۳۶}-۶۴x)]_{-۲}^{۰}+(۶۴x-\frac{x^۹}{۳۶})]_{۰}^{۲}=۰$$

$$I_۰=\iint_R (x^۲+y^۲)\rho(x,y)\,dA=I_x+I_y=۶۴$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۰، مرکز جرم جسم با چگالی $\rho(x,y,z)$ و محدود به ناحیه داده شده را پیدا کنید.

---

۷) ناحیه D محدود به نمودارهای $z=۱-x^۲-y^۲$ و $z=x^۲+y^۲$ و $\rho(x,y,z)=۲-z$

جواب:

$$z=x^۲+y^۲=۱-x^۲-y^۲\Rightarrow x^۲+y^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$m=\iiint_D \rho\,dv=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\int_{r^۲}^{۱-r^۲}(۲-z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}(r\,(۲z-\frac{z^۲}{۲})]_{r^۲}^{۱-r^۲})\,dr\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}(\frac{۳}{۲}r-۳r^۳)\,dr\,d\theta$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}((\frac{۳}{۴}r^۲-\frac{۳}{۴}r^۴)]_{۰}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}})\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۳}{۱۶}\,d\theta=\frac{۳}{۸}\pi$$

$$M_{xy}=\iiint_D z\rho(x,y,z)\,dv=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\int_{r^۲}^{۱-r^۲}(۲z-z^۲)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}(r\,(z^۲-\frac{z^۳}{۳})]_{r^۲}^{۱-r^۲})\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}(\frac{۲}{۳}r-r^۳-r^۵+\frac{۲}{۳}r^۷)\,dr\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}(\frac{r^۲}{۳}-\frac{r^۴}{۴}-\frac{r^۶}{۶}+\frac{r^۸}{۱۲}]_{۰}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱۷}{۱۹۲}\,d\theta=\frac{۱۷\pi}{۹۶}$$

$$M_{xz}=\iiint_D y\rho(x,y,z)\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{r^2}^{1-r^2} r^2\sin\theta(2-z)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(r^2\sin\theta(2z-\frac{z^2}{2})\Big]_{r^2}^{1-r^2}\right)dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2\sin\theta(\frac{3}{2}-3r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{2}\sin\theta-\frac{3r^5}{5}\sin\theta\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{20}\sin\theta\,d\theta=-\frac{\sqrt{2}}{20}\cos\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$

$$M_{yz}=\iiint_D x\rho(x,y,z)\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{r^2}^{1-r^2} r^2\cos\theta(2-z)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(r^2\cos\theta(2z-\frac{z^2}{2})\Big]_{r^2}^{1-r^2}\right)dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2\cos\theta(\frac{3}{2}-3r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\cos\theta(\frac{3}{2}-\frac{3r^5}{5}\cos\theta\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{20}\cos\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=0\quad,\quad\bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}=0\quad,\quad\bar{z}=\frac{M_{yx}}{m}=\frac{17}{36}$$

---

۸) ناحیهٔ D محدود به نمیکرهٔ بالائی $x^2+y^2+z^2=9$ **و** $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$

$$m=\iiint_D \rho\,dv$$

جواب:

با استفاده از مختصات کروی داریم.

$$m=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}\sqrt{\rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}\rho^3\sin^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\phi\,\frac{\rho^4}{4}\Big]_0^3)\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{81}{4}\sin^2\phi\,d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{81}{4}\left(\frac{1-\cos2\phi}{2}\right)d\phi\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{81}{4}\left(\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{4}\operatorname{Sin}2\phi\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right) d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{81\pi}{16}\, d\theta = \frac{81\pi^2}{8}$$

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)\, dv = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{3} \rho^2 \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\phi\, \rho^2 \operatorname{Sin}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{3} \rho^4 \operatorname{Sin}^2\phi \operatorname{Cos}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^5}{5}\operatorname{Sin}^2\phi \operatorname{Cos}\phi\,\Big]_{0}^{3}\right) d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{243}{5}\operatorname{Sin}^2\phi \operatorname{Cos}\phi\, d\phi\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{243}{5} \cdot \frac{\operatorname{Sin}^3\phi}{3}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right) d\theta$$

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{243}{15}\, d\theta = \frac{162}{5}\pi$$

$$M_{xz} = \iiint_D y\,\rho(x,y,z)\, dv = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{3} \rho^4 \operatorname{Sin}^3\phi \operatorname{Sin}\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^5}{5}\operatorname{Sin}^3\phi \operatorname{Sin}\theta\,\Big]_{0}^{3}\right) d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{243}{5}\operatorname{Sin}^3\phi \operatorname{Sin}\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{243}{5}\operatorname{Sin}\theta\left(\operatorname{Sin}\phi\left(1 - \operatorname{Cos}^2\phi\right)\right) d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{243}{5}\operatorname{Sin}\theta\left(-\operatorname{Cos}\phi + \frac{\operatorname{Cos}^3\phi}{3}\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right) d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{243}{5}\operatorname{Sin}\theta\left(\frac{2}{3}\right) d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{486}{15}\operatorname{Sin}\theta\, d\theta = \frac{-486}{15}\operatorname{Cos}\theta\,\Big]_{0}^{2\pi} = 0$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\,\rho(x,y,z)\, dv = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{0}^{3} \rho^4 \operatorname{Sin}^3\phi \operatorname{Cos}\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^5}{5}\operatorname{Sin}^3\phi \operatorname{Cos}\theta\,\Big]_{0}^{3}\right) d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۲۴۳}{۵}\,\text{Sin}^{۳}\phi\,\text{Cos}\theta\,d\phi\,d\theta=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۲۴۳}{۵}\text{Cos}\theta\,(\text{Sin}\phi\,(۱-\text{Cos}^{۲}\phi))\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\left(\frac{۲۴۳}{۵}\text{Cos}\theta\left(-\text{Cos}\phi+\frac{\text{Cos}^{۳}\phi}{۳}\right)\Big]_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\right)d\theta$$

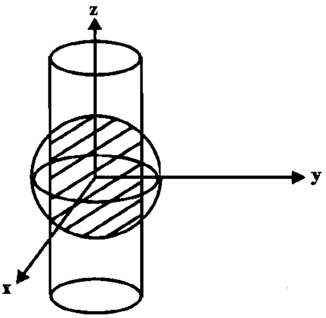
$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{۲۴۳}{۵}\text{Cos}\theta\left(\frac{۲}{۳}\right)d\theta=\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{۴۸۶}{۱۵}\text{Cos}\theta\,d\theta=\frac{۴۸۶}{۱۵}\,\text{Sin}\theta\,\Big]_{\circ}^{۲\pi}=\circ$$

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\circ\quad,\quad\bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}=\circ\quad,\quad\bar{z}=\frac{M_{yx}}{m}=\frac{۱۶}{۵\pi}$$

---

۹) ناحیه D در درون کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ و استوانه $x^{۲}+y^{۲}=۲$ و $\rho(x,y,z)=z^{۲}+۱$

جواب: $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴\;\Rightarrow\;z=\pm\sqrt{۴-r^{۲}}$



$$m=\iiint_{D}\rho\,dv=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\sqrt{۲}}\int_{-\sqrt{۴-r^{۲}}}^{\sqrt{۴-r^{۲}}}r\,(z^{۲}+۱)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\sqrt{۲}}\left(r\left(\frac{z^{۳}}{۳}+z\right)\Big]_{-\sqrt{۴-r^{۲}}}^{\sqrt{۴-r^{۲}}}\right)dr\,d\theta=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\sqrt{۲}}\left(\frac{۲r}{۳}(۴-r^{۲})^{\frac{۳}{۲}}+۲r(۴-r^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\left(-\frac{۲}{۱۵}(۴-r^{۲})^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۲}{۳}(۴-r^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\Big]_{\circ}^{\sqrt{۲}}\right)d\theta=\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{۱۴۴-۲۸\sqrt{۲}}{۱۵}\,d\theta$$

$$=\frac{۱۴۴-۲۸\sqrt{۲}}{۱۵}\,\theta\,\Big]_{\circ}^{۲\pi}=\frac{۲\pi}{۱۵}(۱۴۴-۲۸\sqrt{۲})$$

$$M_{xy}=\iiint_{D}z\rho(x,y,z)\,dv=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\sqrt{۲}}\int_{-\sqrt{۴-r^{۲}}}^{\sqrt{۴-r^{۲}}}r\,(z^{۳}+z)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\sqrt{۲}}\left(r\left(\frac{z^{۴}}{۴}+\frac{z^{۲}}{۲}\right)\Big]_{-\sqrt{۴-r^{۲}}}^{\sqrt{۴-r^{۲}}}\right)dr\,d\theta=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\sqrt{۲}}\circ\,dr\,d\theta=\circ$$

$$M_{xz}=\iiint_D y\rho(x,y,z)\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r^2\sin\theta(z^2+1)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left(r^2\sin\theta\left(\frac{z^3}{3}+z\right)\Big]_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}\right)dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sin\theta\left(\frac{2(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right.$$

$$\left.+2(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\right)dr\,d\theta$$

با تغییر متغیر $r=2\,\mathrm{Sin}t$ و $dr=2\mathrm{Cos}\,t\,dt$ داریم.

$$M_{xz}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{128}{3}\mathrm{Sin}^2t\,\mathrm{Cos}^4t+32\mathrm{Sin}^2t\,\mathrm{Cos}^2t\right)\sin\theta\,dt\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{20}{3}-\frac{20}{3}\mathrm{Cos}4t+\mathrm{Sin}^2 2t\,\mathrm{Cos}2t\right)\sin\theta\,dt\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{20}{3}t-\frac{5}{3}\mathrm{Sin}4t+\frac{1}{6}\mathrm{Sin}^3 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\sin\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{(10\pi+1)}{6}\sin\theta\,d\theta=-\frac{10\pi+1}{6}\cos\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$

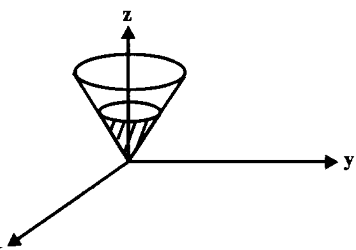
مشابهاً $M_{yz}=0$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=0\ ,\quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}=0,\quad \bar{z}=\frac{M_{yx}}{m}=0$$

---

۱۰) ناحیه D محدود به صفحهٔ $z=1$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\rho(x,y,z)=z$

جواب: $z=\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=1$



$$m=\iiint_D \rho\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 zr\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{z^2}{2}r\Big]_r^1\right)dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{r}{2}-\frac{r^3}{2}\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{8}\right]_{\circ}^{1})\,d\theta=\int_{\circ}^{2\pi}\frac{1}{8}\,d\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$M_{xy}=\iiint_D z\rho(x,y,z)\,dv=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\int_{r}^{1} z^2 r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\left(\frac{z^3}{3}r\right]_{r}^{1})\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\left(\frac{r}{3}-\frac{r^4}{3}\right)dr\,d\theta=\int_{\circ}^{2\pi}\frac{1}{10}\,d\theta=\frac{\pi}{5}$$

$$M_{xz}=\iiint_D y\rho(x,y,z)\,dv=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\int_{r}^{1} r\,\mathrm{Sin}\theta\, z\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\left(r\,\mathrm{Sin}\theta\,\frac{z^2}{2}\right]_{r}^{1})\,dr\,d\theta=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Sin}\theta\,(r-r^3)\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\frac{1}{8}\mathrm{Sin}\theta\,d\theta=-\frac{1}{8}\,\mathrm{Cos}\theta\,\Big]_{\circ}^{2\pi}=\circ$$

$$M_{yz}=\iiint_D x\rho(x,y,z)\,dv=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\int_{r}^{1} r\,\mathrm{Cos}\theta\, z\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\theta\,(r-r^3)\right)dr\,d\theta=\int_{\circ}^{2\pi}\frac{1}{8}\mathrm{Cos}\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\mathrm{Sin}\theta\,\Big]_{\circ}^{2\pi}=\circ$$

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\circ\quad,\quad\bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}=\circ\quad,\quad\bar{z}=\frac{M_{yx}}{m}=\frac{4}{5}$$

در تمرینهای ۱۱ و ۱۲، گشتاورهای دوم جسم با مشخصات داده شده را پیدا کنید.

۱۱) جسم محدود به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=25$ با چگالی ثابت $\rho(x,y,z)=5$

جواب:

$$I_x=\iiint_D (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dv$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{5} 5(\rho^2\,\mathrm{Sin}^2\phi\,\mathrm{Sin}^2\theta+\rho^2\,\mathrm{Cos}^2\phi)\rho^2\,\mathrm{Sin}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}\rho^5(\mathrm{Sin}^3\phi\,\mathrm{Sin}^2\theta+\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}^2\phi)\Big]_{\circ}^{5}\,d\phi\,d\theta$$

$$=5^5\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}(\mathrm{Sin}\phi\,(1-\mathrm{Cos}^2\phi)\,\mathrm{Sin}^2\theta+\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}^2\phi)\,d\phi\,d\theta$$

$$= ۵^۵ \int_۰^{۲\pi} ((-\text{Cos}\phi + \frac{\text{Cos}^۳}{۳})\,\text{Sin}^۲\theta - \frac{\text{Cos}^۳\phi}{۳})\Big]_۰^{\pi}\,)d\theta$$

$$= ۵^۵ \int_۰^{۲\pi} (\frac{۴}{۳}\,\text{Sin}^۲\theta + \frac{۲}{۳})d\theta$$

$$= ۵^۵ \int_۰^{۲\pi} (\frac{۴}{۳}(\frac{۱-\text{Cos}\,۲\theta}{۲}) + \frac{۲}{۳})d\theta = ۵^۵(\frac{۲}{۳}\theta - \frac{۱}{۳}\text{Sin}\,۲\theta + \frac{۲}{۳}\theta)\,]_۰^{۲\pi} = ۵^۵ . \frac{۸\pi}{۳}$$

$$I_y = \iiint_D (x^۲ + z^۲)\,\rho(x,y,z)\,dv$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۰^{۵} ۵(\rho^۲\,\text{Sin}^۲\phi\,\text{Cos}^۲\theta + \rho^۲\,\text{Cos}^۲\phi)\rho^۲\,\text{Sin}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi} \rho^۵(\text{Sin}^۳\phi\,\text{Cos}^۲\theta + \text{Cos}^۲\phi\,\text{Sin}\phi)\,]_۰^۵\,d\phi\,d\theta$$

$$= ۵^۵\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi} (\text{Sin}\phi\,(۱-\text{Cos}^۲\phi)\,\text{Cos}^۲\theta + \text{Cos}^۲\phi\,\text{Sin}\phi)\,d\phi\,d\theta$$

$$= ۵^۵ \int_۰^{۲\pi} ((-\text{Cos}\phi + \frac{\text{Cos}^۳\phi}{۳})\,\text{Cos}^۲\theta - \frac{\text{Cos}^۳\phi}{۳})\Big]_۰^{\pi}\,)\,d\theta$$

$$= ۵^۵ \int_۰^{۲\pi} (\frac{۴}{۳}\text{Cos}^۲\theta + \frac{۲}{۳})d\theta = ۵^۵\int_۰^{۲\pi} \frac{۴}{۳}(\frac{۱+\text{Cos}\,۲\theta}{۲}) + \frac{۲}{۳})\,d\theta$$

$$= ۵^۵(\frac{۲}{۳}\theta + \frac{۱}{۳}\,\text{Sin}\,۲\theta + \frac{۲}{۳}\theta)\,]_۰^{۲\pi} = ۵^۵\,\frac{۸\pi}{۳}$$

$$I_z = \iiint_D (x^۲ + z^۲)\,\rho(x,y,z)\,dv$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۰^{۵} ۵(\rho^۲\,\text{Sin}^۲\phi\,\text{Cos}^۲\theta + \rho^۲\,\text{Sin}^۲\phi\,\text{Sin}^۲\theta)\rho^۲\,\text{Sin}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۰^{۵} ۵(\rho^۴\,\text{Sin}^۳\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi} (\rho^۵\,\text{Sin}^۳\theta]_۰^۵)\,d\phi\,d\theta = ۵^۵\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi} \text{Sin}\phi\,(۱-\text{Cos}^۲\phi)\,d\phi\,d\theta$$

$$=۵^۵\int_۰^{۲\pi}((-\text{Cos}\phi+\frac{\text{Cos}^۳\phi}{۳})]_۰^{\pi})\,d\theta=۵^۵\int_۰^{۲\pi}\frac{۴}{۳}\,d\theta=۵^۵(\frac{۸\pi}{۳})$$

---

۱۲) جسم محدود به استوانهٔ $x^۲+y^۲=۴$ و صفحه‌های $z=۰$ و $z=۶$ با چگالی ثابت $\rho(x,y,z)=۲$

جواب:

$$I_x=\iiint_D(y^۲+z^۲)\,\rho(x,y,z)\,dv=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}\int_۰^{۶}۲(r^۲\text{Sin}^۲\theta+z^۲)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}(۲zr^۲\text{Sin}^۲\theta+\frac{۲z^۳}{۳}]_۰^{۶})\,dr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}(۱۲r^۲\text{Sin}^۲\theta+۱۴۴)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}(۴r^۳\text{Sin}^۲\theta+۱۴۴r]_۰^{۲})\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}(۳۲\,\text{Sin}^۲\theta+۲۸۸)\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}(۳۲(\frac{۱-\text{Cos}۲\theta}{۲})+۲۸۸)\,d\theta=۱۶\theta-۸\text{Sin}۲\theta+۲۸۸\theta]_۰^{۲\pi}=۶۰۸\pi$$

$$I_y=\iiint_D(x^۲+z^۲)\rho(x,y,z)\,dv=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}\int_۰^{۶}۲(r^۲\text{Cos}^۲\theta+z^۲)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}(۱۲r^۲\text{Cos}^۲\theta+۱۴۴)\,dr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}(۳۲\,\text{Cos}^۲\theta+۲۸۸)\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}(۳۲(\frac{۱+\text{Cos}۲\theta}{۲})+۲۸۸)\,d\theta=۱۶\theta+۸\text{Sin}۲\theta+۲۸۸\theta=۶۰۸\pi$$

$$I_y=\iiint_D(x^۲+y^۲)\rho(x,y,z)\,dv=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}\int_۰^{۶}۲(r^۲\text{Cos}^۲\theta+r^۲\text{Sin}^۲\theta)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}\int_۰^{۶}۲r^۲\,dz\,dr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}(۲r^۲z]_۰^{۶})\,dr\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}۱۲r^۲\,dr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}(۴r^۳]_۰^{۲})\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}۳۲\,d\theta=۶۴\pi$$

آزمون چهار گزینه‌ای فصل هشتم

۱) مقدار $\int_{۰}^{۲}\int_{y}^{۲y} x\,dx\,dy$ برابر است با:

الف) ۰ ب) $\frac{۸}{۳}$ ج) ۲ د) ۴

۲) مقدار $\int_{۱}^{۴}\int_{۱}^{x}\int_{۰}^{x} x\,dz\,dy\,dx$ برابر است با:

الف) ۳۶ ب) ۶۰ ج) $\frac{۱۳۰}{۳}$ د) $\frac{۱۲۴}{۳}$

۳) اگر R ناحیهٔ محدود به نمودارهای $y=x^{۲}$ و $y=۲x$ باشد آنگاه $\iint_{R} f(x,y)\,dA$ برابر است با:

الف) $\int_{۰}^{۲}\int_{y}^{y^{۲}} f(x,y)\,dx\,dy$ ب) $\int_{۰}^{۲}\int_{x}^{۲x} f(x,y)\,dx\,dy$

ج) $\int_{۰}^{۲}\int_{x^{۲}}^{۲x} f(x,y)\,dy\,dx$ د) $\int_{۰}^{۲}\int_{y}^{y^{۲}} f(x,y)\,dy\,dx$

۴) $\int_{۰}^{۱}\int_{y^{۲}}^{۱} f(x,y)\,dx\,dy$ برابر است با:

الف) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$ ب) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{y^{۲}} f(x,y)\,dy\,dx$

ج) $\int_{y^{۲}}^{۱}\int_{۰}^{۱} f(x,y)\,dy\,dx$ د) $\int_{۱}^{y^{۲}}\int_{۱}^{۰} f(x,y)\,dy\,dx$

۵) حجم ناحیهٔ محدود به $x^{۲}+y^{۲}=z$ ، $x^{۲}+y^{۲}=۱۶$ و صفحه xy برابر است با:

الف) $۴\int_{۰}^{۴}\int_{۰}^{\sqrt{۱۶-x^{۲}}} (x^{۲}+y^{۲})\,dy\,dx$ ب) $۴\int_{۰}^{۴}\int_{۰}^{\sqrt{۱۶-y^{۲}}} (x^{۲}+y^{۲})\,dy\,dx$

ج) $۴\int_{۰}^{۴}\int_{۰}^{x^{۲}+y^{۲}} ۱۶\,dy\,dx$ د) $۴\int_{۰}^{۴}\int_{۰}^{\sqrt{۱۶-x^{۲}}} dy\,dx$

۶) $\int_{\frac{C}{۲}}^{C}\int_{۰}^{\frac{r}{C}} r\,d\theta\,dr$ برابر است با:

الف) $\frac{r^{۲}}{۴C}$ ب) $\frac{r}{۲۴}C^{۲}$ ج) $\frac{۳}{۸}rC$ د) $\frac{r^{۲}}{۲}$

۷) $\int_{۰}^{۳}\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۱} x^{۲}\,dx\,dz\,dy$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

۸) فرض کنیم R ناحیه $\{(x,y) \mid ۰\le x\le ۱ \;,\; ۰\le y\le ۲\}$ باشد. در اینصورت $\iint_{R} e^{x-y}\,dx\,dy$ برابر است با:

الف) $e(۱-e^{-۲})$ ب) $(e-۱)(۱-e^{-۲})$

ج) $e-۱+e^{-۲}$ د) برابر با این سه عدد نیست

۹) $\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{r^{۲}} r^{۵}\cos^{۲}\theta\sin^{۲}\theta\,dz\,dr\,d\theta$ برابر است با:

الف) $\frac{\pi}{۱۶}$ ب) $\frac{\pi}{۳۲}$ ج) π د) ۵۶

۱۰) فرض کنید $R=\{(x,y) \mid -۲\le x\le ۱ \;,\; ۰\le y\le ۱-x\}$ ، در اینصورت $\iint_{R}(۴-y)\,dA$ با کدام انتگرال زیر برابر نیست؟

الف) $\int_{-۲}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}(۴-y)\,dy\,dx$ ب) $\int_{۰}^{۳}\int_{-۲}^{۱-y}(۴-y)\,dx\,dy$

ج) $\int_{۰}^{۱-x}\int_{-۲}^{۱}(۴-y)\,dx\,dy$ د) با هر سه برابر است.

۱۱) حجم ناحیهٔ زیر $z=۴-x^{۲}-y^{۲}$ و روی صفحهٔ xy برابر است با:

الف) $\int_{-\sqrt{۴-x^{۲}}}^{\sqrt{۴-x^{۲}}}\int_{-۲}^{۲}(۴-x^{۲}-y^{۲})\,dx\,dy$ ب) $\frac{۴}{۳}\int_{-۲}^{۲}(۴-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\,dx$

ج) $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^{۲}\theta\,d\theta$ د) برابر با این سه انتگرال نیست.

۱۲) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy\, dx$ برابر است با:

الف) $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} r^3 dr\, d\theta$ ب) $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} r^4 dr\, d\theta$

ج) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi} r^3 d\theta\, dr$ د) برابر با این سه انتگرال نیست.

۱۳) مساحت سطح جانبی یک مخروط به ارتفاع ۱ و شعاع r برابر است با:

الف) $2\pi\int_{0}^{1} r x\sqrt{r^2+1}\, dx$ ب) $2\pi\int_{0}^{1} r^2x^2(r^2+1)\, dx$

ج) $2\pi\int_{0}^{1} x\sqrt{x^2+1}\, dx$ د) $2\pi\int_{0}^{1} x^2(x^2+1)\, dx$

۱۴) معادله کره‌ای به شعاع a در مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

الف) $\rho=a$ ب) $r^2+z^2=a^2$ ج) $r^2=a^2$ د) $\frac{4}{3}\pi a^3$

۱۵) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\beta} \sin(\alpha+\beta)\, d\alpha\, d\beta$ برابر است با:

الف) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ب) $\sqrt{2}-1$ ج) 0 د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۶) ناحیه انتگرال‌گیری $\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{0}^{x} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy$ کدام است؟

الف) درون استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$، زیر صفحهٔ $z=x$ و بالای ربع اول صفحه xy

ب) درون استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$، زیر صفحهٔ $z=a$ و بالای ربع اول صفحه xy

ج) درون کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و بالای ربع اول صفحه xy

د) درون $x^2+y^2=a-z$ و بالای ربع اول صفحه xy

۱۷) $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} e^{x^2}\, dx\, dy$ برابر است با:

الف) $\int_{0}^{1} x e^{x^2}\, dx$ ب) $\int_{0}^{1} (e-e^{y^2})\, dx$

ج) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} e^{y^2}\, dy\, dx$ د) برابر با این سه انتگرال نیست.

۱۸) مساحت قسمتی از رویه $f(x,y)=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}$ که بالای ناحیه R محدود به خطوط $x=۰$ ، $x=۳$ ، $y=۰$ ، $y=۲$ است، برابر با کدام انتگرال زیر نیست؟

الف) $\int_{۰}^{۳}\int_{۰}^{۲}\sqrt{x+۱}\,dy\,dx$

ب) $\int_{۰}^{۳}\int_{۰}^{۲}\frac{۴}{۹}x^{۳}\,dy\,dx$

ج) $\int_{۰}^{۳}\int_{۰}^{۲}\frac{۴}{۹}x^{۳}\,dy\,dx$

د) با هر سه انتگرال برابر است.

۱۹) حجم ناحیه D که از بالا به کرهٔ $\rho=۱$ و از پائین به مخروط $\phi=\frac{\pi}{۴}$ محدود است برابر است با:

الف) $\frac{۲}{۳}\pi(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$
ب) $\frac{۲}{۱۲}\pi(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$
ج) $\frac{۲}{۱۲}\pi^{۲}(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$
د) $\frac{\pi}{۴}(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

۲۰) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}(x+y+z)^{۲}\,dy\,dz\,dx$ برابر است با:

الف) $\frac{۵}{۲}$
ب) $-\frac{۵}{۷}$
ج) ۰
د) $\frac{۱۷}{۲۴}$

۲۱) معادله استوانه به شعاع قاعده a در مختصات استوانه‌ای عبارتست از:

الف) $r=a$
ب) $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$
ج) $r=a\,\mathrm{Sin}\phi$
د) $r=a\,\mathrm{Cos}\phi$

۲۲) اگر D محدود به $y+z=۴$ ، $z=۰$ و $x^{۲}+y^{۲}=۱۶$ باشد آنگاه $\iiint_{D}dv$ در مختصات استوانه‌ای برابر است با:

الف) $\iiint_{D} r\,dz\,dx\,dy$

ب) $\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۴}\int_{۰}^{۴-r\,\mathrm{Sin}\theta} r^{۲}\,dz\,dr\,d\theta$

ج) $\iiint_{D}\pi\,dz\,dr\,d\theta$

د) $\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۴}\int_{۰}^{۴-r\,\mathrm{Sin}\theta} r\,dz\,dr\,d\theta$

۲۳) اگر $D=\{(x,y,z)\mid -۱\le x\le ۳\ ,\ ۱\le y\le ۵\ ,\ ۰\le z\le ۳\}$ آنگاه $\iiint_{D}dv$ با کدام یک از انتگرالهای زیر برابر نیست؟

الف) $\int_{۱}^{۵}\int_{-۱}^{۳}\int_{۰}^{۳}dz\,dx\,dy$

ب) $\int_{۰}^{۳}\int_{۱}^{۵}\int_{-۱}^{۳}dx\,dy\,dz$

ج) $\int_{-۱}^{۳}\int_{۱}^{۵}\int_{۰}^{۳}dz\,dy\,dx$

د) با هر سه انتگرال برابر است.

۲۴) $\int_{0}^{9}\int_{\sqrt{y}}^{3} \operatorname{Cos}(\pi x^3)\,dx\,dy$ برابر است با:

الف) $\int_{9}^{0}\int_{3}^{\sqrt{y}} (\operatorname{Cos}\pi y^3)\,dy\,dx$

ب) $\int_{0}^{9}\int_{3}^{\sqrt{y}} (\operatorname{Cos}\pi x^3)\,dy\,dx$

ج) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{x^2} (\operatorname{Cos}\pi x^3)\,dy\,dx$

د) $\int_{0}^{9}\int_{0}^{x^2} (\operatorname{Cos}\pi x^3)\,dy\,dx$

۲۵) مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای $y=6-\frac{x^2}{2}$ و $y=-\frac{x}{2}$ برابر است با:

الف) $\int_{-3}^{4}\int_{-\frac{x}{2}}^{6-\frac{x^2}{2}} x^2\,dy\,dx$

ب) $\int_{-3}^{4}\int_{-\frac{x}{2}}^{6-\frac{x^2}{2}} y^2\,dy\,dx$

ج) $\int_{-3}^{4}\int_{-\frac{x}{2}}^{6-\frac{x^2}{2}} dy\,dx$

د) با این سه انتگرال برابر نیست.

پاسخ آزمون‌های چهار گزینه‌ای فصل هشتم

۱) گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\int_{0}^{2}\int_{y}^{2y} x\,dx\,dy=\int_{0}^{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big]_{y}^{2y}\right)dy=\int_{0}^{2}\left(2y^2-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{y^3}{6}\right)\Big]_{0}^{2}=4$$

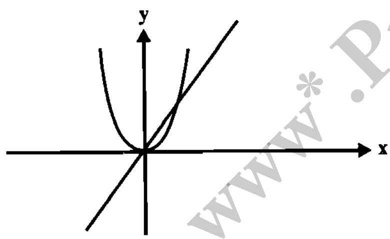
۲ـ گزینه صحیح وجود ندارد.

$$\int_{1}^{4}\int_{1}^{x}\int_{0}^{x} x\,dz\,dy\,dx=\int_{1}^{4}\int_{1}^{x}\left(xz\Big]_{0}^{x}\right)dy\,dx=\int_{1}^{4}\int_{1}^{x} x^2\,dy\,dx$$

$$=\int_{1}^{4}\left(x^2y\Big]_{1}^{x}\right)dx=\int_{1}^{4}(x^3-x^2)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Big]_{1}^{4}=\frac{171}{4}$$

۳ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با توجه به ناحیه R در شکل داریم:

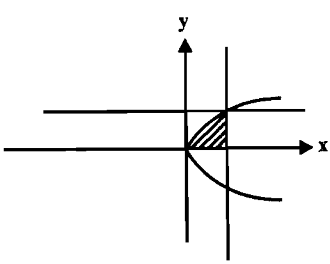


$$y=x^2=2x\ \Rightarrow\ x^2-2x=0\ \Rightarrow\ x=0\ ,\ x=2$$

$$\Rightarrow\iint_{R} f(x,y)\,dA=\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$$

۴ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

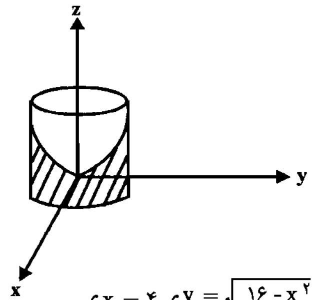
ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد.



$$\Rightarrow\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{1} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

۵ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد.



$$x^۲+y^۲=۱۶ \Rightarrow y=\sqrt{۱۶-x^۲}$$

$$\Rightarrow V=۴\int_{x=۰}^{x=۴}\int_{y=۰}^{y=\sqrt{۱۶-x^۲}}(x^۲+y^۲)\,dy\,dx$$

۶ـ گزینه‌ی صحیح وجود ندارد.

$$\int_{\frac{C}{۲}}^{C}\int_{۰}^{\frac{r}{C}} r\,d\theta\,dr=\int_{\frac{C}{۲}}^{C}(r\theta]_{۰}^{\frac{r}{C}})\,dr=\int_{\frac{C}{۲}}^{C}\frac{r^۲}{C}\,dr=\frac{r^۳}{۳C}]_{\frac{C}{۲}}^{C}=\frac{۷}{۲۴}C^۲$$

۷ـ گزینه‌ی (ج) صحیح می‌باشد.

$$\int_{۰}^{۳}\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۱}x^۲\,dx\,dz\,dy=\int_{۰}^{۳}\int_{۰}^{۲}(\frac{x^۳}{۳}]_{۰}^{۱})\,dz\,dy=\int_{۰}^{۳}\int_{۰}^{۲}\frac{۱}{۳}\,dz\,dy$$

$$=\int_{۰}^{۳}(\frac{۱}{۳}z]_{۰}^{۲})\,dy=\int_{۰}^{۳}\frac{۲}{۳}\,dy=\frac{۲}{۳}y]_{۰}^{۳}=۲$$

۸ـ گزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$\iint_R e^{x-y}\,dx\,dy=\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۱}e^{x-y}\,dx\,dy=\int_{۰}^{۲}(e^{x-y}]_{۰}^{۱})\,dy$$

$$=\int_{۰}^{۲}(e^{۱-y}-e^{-y})\,dy=(-e^{۱-y}+e^{-y})]_{۰}^{۲}=e^{-۲}+e+e^{-۱}-۱=(e-۱)(۱-e^{-۲})$$

۹ـ گزینه‌ی (ب) صحیح است.

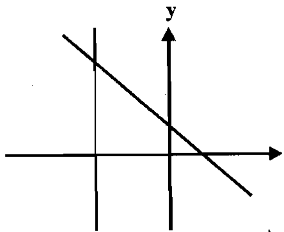
$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{r^۲}r^۵\cos^۲\theta\sin^۲\theta\,dz\,dr\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}(r^۵\cos^۲\theta\sin^۲\theta z]_{۰}^{r^۲})\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}r^۷\cos^۲\theta\sin^۲\theta\,dr\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}(\frac{r^۸}{۸}\cos^۲\theta\sin^۲\theta]_{۰}^{۱})\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱}{۸}\,Cos^{۲}\theta\,Sin^{۲}\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱}{۸}\cdot\frac{۱}{۴}\,Sin^{۲}\,۲\theta\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱}{۶۴}(۱-Cos\,۴\theta)\,d\theta=\frac{۱}{۶۴}(\theta-\frac{۱}{۴}\,Sin۴\theta)\Big]_{۰}^{۲\pi}=\frac{\pi}{۳۲}$$

۱۰ـگزینه‌ی (ج) صحیح است.



ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد.

$$\Rightarrow\iint_R(۴-y)\,dA=\int_{x=-۲}^{x=۱}\int_{y=۰}^{y=۱-x}(۴-y)\,dy\,dx=\int_{y=۰}^{y=۳}\int_{x=-۲}^{x=۱-y}(۴-y)\,dx\,dy$$

۱۱ـگزینه‌ی (ب) صحیح می‌باشد.

در صفحه xy، $z=۰$ می‌باشد. لذا

$$z=۴-x^{۲}-y^{۲}=۰\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۴$$

دایره‌ای به شعاع ۲ می‌باشد.

$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{۴-x^{۲}}$$

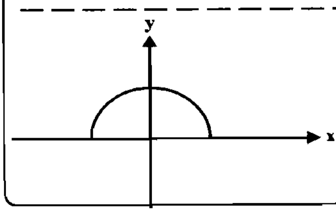
$$\Rightarrow V=\int_{x=-۲}^{x=۲}\int_{y=-\sqrt{۴-x^{۲}}}^{y=\sqrt{۴-x^{۲}}}(۴-x^{۲}-y^{۲})\,dy\,dx$$

$$=\int_{-۲}^{۲}\left(۴y-x^{۲}y-\frac{y^{۳}}{۳}\Big]_{-\sqrt{۴-x^{۲}}}^{\sqrt{۴-x^{۲}}}\right)dx$$

$$=\int_{-۲}^{۲}\left(۴\sqrt{۴-x^{۲}}-x^{۲}\sqrt{۴-x^{۲}}-\frac{(۴-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{۳}+۴\sqrt{۴-x^{۲}}-x^{۲}\sqrt{۴-x^{۲}}-\frac{(۴-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{۳}\right)dx$$

$$=\frac{۴}{۳}\int_{-۲}^{۲}(۴-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\,dx$$

۱۲ـگزینه‌ی (ب) صحیح است.



با جایگذاری $x=r\,Cos\theta$ و $y=r\,Sin\theta$

و $dy\,dx=r\,dr\,d\theta$ داریم.

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy\,dx=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} r^4\,dr\,d\theta$$

۱۳ـگزینه‌ی (الف) صحیح است.

مساحت سطح جانبی مخروط به ارتفاع h و شعاع قاعده r از فرمول زیر به دست می‌آید.

(رجوع کنید به مثال ۹.۳.۸ کتاب درسی)

$$S=2\pi\int_{0}^{h}\frac{r}{h}x\sqrt{\left(\frac{r}{h}\right)^2+1}\,dx$$

$$\Rightarrow\ S=2\pi\int_{0}^{1} r x\sqrt{r^2+1}\,dx$$

۱۴ـگزینه‌ی (ب) صحیح است.

معادله کره به شعاع a در مختصات دکارتی عبارتست از:

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

با جایگذاری $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$

$$r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta+z^2=r^2+z^2=a^2$$

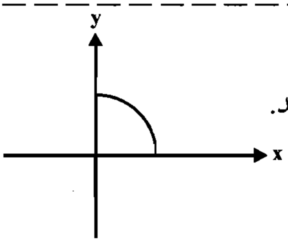
۱۵ـگزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\beta}\sin(\alpha+\beta)\,d\alpha\,d\beta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(-\cos(\alpha+\beta)\right]_{0}^{\beta}\Big)\,d\beta$$

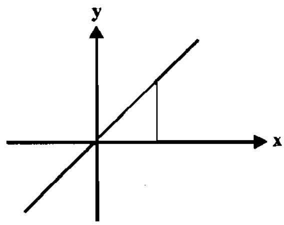
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(-\cos 2\beta+\cos\beta)\,d\beta=\frac{-1}{2}\sin 2\beta+\sin\beta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

۱۶ـگزینه‌ی (الف) صحیح است.

تصویر ناحیه انتگرال‌گیری در صفحه xoy به صورت زیر می‌باشد.



لذا از آنجاکه z بین صفر و x تغییر می‌کند، ناحیه انتگرال‌گیری درون استوانه $x^2+y^2=a^2$ و زیر صفحه $z=x$ و بالای ربع اول صفحه xy می‌باشد.



۱۷ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx=\int_0^1 \left(y\,e^{x^2}\Big]_0^x\right)dx=\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$$

۱۸ـ گزینه‌ی (ب) و (ج) صحیح هستند.

مساحت رویه از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$S=\iint_R \sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dA$$

$$f(x,y)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f_x(x,y)=x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad f_y(x,y)=0$$

$$\Rightarrow S=\int_0^3\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dy\,dx$$

بنابراین می‌بینیم که هر کدام از گزینه‌های (ب) و (ج) نمی‌توانند جواب مورد نظر باشد.

۱۹ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$v=\iiint_D 1.dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\rho^3}{3}\sin\phi\Big]_0^1\right)d\phi\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}\sin\phi\,d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos\phi)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)d\theta=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

۲۰ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+y+z)^2\,dy\,dz\,dx=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 ((x+z)^2+y^2+2y(x+z)\,dy\,dz\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^1 \left((x+z)^2y+\frac{y^3}{3}+y^2(x+z)\Big]_0^1\right)dz\,dx=\int_0^1\int_0^1 \left((x+z)^2+\frac{1}{3}+(x+z)\right)dz\,dx$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} (x^{2}+z^{2}+2xz+\frac{1}{3}+x+z)\,dz\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} \left((x^{2}z+\frac{z^{3}}{3}+xz^{2}+\frac{1}{3}z+xz+\frac{z^{2}}{2})\Big]_{0}^{1} \right) dx$$

$$= \int_{0}^{1} (x^{2}+\frac{2}{3}+2x+\frac{1}{2})\,dx = (\frac{x^{3}}{3}+(\frac{2}{3}+\frac{1}{2})x+x^{2})\Big]_{0}^{1} = \frac{5}{2}$$

۲۱ـ گزینه‌ی (الف) صحیح است.

معادله استوانه به شعاع قاعده a در مختصات دکارتی به صورت $x^{2}+y^{2}=a^{2}$ می‌باشد. با جایگذاری $x=r\,\mathrm{Cos}\theta$ و $y=r\,\mathrm{Sin}\theta$ داریم.

$$r^{2}\mathrm{Cos}^{2}\theta+r^{2}\mathrm{Sin}^{2}\theta=r^{2}(\mathrm{Sin}^{2}\theta+\mathrm{Cos}^{2}\theta)=r^{2}=a^{2} \Rightarrow r=a$$

۲۲ـ گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$x^{2}+y^{2}=16 \Rightarrow 0\le r\le 4$$

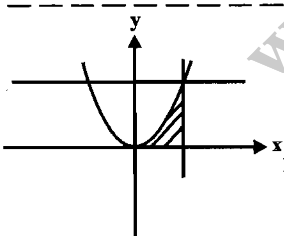
$$y+z=4 \Rightarrow z=4-y=4-r\,\mathrm{Sin}\theta \Rightarrow 0\le z\le 4-r\,\mathrm{Sin}\theta$$

$$dv=r\,dz\,dr\,d\theta$$

۲۳ـ گزینه‌ی (د) صحیح است.

۲۴ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد.



$$x=\sqrt{y} \Rightarrow y=x^{2}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{9}\int_{\sqrt{y}}^{3} \mathrm{Cos}(\pi x^{3})\,dx\,dy = \int_{0}^{3}\int_{0}^{x^{2}} (\mathrm{Cos}\pi x^{3})\,dy\,dx$$

۲۵ـ گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$y=-\frac{x}{2}=6-\frac{x^{2}}{2} \Rightarrow x^{2}-x-12=0 \Rightarrow x=4\ ,\ x=-3$$

$$\Rightarrow S=\int_{-3}^{4}\int_{-\frac{x}{2}}^{6-\frac{x^{2}}{2}} dy\,dx$$

تمرینات فصل نهم

مباحثی در آنالیز برداری

۹-۱) میدان برداری

در تمرینهای ۱ تا ۴ چرخه و واگرایی میدان برداری داده شده را پیدا کنید.

۱) $\vec{F}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$

جواب:

چرخه: $\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}=(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})\vec{k}$

$$\nabla\times\vec{F}=\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]\vec{k}=0$$

واگرایی: $\nabla.F=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$

$$\nabla.F=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

---

۲) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$

جواب: چرخه: $\nabla\times\vec{F}=(\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial x}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y})\vec{k}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

واگرایی: $\nabla.F=\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial z}=0$

---

۳) $F(x,y,z)=\frac{-x}{z}\vec{i}-\frac{y}{z}\vec{j}+\frac{1}{z}\vec{k}$

جواب:

چرخه: $\nabla\times\vec{F}=\left[\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{z})-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{y}{z})\right]\vec{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{x}{z})-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{z})\right]\vec{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{y}{z})-\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{x}{z})\right]\vec{k}$

$$=-\frac{y}{z^2}\vec{i}+x\vec{j}$$

واگرایی: $\nabla . F = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{z}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{z}) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = -\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2}$

---

۴) $F(x,y,z) = e^x \operatorname{Cos}y \, \vec{i} + e^x \operatorname{Sin}y \, \vec{j} + z \, \vec{k}$

جواب: چرخه: $\nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(e^x \operatorname{Sin}y)\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(e^x \operatorname{Cos}y - \frac{\partial}{\partial x}(z)\right]\vec{j} +$

$\left[\frac{\partial}{\partial x}(e^x \operatorname{Sin}y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \operatorname{Cos}y)\right]\vec{k}$

$\nabla \times F = 2e^x \operatorname{Sin}y \, \vec{k}$

واگرایی: $\nabla . F = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \operatorname{Cos}y) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x \operatorname{Sin}y) + \frac{\partial}{\partial x}(z) = 2e^x \operatorname{Cos}y + 1$

در تمرینهای ۵ و ۶، نشان دهید که f در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.

۵) $f(x,y) = xy$

جواب:

$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\nabla^2 f = 0$

---

۶) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

جواب:

$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -4z \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -4$

$\nabla^2 f = 2 + 2 - 4 = 0$

در تمرینهای ۷ تا ۱۰، تعیین کنید که آیا $\vec{F}$ گرادیان تابعی چون f است یا نیست. اگر هست، f را پیدا کنید.

۷) $\vec{F}(x,y) = (\operatorname{Sin} xy)\,\vec{i} + (\operatorname{Cos} xy)\,\vec{j}$

جواب:

$$\nabla \times \vec{F} = \partial\,\vec{i} + \partial\,\vec{j} + (-y \operatorname{Sin} xy - x \operatorname{Cos} xy)\,\vec{k}$$

$$\nabla \times \vec{F} = (-y \operatorname{Sin} xy - x \operatorname{Cos} xy)\,\vec{k} \neq ۰$$

$\vec{F}$ میدان گرادیان نیست

---

۸) $\vec{F}(x,y,z) = ۲xyz\,\vec{i} + x^۲z\,\vec{j} + (x^۲y + ۱)\,\vec{k}$

جواب:

$$\nabla \times \vec{F} = (x^۲ - y^۲)\,\vec{i} + (۲xy - ۲xy)\,\vec{j} + (۲xz - ۲xz)\,\vec{k} = ۰$$

$$\nabla \times \vec{F} = ۰$$

$$\nabla f = \vec{F}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۲xyz \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^۲z \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^۲y + ۱$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۲xyz \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{انتگرال‌گیری}} f(x,y,z) = x^۲yz + g(y,z)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^۲yz + g(y,z)) = x^۲z + \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^۲z + \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^۲z \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ۰$$

$$f(x,y,z) = x^۲zy + C(z)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = x^۲y + \frac{\partial C}{\partial z}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = x^۲y + \dfrac{\partial C}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = x^۲y + ۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial z} = ۱$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} = ۱ \Rightarrow C = z + M$$

$$f(x,y,z) = x^۲yz + z + M$$

۹) $\vec{F}(x,y,z) = xz\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$

جواب: $\nabla \times \vec{F} = -y\,\vec{i} + (x-z)\,\vec{i} \neq 0$

---

۱۰) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2+x^2)\,\vec{i} + (z^2+y^2)\,\vec{j} + (x^2+z^2)\,\vec{k}$

جواب: $\nabla \times \vec{F} = -2z\,\vec{i} - 2x\,\vec{j} - 2y\,\vec{k} \neq 0$

$\vec{F}$ میدان گرادیان نیست.

---

۱۱) فرض کنید f و تابع چند متغیره $\vec{F}$ و $\vec{G}$ دو میدان برداری باشند. تعیین کنید که کدام یک از عبارتهای زیر نمایش یک میدان برداری و کدام یک نمایش تابع سه متغیره، کدام بی‌معنی است.

الف) $\text{grad}(fg)$

جواب: $f.g =$ یک تابع چند متغیره $\Rightarrow$ $f,g =$ دو تابع چند متغیره

$\text{grad}\, fg =$ یک میدان برداری

ب) $\text{grad}\,\vec{F}$

جواب: $\text{grad} =$ عملگر برای چند تابع چند متغیره و $F =$ یک تابع چند متغیره

$\text{grad}\,\vec{f} =$ بی‌معنی

پ) $\text{curL}(\text{grad}\, f)$

جواب: $\text{curL}(\text{grad}\, f) =$ میدان برداری $\Rightarrow$ $\text{grad}\, f =$ میدان برداری

ت) $\text{grad}(\text{div}\,\vec{F})$

جواب: $\text{grad}(\text{div}\,\vec{F}) =$ میدان برداری $\Rightarrow$ $\text{div}\,\vec{F} =$ تابع اسکالر

ث) $\text{curL}(\text{curL}\,\vec{F})$

جواب: $\text{curL}(\text{curL}\,\vec{F}) =$ میدان برداری $\Rightarrow$ $\text{curL}\,\vec{F} =$ میدان برداری

ج) $\text{div}(\text{grad}\, f)$

جواب: $\text{div}(\text{grad}\, f) =$ تابع اسکالر $\Rightarrow$ $\text{grad}\, f =$ میدان برداری

چ) $(\text{grad } f) \times (\text{curL } \vec{F})$

جواب: $\text{curL } \vec{F} =$ میدان برداری و $\text{grad } f =$ میدان برداری

ضرب برداری دو میدان برداری، میدان برداری است.

ح) $\text{div}(\text{curL}(\text{grad } f))$

جواب: $\text{curL}(\text{grad } f) =$ میدان برداری و $\text{grad } f =$ میدان برداری

$\text{div}(\text{curL}(\text{grad } f)) =$ تابع اسکالر

خ) $\text{curL}(\text{div}(\text{grad } f))$

جواب: $\text{div}(\text{grad } f) =$ تابع اسکالر و $\text{grad } f =$ میدان برداری

$\text{curL}(\text{div}(\text{grad } f)) =$ بی‌معنی

در تمرینهای ۱۲ تا ۱۶، درستی عبارتهای داده شده را تحقیق کنید.

۱۲) $\text{curL}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{curL } \vec{F} + \text{curL } \vec{G}$

جواب: $\vec{F} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k} \quad , \quad \vec{G} = g_1 \vec{i} + g_2 \vec{j} + g_3 \vec{k}$

$$\text{cur}(\vec{F} + \vec{G}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 + g_1 & f_2 + g_2 & f_3 + g_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(f_3 + g_3) - \frac{\partial}{\partial z}(f_2 + g_2)\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(f_1 + g_1) - \frac{\partial}{\partial x}(f_3 + g_3)\right]\vec{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(f_2 + g_2) - \frac{\partial}{\partial z}(f_1 + g_1)\right]\vec{k}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial g_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$\text{cur}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{curL}(\vec{F}) + \text{curL}(\vec{G})$$

۱۳) $\operatorname{div}(\vec F+\vec G)=\operatorname{div}\vec F+\operatorname{div}\vec G$

جواب: $\operatorname{div}(\vec F+\vec G)=\frac{\partial}{\partial x}(f_1+g_1)+\frac{\partial}{\partial y}(f_2+g_2)+\frac{\partial}{\partial z}(f_3+g_3)$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}+\frac{\partial g_3}{\partial z}$$

$$=(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z})+(\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z})$$

$$\operatorname{div}(\vec F+\vec G)=\operatorname{div}\vec F+\operatorname{div}\vec G$$

---

۱۴) $\operatorname{curL}(f\vec F)=f(\operatorname{curL}\vec F)+\left[\operatorname{grad} f\times\vec F\right]$

جواب: $\operatorname{curL}(f\vec F)=\left[\frac{\partial}{\partial y}(fP)-\frac{\partial}{\partial z}(fN)\right]\vec i+\left[\frac{\partial}{\partial z}(fM)-\frac{\partial}{\partial x}(fP)\right]\vec j+\left[\frac{\partial}{\partial x}(fN)-\frac{\partial}{\partial y}(fM)\right]\vec k$

$$\left[f\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}P-f\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}N\right]\vec i+\left[f\frac{\partial M}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}M-f\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}P\right]\vec j$$

$$+\left[f\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}N-f\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}M\right]\vec k$$

$$=f(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z})\vec i+f(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x})\vec j+f(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})\vec k+$$

$$(\frac{\partial f}{\partial y}P-\frac{\partial f}{\partial z}N)\vec i+(\frac{\partial f}{\partial z}M-\frac{\partial f}{\partial x}P)\vec j+(\frac{\partial f}{\partial x}N-\frac{\partial f}{\partial y}M)\vec k$$

$$=f(\operatorname{curL}\vec F)+(\operatorname{grad} f\times\vec F)$$

---

۱۵) $\operatorname{div}(\vec F\times\vec G)=(\operatorname{curL}\vec F).\vec G+(\operatorname{curL}\vec G).\vec F$

جواب: $\operatorname{div}(\vec F\times\vec G)=\frac{\partial}{\partial x}(f_2g_3-f_3g_2)+\frac{\partial}{\partial y}(f_3g_1-f_1g_3)+\frac{\partial}{\partial z}(f_1g_2-f_2g_1)$

$$=\frac{\partial f_2}{\partial x}g_3+f_2\frac{\partial g_3}{\partial x}-\frac{\partial f_3}{\partial x}g_2-f_3\frac{\partial g_2}{\partial x}+\frac{\partial f_3}{\partial y}g_1+f_3\frac{\partial g_1}{\partial y}-\frac{\partial f_1}{\partial y}g_3-f_1\frac{\partial g_3}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial f_1}{\partial z}g_2+f_1\frac{\partial g_2}{\partial z}-\frac{\partial f_2}{\partial z}g_1-f_2\frac{\partial g_1}{\partial z}$$

$$\operatorname{div}(\vec F\times\vec G)=(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z})g_1+(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial z})g_2+(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y})g_3$$

$$+f_1(\frac{\partial g_2}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial y})+f_2(\frac{\partial g_3}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial z})+f_3(\frac{\partial g_1}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial x})$$

۱۶) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{Lap} f$

جواب:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial z}$$

---

۱۷) اگر $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ، ثابت کنید که $\operatorname{div}\vec{r} = ۳$ و $\operatorname{curL}\vec{r} = ۰$ و $\operatorname{gra}|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

جواب:

$$\operatorname{div}\vec{r} = \operatorname{div}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

$$\operatorname{curL}\vec{r} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\operatorname{curL}\vec{r} = ۰$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} \quad , \quad \operatorname{grad}|\vec{r}| = \frac{\partial}{\partial x}|\vec{r}|\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}|\vec{r}|\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}|\vec{r}|\vec{k}$$

$$\operatorname{grad}|\vec{r}| = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}\vec{k}$$

$$\operatorname{grad}|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

---

۱۸) اگر $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{a}$ ثابت باشد، نشان دهید که:

$$\operatorname{curL}(\vec{a} \times \vec{r}) = ۲\vec{a}$$

$$\operatorname{curL}(\vec{a} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_۲ z - a_۳ y & a_۳ x - a_۱ z & a_۱ y - a_۲ x \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{curL}(\vec{a} \times \vec{r}) = (۲a_۱)\vec{i} + (۲a_۲)\vec{j} + (۲a_۳)\vec{k}$$

$$\operatorname{curL}(\vec{a} \times \vec{r}) = (۲a_۱, ۲a_۲, ۲a_۳) = ۲\vec{a}$$

۹-۲) انتگرال خط

در تمرینهای ۱ تا ۴، انتگرال $\int_C \vec{F}.\vec{dr}$ را روی منحنی C که معادلهٔ برداری آن داده شده است، محاسبه کنید.

۱) $F(x,y,z)=z\vec{i}-y\vec{j}-x\vec{k} \quad , \quad 0\le t\le\frac{\pi}{4} \quad , \quad \vec{r}(t)=5\vec{i}-\text{Sint}\,\vec{j}-\text{Cost}\,\vec{k}$

جواب:

$dr=(0,-\text{Cost},+\text{Sint})$

$$\int_c \vec{F}.\vec{dr}=\int_a^b [M(f(t),g(t),h(t))f'(t)+N(f(t),g(t),h(t))g'(t)$$

$$+P(f(t),g(t),h(t))h'(t)]$$

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[(-\text{Cost})(0)+(\text{Sint})(-\text{Cost})+(-5)(\text{Sindt})\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\text{Sint Cost}+5\text{Sint})\,dt=\left(\frac{-\text{Cos}^2t}{2}+5\text{Cost}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}-\frac{21}{4}$$

---

۲) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+xy\vec{j}+z^2\vec{k} \quad , \quad 0\le t\le\frac{\pi}{2} \quad , \quad \vec{r}(t)=\text{Cost}\,\vec{i}+\text{Sint}\,\vec{j}+2t\,\vec{k}$

جواب:

$r=(\text{Cost},\text{Sint},2t)\to dr=(-\text{Sint},\text{Cost},2)$

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\text{Sin}^2t+\text{Sint Cos}^2t+16t^2)\,dt$$

$$=\left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\text{Sin}2t-\frac{\text{Cos}^3t}{3}+4t^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{4}+\frac{1}{3}$$

---

۳) $0\le t\le\frac{\pi}{6} \quad , \quad r(t)=\frac{1}{2}\vec{i}+2\vec{j}-\text{Ln}(\text{Cosht})\,\vec{k}$

جواب:

$r=(\frac{1}{2},2,-\text{Ln}(\text{Cosht})\to dr=(0,0,-\text{tanht})$

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[(5e^{\text{Sin}\pi(\frac{1}{2})}(0)+(-4e^{\text{Cos}(\frac{1}{2})}(0)+(0)(-\text{tanht})\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt=0$$

۴) $\vec{F}(x,y,z) = -z\vec{i} + x\vec{k} \quad , \quad ۰ \le t \le \pi \quad , \quad \vec{r}(t) = \text{Cos}t\,\vec{i} + \text{Sin}t\,\vec{k}$

جواب: $r(t) = (\text{Cos}t, ۰, \text{Sin}t) \to dr(t) = (-\text{Sin}t, ۰, \text{Cos}t)$

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr} = \int_۰^{\pi} \left[(-\text{Sin}t)(-\text{Sin}t) + (۰)(۰) + (\text{Cos}t)(\text{Cos}t)\right] dt$$

$$\int_۰^{\pi} (\text{Sin}^۲t + \text{Cos}^۲t)\,dt = \int_۰^{\pi} dt = \pi$$

انتگرالهای تمرین‌های ۵ تا ۸ را روی منحنی‌های داده شده محاسبه کنید.

۵) $\int_C (y\,dx - x\,dy + xyz^۲)\,dz$ که در آن C توسط

$\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^{t}\vec{j} + t\vec{k} \quad , \quad ۰ \le t \le ۱$

جواب: $r(t) = (e^{-t}, e^{t}, t) \to dr(t) = (-e^{-t}, e^{t}, ۱)$

$$\int (y\,dx - x\,dy + xyz^۲)\,dz = \int_۰^۱ \left[(e^{t})(-e^{-t}) - e^{-t}(e^{t}) + e^{-t}e^{t}t^۲\right] dt$$

$$= \int_۰^۱ (t^۲ - ۲)dt = \left(\frac{t^۳}{۳} - ۲t\right)\Big]_۰^۱ = -\frac{۵}{۳}$$

---

۶) $\int e^{x}\,dx + xy\,dy + xyz\,dz$ ، که در آن C توسط

$\vec{r}(t) = = -t\vec{i} - t\vec{j} - ۲t\vec{k} \quad , \quad -۱ \le t \le +۱$

جواب: $r(t) = (-t, -t, -۲t) \to \vec{dr} = (-۱, -۱, -۲)$

$$\int e^{x}\,dx + xy\,dy + xyz\,dz = \int_{-۱}^{+۱} \left[(e^{-t})(-۱) + (-t)(-t)(-۱) + (-t)(-t)(-۲t)(-۲)\right] dt$$

$$\int_{-۱}^{+۱} (۴t^۳ - t^۲ - e^{-t})\,dt = -\frac{۲}{۳} - e + \frac{۱}{e}$$

---

۷) $\int_C xy\,dx + (x+z)\,dy + z^۲\,dz$ ، که در آن C توسط معادلهٔ زیر داده شده است

$r(t) = (t+۱)\vec{i} + (t-۱)\vec{j} + t^۲\vec{k} \quad , \quad -۱ \le t \le +۲$

جواب: $r(t) = \left[(t+۱), (t-۱), t^۲\right] \to \vec{dr} = (۱, ۱, ۲t)$

$$\int_C xy\,dx+(x+z)\,dy+z^۲dz=\int_۱^{+۲}\left[(t+۱)(t-۱)+(t+۱)(t^۲)+(t^۴)(۲t)\right]dt$$

$$=\int_{-۱}^{۲}(۲t^۵+۲t^۲+t)\,dt=\frac{۱۷۱}{۶}$$

---

۸) $\int_C \frac{۱}{۱+x^۲}dx+\frac{۲}{۱+y^۲}dy$ ، که در آن تابع C ربع دایرهٔ واحد از $(۱,۰)$ تا $(۰,۱)$ است.

جواب: $r(t)=(\mathrm{Cos}t,\mathrm{Sin}t)\rightarrow dr=(-\mathrm{Sin}t,\mathrm{Cos}t)$

$$\int\frac{۱}{۱+x^۲}dx+\frac{۱}{۱+y^۲}dy=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\left[\frac{۱}{۱+\mathrm{Cos}^۲t}(-\sin t)+\frac{۲}{۱+\mathrm{Sin}^۲t}(\mathrm{Cos}t)\right]dt$$

$$=(\mathrm{Tan}^{-۱}(\mathrm{Cos}t)+۲\mathrm{Tan}^{-۱}(\mathrm{Sin}t))\Big]_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi}{۴}$$

---

۹) فرض کنید $F(x,y,z)=(۲x-y)\vec{i}+۲z\vec{j}+(y-z)\vec{k}$ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی جسمی که از نقطه $(۰,۰,۰)$ تا $(۱,۱,۱)$ روی یک خط راست حرکت می‌کند را محاسبه کنید.

جواب: $r(t)=(t,t,t)\rightarrow dr=(۱,۱,۱)$

$$\int\vec{F}.\vec{dr}=\int_۰^۱\left[(۲t-t)(۱)+(۲t)(۱)(t-t)(۱)\right]dt=\int_۰^۱ ۳t\,dt=\frac{۳}{۲}$$

---

۱۰) جسمی تحت اثر نیروی $\vec{F}$ داده شده در تمرین ۹ روی منحنی $\vec{r}(t)=\frac{\mathrm{Sin}\,\pi t}{۲}\vec{i}+\mathrm{Sin}\frac{\pi t}{۲}\vec{j}+t\vec{k}\ ,\ ۰\le t\le ۱$ حرکت می‌کند. کار انجام شده توسط F را محاسبه کنید.

جواب: $r(t)=(\frac{\mathrm{Sin}\,\pi t}{۲},\mathrm{Sin}\frac{\pi t}{۲},t)\rightarrow dr=(\frac{\pi}{۲}\mathrm{Cos}\,\pi t,\frac{\pi}{۲}\mathrm{Cos}\frac{\pi t}{۲},۱)$

$$\int_C\vec{F}.\vec{dr}=\int_۰^۱\left[\frac{\pi}{۲}\mathrm{Cos}\,\pi t\left(\frac{+\mathrm{Sin}\,\pi t}{۲}\right)+\left(\frac{\pi}{۲}\mathrm{Cos}\frac{\pi t}{۲}\right)\left(\mathrm{Sin}\frac{\pi t}{۲}\right)+t\right]dt$$

$$\int_C\vec{F}.\vec{dr}=-\frac{۱}{۲}$$

۹-۳) قضیهٔ اساسی انتگرال خط

در تمرینهای ۱ تا ۴ نشان دهید که انتگرال خط داده شده مستقل از مسیر است و سپس انتگرال را محاسبه کنید.

۱) $\int_C (e^x+y)\,dx+(x+2y)\,dy$ ، C هر منحنی به طور قطعه‌ای هموار در صفحهٔ xy از $(0,1)$ تا $(2,3)$ است.

جواب:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x+y)\right]\vec{k}=0\vec{k}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x+y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x+2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x+y \rightarrow f(x,y)=e^x+xy+g(y)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial y}=x+\dfrac{\partial g}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+2y\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}=2y \rightarrow g(y)=y^2+C$$

$$f(x,y)=e^x+xy+y^2+C$$

$$\int (e^x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=f(2,3)-f(0,1)=e^2+13$$

---

۲) $\int_C y\,dx+(x+z)\,dy+y\,dz$ ، C توسط

$$\vec{r}(t)=\frac{t^2+1}{t^2-1}\vec{i}+\cos\pi t\,\vec{j}+2t\sin\pi t\,\vec{k} \quad , \quad 0\le t\le \frac{1}{2}$$

جواب:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x+z \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}=y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y \rightarrow f(x,y,z)=xy+g(y,z)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial y}=x+\dfrac{\partial g}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+z\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}=z$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=z \rightarrow g(y,z)=zy+h(z)$$

$$f(x,y,z)=xy+zy+h(z)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial z}=y+\frac{\partial h}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial z}=y\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial z}=0 \rightarrow h=C$$

$$f(x,y,z)=xy+zy$$

$$\int y\,dx+(x+z)\,dy+y\,dz=f(-\tfrac{5}{2},0,1)-f(-1,1,0)=1$$

---

۳) $\int_C \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}dx+\frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}dy+\frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}dz$ ، C توسط

$$\vec{r}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^2\vec{k} \quad , \quad 0\le t\le 1$$

جواب:

$$\text{curL}\,\vec{F}=\left[\frac{-2yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}-\frac{-2xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\right]\vec{i}+$$

$$\left[\frac{-2zx}{(1+x^2+y^2+z^2)}-\frac{-2xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\right]\vec{j}+\left[\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}-\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\right]\vec{k}=0$$

$$\text{curL}\,\vec{F}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} f(x,y,z)=\frac{1}{2}|1+x^2+y^2+z^2|+g(y,z)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}+\frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}=0$$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}\text{Ln}(1+x^2+y^2+z^2)+h(z)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}+\frac{\partial h}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\end{cases} \Rightarrow \frac{dh}{dz}=0$$

$$f(x,y,z)=\frac{۱}{۲}Ln(۱+x^۲+y^۲+z^۲)$$

$$\int \vec{F}.\vec{dr}=f(۱,۱,۱)-f(۰,۰,۰)=Ln\,۲$$

---

۴) $\int e^{-x}Lny\,dx-\frac{e^{-x}}{y}dy+z\,dz$ ، C توسط

$$r(t)=(t-۱)\vec{i}+e^{t^۴}\vec{j}+(t^۲+۱)\vec{k}\quad,\quad ۰\le t\le ۱$$

جواب:

$$curL\,\vec{F}=۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-x}Lny\rightarrow f(x,y,z)=-e^{-x}Lny+g(y,z)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-e^{-x}}{y}+\frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{e^{-x}}{y}\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial y}=۰$$

$$f(x,y,z)=-e^{-x}Lny+h(z)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial z}=z\\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{dh}{dz}\end{cases}\Rightarrow\frac{dh}{dz}=z\Rightarrow h(z)=\frac{z^۲}{۲}+C$$

$$f(x,y,z)=-e^{-x}Lny+\frac{z^۲}{۲}$$

$$\int \vec{F}.\vec{dr}=f(۰,e,۲)-f(-۱,۱,۱)=\frac{۱}{۲}$$

۹-۴) قضیهٔ گرین

در تمرینهای ۱ تا ۶، انتگرال $\oint M\,dx+N\,dy$ را با استفاده از قضیهٔ گرین محاسبه کنید.

۱) $M(x,y)=y$ و $N(x,y)=۰$ ، C مرکب است از ربع اول دایره $x^۲+y^۲=۴$ و بازهٔ $[۰,۲]$ روی محور x و y

جواب:

$$\oint M\,dx+N\,dy=\int_R\int\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]dA$$

$$\oint M\,dx+N\,dy=\int_R\int(۰,۱)\,dA=-\int_R\int dA$$

$$\int M\,dx + N\,dy = -\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\circ}^{۲} r\,dr\,d\theta = -\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{r^{۲}}{۲}\Big]_{\circ}^{۲}\,d\theta = -\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} ۲d\theta = -\pi$$

---

۲) $M(x,y)=xy$ ، $N(x,y)=x^{\frac{۳}{۲}}+y^{\frac{۳}{۲}}$ ، C مربع با رأسهای $(\circ,\circ)$ و $(۱,\circ)$ و $(۱,۱)$ و $(\circ,۱)$ است.

جواب:
$$\oint M\,dx + N\,dy = -\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۱} (\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}} - x)\,dx\,dy = \frac{۱}{۲}$$

---

۳) $M(x,y)=(x^{۲}+y^{۲})=N(x,y)$ ، C دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۱$ است.

جواب:
$$\oint M\,dx + N\,dy = \int_{R}\int (۲x - ۲y)\,dA$$

$$\oint M\,dx + N\,dy = ۲\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۲x} (Cos\theta - Sin\theta)\,r^{۲}\,d\theta\,dr = \circ$$

---

۴) $M(x,y)=y$ و $N(x,y)=-x$ ، C دلنمای $r=۱-Cos\theta$ است.

جواب:
$$\oint M\,dx + N\,dy = \int_{R}\int (-۲)\,dA = ۴\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{-Cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$(-۲\pi - \theta - \frac{۱}{۲}Sin۲\theta)\Big]_{\circ}^{\pi} = -۳\pi$$

---

۵) $M(x,y)=e^{x}\,Siny$ ، $N(x,y)=e^{x}\,Cosy$ ، C مرکب است از نمودار $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۵$ و بازهٔ $[\circ,۲۵]$ روی محورهای x و y

جواب:
$$\int Mdx + Ndy = \int_{R}\int (e^{x}Cosy - e^{x}Cosy)\,dA$$
$$\int_{\circ}^{۲۵}\int_{\circ}^{(۵-\sqrt{x})^{۲}} (e^{x}Cosy - e^{x}Cosy)\,dx\,dy = \circ$$

---

۶) $M(x,y)=xy$ ، $N(x,y)=\frac{۱}{۲}x^{۲}+xy$ ، C مرکب است از بازهٔ $[-۱,۱]$، محور x و نیمهٔ بالایی بیضی $x^{۲}+۴y^{۲}=۱$

جواب:
$$\oint M\,dx + N\,dy = \int_{R}\int \left[(x+y) - x\right] dA$$

$$\oint M\,dx + N\,dy = \int_{-۱}^{+۱}\int_{\circ}^{\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{۲}} y\,dy\,dx = \frac{۱}{۶}$$

۹-۵) آشنایی با انتگرال سطح

در تمرینهای ۱ تا ۴، انتگرال $\iint_S g(x,y,z)\,dS$ را محاسبه کنید.

۱) $g(x,y,z)=x$ ، S هشت یک اول صفحه $۲x+۳y+z=۶$ است.

جواب:

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS=\iint_R g(x,y,f(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^۲+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^۲+۱}\,dx\,dy$$

$$z=-۲x-۳y+۶$$

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS=\iint_R\sqrt{(-۲)^۲+(-۲)^۲+۱}\,x\,dx\,dy=\int_۰^۲\int_۰^۲\sqrt{۱۴}\,x\,dy\,dx=۹\sqrt{۱۴}$$

---

۲) $g(x,y,z)=۲x^۲+۱$ ، S قسمتی از صفحهٔ $z=۳x-۲$ در درون استوانهٔ $x^۲+y^۲=۴$ است.

جواب:

$$\iint_S\sqrt{(۳)^۲+۰+۱}\,(۲x^۲+۱)\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{۱۰}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۲(۲r^۲\cos^۲\theta)\,r\,dr\,d\theta=۱۲\pi\sqrt{۱۰}$$

---

۳) $g(x,y,z)=\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}$ ، S قسمتی از سهمیوار $z=x^۲+y^۲$ است که در زیر صفحه $y=z$ قرار دارد.

$$\begin{cases}z=x^۲+y^۲\\ z=y\end{cases}\Rightarrow\ x^۲+y^۲=z\rightarrow x^۲+\left(y-\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$\iint_S\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}\,dS=\iint_R(۴r^۲+۱)\,r\,dr\,d\theta=\frac{۵}{۸}\pi$$

---

۴) $g(x,y,z)=y$ ، S قسمتی از ورق سهمیوار $z=۴-y^۲$ است به طوری که $۰\le x\le ۳$ و $۰\le y\le ۲$

جواب:

$$z=۴-y^۲$$

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS=\iint_S y\,dS=\iint_R y\sqrt{۴y^۲+۱}\,dx\,dy$$

$$=\int_۰^۳\int_۰^۲ y\sqrt{۴y^۲+۱}\,dy\,dx=\frac{۱}{۴}(۱۷\sqrt{۱۷}-۱)$$

آزمون چهار گزینه‌ای فصل نهم

۱) فرض کنید منحنی C توسط $x^۲ + y^۲ = ۴$ داده شده است.

مقدار $\oint_C (y\,dx + xy\,dy)$ برابر است با:

الف) -۴π ب) ۸π پ) π ت) $\frac{۱۶}{۳}$

۲) فرض کنید منحنی C منحنی $x^۴ + y^۴ = ۱$ است. $\oint_C ۲y^۳\,dx + (x^۴ + ۶y^۲x)\,dy$ برابر است با:

الف) ۴ ب) ۴π پ) $\frac{۴}{۵}$ ت) $\frac{۴}{۵}\pi$

پاسخ آزمون چهار گزینه‌ای فصل نهم

۱) گزینه (الف) صحیح است

$$\int M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_R (y-1)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r\sin\theta - 1)\,r\,dr\,d\theta$$

$$-\frac{8}{3}\cos\theta - 2\theta\Big]_0^{2\pi} = -4\pi$$

---

۲)

$$\oint M\,dx + N\,dy = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt[4]{1-x^4}} (4x^3 + 6y^2)\,dx\,dy$$

$$1 - x^4 = u \Rightarrow -4x^3\,dx = du$$

$$= 4\int_0^1 4x^3\sqrt[4]{1-x^4}\,dx = -4\int_1^0 u^{\frac{1}{4}}\,du$$

$$4\int_0^1 u^{\frac{1}{4}} = \frac{16}{5}u^{\frac{5}{4}} = \frac{16}{5}$$

($\frac{16}{5}$)! در هیچکدام از گزینه‌ها نیست.