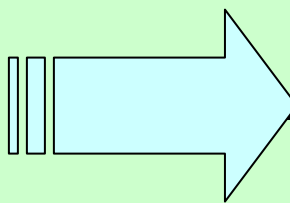


## عنوان : جزوه محاسبات عددی



از سری جزوات مهندسی عمران

**منبع:** پرتال جامع دانشجویان و مهندسين  
عمران

[www.icivil.ir](http://www.icivil.ir)

پایگاه تخصصی دانشجویان و مهندسين عمران

اتاق گفتگو جامعه مجازی دانشجویان و مهندسين عمران

دانلود رایگان جزوات و نمونه سوالات و کتابها و مقالات روز علم عمران

اولین فروشگاه اینترنتی مهندسی عمران و معماری



## پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

انجمن های تخصصی مهندسی عمران

ارائه دهنده برترین و بروزترین مطالب علم عمران

دانلود کتابها و جزوات آموزشی مهندسی عمران

دانلود پروژه و گزارشهای کارآموزی نمونه

دانلود برنامه های کاربردی عمران

مقدمه : (فصل اول )

در علوم مهندسی همیشه یک مسئله وقتی به نتیجه می رسد که جواب نهایی آن به صورت یک عدد درست باشد ولی همین مورد در بسیاری از مسائل مشکلاتی را به وجود می آورد که از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه نیست، یا اینکه روش تحلیلی مستقلى را برای آن نمی توان ابلغ کرد و یا از نظر زمانی رسیدن به آن اعداد بسیار طاقت فرسا و زمان بر است، لذا اینجاست که سروکله محاسبات عددی پیدامی شود .

### خطاها :

خطای دستگاهها : خطاهایی وجود دارد که این خطاها برخی از آنها قابل چشم پوشی است ولی برخی دیگر را می توانیم با انتخاب روش های کارا تر آنها را کم کنیم که خوشبختانه دردنیای کنونی و ظهور کامپیوتر این خطاها به سرعت کم وکمتری شود.

خطای حذفی : در مسائل در خیلی از موارد ما نمی توانیم یک عددی که دارای بی نهایت رقم اعشار می باشد را جایگزین کنیم، لذا از یک مرحله به بعد باید از بقیه ارقام چشم پوشی کنیم که این عمل با گرد کردن یا بریدن انجام می شود. عمل بریدن برای ارقام منصفانه نیست، ولی برای بسط ها منطقی است . مثلاً :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

بریدن

گرد کردن      ۳/۰۳۴۵۷۹۱۰۱۱۲۳۴

### عمل گرد کردن :

اگر بخواهیم عمل برش را در رقم n ام انجام دهیم رقم (n+۱) ام ۳ حالت دارد :

(۱) رقم (n+۱) ام  $\leq 5$

(۲) رقم (n+۱) ام  $> 5$

(۳) رقم (n+۱) ام  $= 5$

در حالت اول یک واحد به رقم  $n$  اضافه می کنیم و عمل برش را انجام می دهیم. اگر کوچکتر از ۵ بود (حالت دوم)، عمل برش را انجام می دهیم بدون هیچگونه تغییراتی .

و حالت سوم؛ اگر مساوی ۵ باشد، اگر ارقام بعد از آن همه صفر باشند مانند حالت دوم عمل می کنیم؛ و بریدن و تمام. و اگر یکی از آنها مخالف صفر باشد مانند حالت اول عمل می کنیم؛ یک واحد به ماقبل اضافه، و بعد بریدن .

مثال :

$$3/749320 \cong 3/75$$

$$3/742014 \cong 3/74$$

$$3/74215000 \cong 3/7422$$

$$3/742950001 \cong 3/7429$$

#### نحوه تعیین ارقام بامعنا :

ارقام معنی دار: کلیه رقم های ۱ و ۲ و ... و ۹، جزء رقم های معنی دار هستند ولی صفر (در اعدادی که قدر مطلق آنها کوچکتر از ۱ باشد) اگر بلافاصله بعد از ممیز شروع نشده باشد و یا برای جاهای خالی به کار نرفته باشد جزء رقم های معنی دار به حساب می آیند.

مثال : ارقام معنی دار اعداد زیر را مشخص کنید.

$$23/435 \rightarrow 5 \text{ رقم بامعنا}$$

$$23/035 \rightarrow 5 \text{ رقم بامعنا}$$

$$0/325 \rightarrow 3 \text{ رقم بامعنا}$$

$$0/0325 \rightarrow 3 \text{ رقم بامعنا}$$

$$0/0032 \rightarrow 2 \text{ رقم بامعنا}$$

$$6/00 \rightarrow 3 \text{ رقم بامعنا}$$

$$2300 \rightarrow 2 \text{ رقم بامعنا} \rightarrow 10^2 \times 2/3$$

$$۲/۳۰ \times ۱۰^۲ \rightarrow ۳ \text{ رقم بامعنا}$$

خطای مطلق :

اگر مقدار واقعی یک کمیت را با  $X$  و مقدار تقریبی آن را با  $x$  نمایش دهیم، آنگاه خطاهای مطلق را با  $e$  (Error) به صورت زیر نمایش می دهیم :

$$e = X - x \text{ در}$$

بعضی از کتب آنرا به صورت  $e = x - X$  نمایش می دهند، اما منطقی آن است که از این به بعد آن را به صورت زیر نمایش دهیم :

$$e = |X - x|$$

مثال :

$$X = \frac{۲}{۳} = ۰.۶۶۶۶۶۶....$$

$$x = \frac{۲}{۳} \cong ۰.۶۶۶۶۶۷$$

خطای نسبی:

اگر  $e$  خطای مطلق و  $X$  مقدار واقعی یک عدد و  $x$  مقدار تقریبی آن عدد باشد در این صورت خطای نسبی را با  $r$  و به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$r = \frac{e}{X} = \frac{|X - x|}{X}$$

در بیشتر اوقات ما خطای مطلق را به کار می بریم ولی در مواقعی که کمیت خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد خطای نسبی دارای معنای بیشتری است .

مثلاً وقتی که مقدار واقعی یک کمیت  $۱۰^{۱۴}$  و خطای مطلق  $۱۰^۷$  باشد خطای مطلق زیاد جالب نیست حال اگر خطای نسبی همین مسئله بررسی شود :

$$r = \frac{e}{X} = \frac{۱۰^۷}{۱۰^{۱۴}} = ۱۰^{-۷} = ۰.۰۰۰۰۰۰۱$$

می بینیم که خطای جالب تری است البته توجه شود که در محاسبه خطای نسبی اگر مقدار واقعی

یک کمیت را نداشتیم از مقدار تقریبی آن استفاده می کنیم در حالت کلی می توانیم چنین بگوییم:

«در جمع و تفریق خطای مطلق مفیداند و در ضرب و تقسیم خطای نسبی.»

نکته: توجه شود که خطای مطلق دارای بعد کمیت مورد اندازه گیری می باشد یعنی اگر در یک اندازه

گیری واحد اندازه گیری ما متر است خطای مطلق نیز بر اساس متر است در حالی که خطای نسبی دارای

بعد نمی باشد ضمناً ثابت می شود که اگر عددی تا  $K$  رقم اعشار گرد شده باشد درآنصورت خطای مطلق

در نامساوی زیر صدق می کند:

$$|e| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-k}$$

مثال: میله  $A$  را که طول آن ۱۰ متر است با تقریب یک هزارم متر و میله  $B$  را که طول آن ۱۰۰ میلی

متر است با تقریب ۰/۰۱ میلی متر اندازه گرفته اند دقت کدام یک از این دو اندازه گیری بهتر است.

خطای ناشی از گرد کردن:

میله  $A$ :

$$E_A \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} \rightarrow E_A = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$A \text{ خطای نسبی: } \frac{E_A}{10} = \frac{1/2 \times 10^{-3}}{10} = \frac{1}{2 \times 10^{-4}} = \frac{1}{20000}$$

میله  $B$ :

$$E_B \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \rightarrow E_B = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$B \text{ خطای نسبی: } \frac{E_B}{100} = \frac{1/2 \times 10^{-2}}{100} = \frac{1}{2 \times 10^{-4}} = \frac{1}{20000}$$

تمرین: میله  $C$  را که طول آن ۱۰ متر است با تقریب ۰/۰۱ سانتی متر اندازه گیری کرده ایم و میله  $D$  را

که طول آن ۱۰ میلی متر است با تقریب ۰/۰۱ سانتی متر اندازه گیری کردیم، دقت کدام یک بیشتر است.

$$C \begin{cases} X = 10 \text{ m} \\ e = 0.01 \text{ cm} = 10^{-4} \text{ m} \end{cases}$$

$$C \Rightarrow E_C \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-4} \Rightarrow \text{خطای نسبی} = \frac{E_C}{X} = \frac{1/\sqrt{2} \times 10^{-4}}{10} = \frac{1}{20000}$$

$$D \begin{cases} X = 10 \text{ mm} \\ e = 0.01 \text{ cm} = 10^{-3} \text{ mm} \end{cases}$$

$$D \Rightarrow E_D \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-3} \Rightarrow \text{خطای نسبی} = \frac{E_D}{X} = \frac{1/\sqrt{2} \times 10^{-3}}{10} = \frac{1}{2000}$$

$\Rightarrow C$  دقت بیشتر است.  $\Rightarrow$  خطای نسبی  $D \Rightarrow$  خطای نسبی  $C$

خطای حاصل جمع :

اگر  $x_1$  و  $x_2$  دو تقریب از کمیت های  $X_1$  و  $X_2$  باشند و  $e_1$  و  $e_2$  خطاهای مطلق متناظر با آنها باشند،

داریم :

$$e_1 = X_1 - x_1 \rightarrow X_1 = e_1 + x_1$$

$$e_2 = X_2 - x_2 \rightarrow X_2 = e_2 + x_2$$

$$X_1 + X_2 = e_1 + x_1 + e_2 + x_2 = (x_1 + x_2) + (e_1 + e_2)$$

$$\Rightarrow |e_1 + e_2| \leq |e_1| + |e_2|$$

یعنی قدرمطلق مجموع دو عدد کمتر یا مساوی مجموع خطاهای تک تک آن اعداد می باشد حال اگر  $e_1$

خطای ناشی از گرد کردن  $x_1$  تا  $k_1$  رقم اعشار و  $e_2$  خطای ناشی از گرد کردن  $x_2$  تا  $k_2$  رقم اعشار

باشد در اینصورت روابط زیر برقرار است:

$$|e_1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-k_1} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-k_1} \leq e_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-k_1}$$

$$|e_2| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-k_2} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-k_2} \leq e_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-k_2}$$

حال با توجه به رابطه  $|e_1 + e_2| \leq |e_1| + |e_2|$  داریم :

$$|e_1 + e_2| \leq |e_1| + |e_2| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-k_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-k_2}$$

$$\Rightarrow |e_1 + e_2| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (10^{-k_1} + 10^{-k_2})$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} (10^{-k_1} + 10^{-k_2}) \leq (e_1 + e_2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (10^{-k_1} + 10^{-k_2})$$

خطای حاصل تفریق (خطای تفاضل):

با توجه به مطالب گفته شده فوق، عیناً همان مطالب برای تفاضل تکرار می شود، یعنی به دست می آید:

$$-\frac{1}{\gamma}(10^{-k_1} + 10^{-k_2}) \leq e_1 - e_2 \leq \frac{1}{\gamma}(10^{-k_1} + 10^{-k_2})$$

خطای حاصل ضرب:

$$X_1 = x_1 + e_1$$

$$X_2 = x_2 + e_2$$

$$X_1 X_2 = (x_1 + e_1)(x_2 + e_2) = x_1 x_2 + x_1 e_2 + x_2 e_1 + e_1 e_2$$

با توجه به اینکه  $e_1 e_2$  یک مقدار بسیار کوچک می باشد لذا قابل صرف نظر می باشد:

$$X_1 X_2 - x_1 x_2 = x_1 e_2 + x_2 e_1$$

خطای حاصل ضرب برابر است با:

$$|x_1 e_2 + x_2 e_1| \leq |x_1 e_2| + |x_2 e_1|$$

$$\Rightarrow |x_1 e_2 + x_2 e_1| \leq |x_1 e_2| + |x_2 e_1| \leq |x_1| |e_2| + |x_2| |e_1|$$

$$\Rightarrow |x_1 e_2 + x_2 e_1| \leq |x_1| \times \frac{1}{\gamma} \times 10^{-k_2} + |x_2| \times \frac{1}{\gamma} \times 10^{-k_1}$$

$$|r| \leq |r_1| + |r_2|$$

مثال: ثابت کنید که:

$$\text{اثبات)} \quad |r| = \frac{|e|}{|X_1 X_2|} = \frac{|X_1 X_2 - x_1 x_2|}{|X_1 X_2|} = \frac{|(x_1 + e_1)(x_2 + e_2) - x_1 x_2|}{|X_1 X_2|}$$

$$= \frac{|x_1 x_2 + x_1 e_2 + x_2 e_1 + e_1 e_2 - x_1 x_2|}{|X_1 X_2|}$$

از طرفی  $e_1 e_2$  به دلیل کوچک بودن قابل چشم پوشی می باشد:



$$\begin{aligned} &= \frac{|x_\gamma e_\gamma + x_\gamma e_\gamma|}{|X_\gamma X_\gamma|} \leq \frac{|x_\gamma e_\gamma|}{|X_\gamma X_\gamma|} + \frac{|x_\gamma e_\gamma|}{|X_\gamma X_\gamma|} = \frac{|(X_\gamma - e_\gamma)e_\gamma|}{|X_\gamma X_\gamma|} + \\ &\frac{|(X_\gamma - e_\gamma)e_\gamma|}{|X_\gamma X_\gamma|} = \frac{|X_\gamma e_\gamma - e_\gamma e_\gamma|}{|X_\gamma X_\gamma|} + \frac{|X_\gamma e_\gamma - e_\gamma e_\gamma|}{|X_\gamma X_\gamma|} \\ &= \frac{|X_\gamma e_\gamma|}{|X_\gamma X_\gamma|} + \frac{|X_\gamma e_\gamma|}{|X_\gamma X_\gamma|} = \frac{|e_\gamma|}{|X_\gamma|} + \frac{|e_\gamma|}{|X_\gamma|} = |r_\gamma| + |r_\gamma| \Rightarrow \\ &|r| \leq |r_\gamma| + |r_\gamma| \end{aligned}$$

خطای حاصل تقسیم :

$$\left| \frac{e_l}{X_l} - \frac{e_r}{X_r} \right| \leq \left| \frac{e_l}{X_l} \right| + \left| \frac{e_r}{X_r} \right|$$

$$A = a_1 \dots a_m / b_1 \dots b_n c_1 \dots c_k \quad \text{دوره ۴، دیش}$$

قضیہ : اگر

$$A = a_1 \dots a_m + \frac{b_1 \dots b_n c_1 \dots c_k - b_1 \dots b_n}{\underbrace{q_1 \dots q_1 \dots}_{\substack{\text{uk} \quad \text{un}}}}$$

آنگاه :

10/237

مثال:

$$10/227 = 10 + \frac{227-2}{99} = \frac{3.17}{191}$$

مبنای ۲ :

بسط اعداد صحیح در مبنای ۲:

راہ اول :

$$\begin{array}{r} 29 \overline{) 38} \\ \underline{58} \\ 100 \\ \underline{95} \\ 50 \\ \underline{47} \\ 30 \\ \underline{29} \\ 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow (39)_{10} = (100111)_2$$

راه دوم:

$$39 = 32 + 7$$

$$= 32 + 4 + 3$$

$$= 32 + 4 + 2 + 1$$

$$= 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$\Rightarrow (39)_{10} = (100111)_2$$

$$*) 2^6 = 64, 2^5 = 32, 2^4 = 16, 2^3 = 8, 2^2 = 4, 2^1 = 2, 2^0 = 1$$

$$2^{-1} = 0.5, 2^{-2} = 0.25, 2^{-3} = 0.125, 2^{-4} = 0.0625, 2^{-5} = 0.03125$$

مثال : عدد  $0.75$  را به مبنای ۲ ببرید.

$$0.75 = 0.5 + 0.25 = 2^{-1} + 2^{-2} \quad (0.11)_2$$

مثال : عدد  $9/625$  را به مبنای ۲ ببرید.

$$\begin{array}{r} 9 \quad | \quad 2 \\ \hline 8 \quad | \quad 4 \quad | \quad 2 \\ \hline 1 \quad | \quad 2 \quad | \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow (9)_{10} = (1001)_2$$

$$0.625 = 0.5 + 0.125 = 2^{-1} + 2^{-3} = (0.101)_2$$

$$\Rightarrow (9/625)_{10} = (1001/101)_2$$

روش ساده تر :

برای بسط اعداد در مبنای ۲ زمانی که عدد  $A$  بین صفر و یک باشد. ( $0 < A < 1$ ) جدولی را تهیه می کنیم

به شرح زیر :

ستون اول  $A$  می باشد، ستون دوم  $i$  که یک شمارنده است. ستون سوم  $2A$ ، ستون چهارم  $[2A]$ ، ستون

پنجم  $2A - [2A]$  این جدول را تشکیل می دهیم. هر سطر را تکمیل کرده و عدد حاصل ستون آخر را به

ستون یک انتقال می دهیم. این عمل تا زمانی تکرار می شود که در ستون اول عدد تکراری نداشته باشیم

به محض تکرار شدن آن الگوریتم ختم و با توجه به ستون چهارم یک ممیز نوشته و اعداد آن را از بالا به پایین می نویسیم.

مثال:  $\frac{3}{7}$  را به مبنای ۲ ببرید.

	A	i	$2A$	$[2A]$	$2A-[2A]$
	$\frac{3}{7}$	۱	$\frac{6}{7}$	۰	$\frac{6}{7}$
	$\frac{6}{7}$	۲	$\frac{12}{7}$	۱	$\frac{5}{7}$
	$\frac{5}{7}$	۳	$\frac{10}{7}$	۱	$\frac{3}{7}$
	$\frac{3}{7}$				

$\Rightarrow (\frac{3}{7})_{10} = (0.\overline{011})_2$

مثال: بسط اعشاری  $0/1$  را در مبنای ۲ به دست آورید.

	A	i	$2A$	$[2A]$	$2A-[2A]$
	$\frac{1}{10}$	۱	$\frac{2}{10}$	۰	$\frac{2}{10}$
	$\frac{2}{10}$	۲	$\frac{4}{10}$	۰	$\frac{4}{10}$
	$\frac{4}{10}$	۳	$\frac{8}{10}$	۰	$\frac{8}{10}$
	$\frac{8}{10}$	۴	$\frac{16}{10}$	۱	$\frac{6}{10}$
	$\frac{6}{10}$	۵	$\frac{12}{10}$	۱	$\frac{2}{10}$
	$\frac{2}{10}$				

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)_{1.} = \left(0.\overline{01}\right)_2$$

مثال : فرض کنید  $a_n = \frac{n+1}{n}$ ، خطای  $a_n$  به عنوان تقریبی از عدد ۱ چقدر است.

$$e(a_n) = \left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

مشاهده می شود که هر چه  $n$  بزرگتر اختیار شود  $\frac{1}{n}$  کوچکتر می شود و در نتیجه  $a_n$  به یک نزدیکتر می شود.

اگر بخواهیم خطای  $a_n$  از مثلاً ۰/۰۰۱ کوچکتر شود کافی است قرار دهیم :

$$e(a_n) = \frac{1}{n} < \frac{1}{1000} = 0.001$$

که از آن نتیجه می شود  $n > 1000$  لذا اولین عددی که در نامساوی اخیر صدق می کند ۱۰۰۱ می باشد.  
لذا :

$$a_n = \frac{1002}{1001} = 1.000999(7D)$$

- اما همیشه وضع به گونه ای نیست که عدد  $A$  را داشته باشیم، معمولاً  $A$  مجهول است و یا حتی در حالت معلوم بودن  $e(a)$  به راحتی قابل بیان نیست، لذا در اینجا است که خطای مطلق حدی به ما کمک می کند.

مثال : می دانیم که ۱/۴۱ تقریبی از  $\sqrt{2}$  است، خطای مطلق ۱/۴۱ را بنویسید.

$$e(1/41) = \left| \sqrt{2} - 1/41 \right| = \sqrt{2} - 1/41 \quad (1)$$

اگر بسط اعشاری  $\sqrt{2}$  را با استفاده از ماشین حساب بنویسیم برابر است با :

$$\sqrt{2} = 1.41421356(9D)$$

که اگر مقدارش را در (۱) جایگزین کنیم، برابر است با :

$$e(1/41) = 0.00421356....$$

مشاهده می شود که  $e(1/41)$  به سادگی قابل بیان نیست و همان  $\sqrt{2} - 1/41$  بیان ساده تر و دقیق تر از آن است.

حال فرض کنیم که حدود  $\sqrt{2}$  را بدانیم.

$$\begin{aligned} 1/414 < \sqrt{2} < 1/415 &\Rightarrow 1/414 - 1/41 < \sqrt{2} - 1/41 < 1/415 - 1/41 \\ &\Rightarrow 0.004 < \sqrt{2} - 1/41 < 0.005 \\ &\Rightarrow e(1/41) < 0.005 \end{aligned}$$

بدیهی است که  $0.005$  یک کران بالا برای خطای  $1/41$  می باشد و تا حد زیادی مقدار نزدیکی  $1/41$  را به  $\sqrt{2}$  نشان می دهد.

تعریف : هر عدد ناکمتر از  $e(a)$  را یک خطای مطلق  $a$  می نامیم و با  $e_a$  نمایش می دهیم.

$$e(a) \leq e_a \quad \text{بنابراین:}$$

( $e_a$  منحصر به فرد نیست، بر خلاف  $e(a)$  که منحصر به فرد است).

پس داریم :

$$\begin{aligned} e(a) = |A - a| &\leq e_a \\ \Rightarrow -e_a &\leq A - a \leq e_a \Rightarrow a - e_a \leq A \leq a + e_a \\ \Rightarrow A &\in [a - e_a, a + e_a] \end{aligned}$$

ارقام با معنای درست یک تقریب :

هر یک از اعداد زیر یک تقریب از عدد  $e$  (نپر) هستند.

$$3, 2/72, 2/718, 2/7181$$

سؤالی که اینجا مطرح است این است که تعداد ارقام با معنای یک تقریب مؤید دقت آن تقریب نیست، مثلاً

عدد  $3/718238$  تقریبی از عدد  $e$  است که  $7$  رقم بامعنا دارد. و از طرفی تقریب دیگر آن عدد  $3$  می باشد

که فقط یک رقم بامعنا دارد. حال قضاوت با خود شما.

پس ارقام بامعنا دقت ما را نشان نمی دهند، حال می خواهیم روشی را بیان کنیم که ارقام بامعنا درست

را به ما ارائه دهند.

مثال : فرض کنید  $A$  مساوی است با  $8/000$  و  $a = 7/997$  و  $a' = 8/08$  مشاهده می شود که  $a'$  درست دو رقم مساوی با ارقام  $A$  دارد. (با حفظ ارزش هر رقم) اما هیچ یک از ارقام  $a$  مساوی ارقام  $A$  نیست. آیا می توان گفت ارقام درست  $a'$  بیشتر از ارقام درست  $a$  می باشد، خواهیم دید که خیر.

مفهوم ارقام بامعناي درست هر تقریب رابطه تنگاتنگ با دقت آن تقریب دارد در اینجا خطاهای مطلق برابر :

$$e(a) = 0/003$$

$$e(a') = 0/08$$

در واقع  $a$  باید تعداد ارقام درست بیشتری داشته باشد. اما تعداد ارقام بامعنا چگونه محاسبه می کنند، داریم :

$$a = a'_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots \quad \text{تعریف : فرض کنید } (a_m \neq 0)$$

بسط اعشاری  $a$  و  $d$  تعداد ارقام بامعناي  $a$  باشد در این صورت بزرگترین عدد صحیح نامنفی  $n$  که  $n \leq d$

$$\text{و } |A - a| \leq 5 \times 10^{m-n} \quad \text{تعداد ارقام بامعناي درست } a \text{ نامیده می شود.}$$

اما برای محاسبه  $m$  داریم :

$$a \geq 1 \Rightarrow m = ([a] - 1) \quad \text{تعداد ارقام } [a]$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow m = -[a] \quad \text{تعداد صفرهای بلافاصله بعد از ممیز در بسط } [a]$$

مثال : اگر  $A = 8/00$  و  $a = 7/997$  و  $a' = 8/08$ ، تعداد ارقام بامعناي درست  $a$  و  $a'$  را بنویسید.

حل) با توجه به اینکه جزء صحیح  $a$  و  $a'$  اعداد یک رقمی هستند،  $m$  برای هر دو صفر است و داریم :

$$e(a) = 0/003$$

حال باید بزرگترین  $n$  را به دست می آوریم که در نامساوی زیر صدق کند.

$$0/003 \leq 5 \times 10^{-n}$$

بدیهی است که بزرگترین  $n$  برابر ۳ می باشد یعنی  $a$  دارای ۳ رقم بامعناي درست می باشد. و برای  $a'$

$$e(a') = 0/08 \leq 5 \times 10^{-n} \quad \text{داریم :}$$

که  $n$  برابر ۱ می باشد یعنی یک رقم بامعناى درست دارد.

تمرین : اگر  $A = 100$  باشد و  $a = 99/98$  و  $b = 100/6$  تعداد ارقام بامعناى درست  $a$  و  $b$  را

بنویسید.

$$a \geq 1 \Rightarrow m = (2) - 1 = 1, e(a) = 0.2, |A - a| \leq 0.2 \times 10^{m-n}$$

$$\Rightarrow 0.2 \leq 0.2 \times 10^{1-n} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \text{دارای ۲ رقم بامعناى درست می باشد.}$$

$$b \geq 1 \Rightarrow m = 2, e(b) = |A - b| = 0.6, |A - b| \leq 0.6 \times 10^{m-n}$$

$$\Rightarrow 0.6 \leq 0.6 \times 10^{2-n} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \text{دارای ۲ رقم بامعناى درست می باشد.}$$

## فصل دوم :

### ریشه معادلات :

در ریاضیات مهندسی اغلب ناچاریم که جواب های معادله زیر را به دست آوریم. یعنی عدد  $a$  را به قسمی

پیدا کنیم که :

$$f(x) = 0 \xrightarrow{x=a} f(a) = 0$$

در آن صورت عدد  $a$  را ریشه معادله  $f(x)$  می نامند که در اینجا  $f(x)$  یک تابع معلوم است به صورت جبری

یا متعالی (تابع  $f$  یک تابع متعالی است اگر بر حسب توابع مثلثاتی، معکوس مثلثاتی، نمایی و یا لگاریتمی

باشد.) و ما به این مشکل برخورد می کنیم که همیشه با روش های معمول نمی توانیم آنها را حل کنیم و

ریشه آنها را بیابیم، لذا در این جا به محاسبات عددی پناه می آوریم، که روش های تکراری تقریب از ریشه

معادلات را به ما می دهد.

- روش تکراری عددی چیست ؟

روشی است که با اختیار کردن یک مقدار اختیاری مثل  $x$  و جایگذاری آن در یک عبارت دنباله ای از

$x_i$  ها را به دست می آوریم.

نقطه شروع  $x$ .

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

$x_0$

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$\vdots$

$$x_n = g(x_{n-1})$$

روش های تکراری فراوانی وجود دارد که به اختصار چند روش از آنها را توضیح می دهیم.

**روش تکراری ساده (نقطه ثابت):** **fix point**

سعی می کنیم در این روش از معادله  $f(x) = 0$  عبارت  $x = g(x)$  را به دست آوریم که داریم:

$$x_{j+1} = g(x_j)$$

که با داشتن  $x_j$  دنباله ای از  $x_{j+1}$  ها به دست می آید که با انتخاب مناسب  $x_j$  و  $g(x)$  مناسب در آن

صورت دنباله عددی شما به ریشه معادله  $f(x)$  همگرا می شود.

مثال: با استفاده از روش تکرار ساده ریشه معادله  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  را به دست آورید. (تا چهار رقم

اعشار).

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$\Rightarrow 3x = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$$

$$x_{j+1} = g(x_j) \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$$

$$x_{j+1} = \frac{1}{3}(x_j^2 + 1) \quad \text{لذا:}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(1^2 + 1) = \frac{2}{3} = 0.667$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1\right) = 0.4815$$

$$x_3 = 0.4106, \quad x_4 = 0.3893, \quad x_5 = 0.3839$$



$$x_7 = 0.3825, \quad x_8 = 0.3821, \quad x_9 = 0.3820$$

$$x_9 = 0.3820$$

-  $x$ . دلخواه است ولی عمداً یک گرفته می شود.

توجه شود که برای  $f(x)$ ،  $g(x)$  های متعددی به دست می آید ولی معلوم نیست که تمام این  $g(x)$  ها مناسب باشند. به عبارت دیگر با داشتن  $x$ ، الزاماً تمام دنباله های  $x_{i+1} = g(x_i)$  به ریشه معادله  $= 0$  همگرا نمی شود.

مثلاً برای تابع زیر تعدادی از  $g(x)$  های ممکن را می نویسیم.

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$3x = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$$

$$g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$$

$$x^2 = 3x - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3x - 1} \Rightarrow g_2(x) = -\sqrt{3x - 1}$$

$$g_3(x) = \sqrt{3x - 1}$$

$$x^2 - 2x - x + 1 = 0 \Rightarrow x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow g_4(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = -1 \Rightarrow x(x - 3) = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{x - 3}$$

$$\Rightarrow g_5(x) = \frac{-1}{x - 3}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{3x - 1}{x} \Rightarrow g_6(x) = \frac{3x - 1}{x}$$

مثال : مثال قبل را با  $g_2(x)$  به دست آمده در بالا حل کنید ؟

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x - 1 \Rightarrow x = \sqrt{3x - 1} \Rightarrow g(x) = \sqrt{3x - 1}$$

$$x_{i+1} = \sqrt{3x_i - 1}$$

$$x_* = \xi$$

$$X_1 = \sqrt{3(\varepsilon) - 1} = 2/645$$

$$X_2 = \sqrt{3(\gamma) - 1} = 2/633$$

$$X_3 = \sqrt{3(X_2) - 1} = 2/626$$

$$X_\varepsilon = \sqrt{3(X_3) - 1} = 2/622$$

$$X_o = 2/620, \quad X_1 = 2/619, \quad X_2 = 2/618, \quad X_3 = 2/618$$

(تا سه رقم اعشار)

مثال :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x = \sqrt{2x + 3}$$

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt{2x + 3} \Rightarrow x_{i+1} = \sqrt{2x_i + 3}$$

$$x_o = \varepsilon, \quad x_1 = 3/317, \quad x_2 = 3/104, \quad x_3 = 3/034,$$

$$x_\varepsilon = 3/011, \quad x_o = 3/004$$

ملاحظه می شود که به ریشه  $x=3$  همگرا می شود. حال اگر همین مسئله را با یک  $g(x)$  دیگر در نظر

بگیریم، داریم :

$$x.x - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2x + 3}{x} \Rightarrow g(x) = \frac{2x + 3}{x} \Rightarrow x_{i+1} = \frac{2x_i + 3}{x_i}$$

$$x_o = \varepsilon, \quad x_1 = 1/5, \quad x_2 =$$

$$x \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 2.750 \\ 3.090 \\ 2.970 \\ 3.010 \\ 2.996 \\ 3.001 \\ 3.000 \\ 3.000 \end{array} \right.$$

ملاحظه می شود که به صورت متناوب به ریشه  $(-1)$  همگرا می گردد. حال اگر  $g(x)$  را به شکل دیگر در

نظر بگیریم، داریم :

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = x^2 - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x^2 - 3)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) \Rightarrow x_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i^2 - 3) \Rightarrow$$

$$x_0 = 4, \quad x_1 = \quad, \quad x_2 =$$

ملاحظه می شود که در این حالت دنباله  $x_{i+1} = g(x_i)$  واگرا می گردد. با توجه به مطالب فوق معادله

$f(x) = 0$  را می توان به صورت های مختلف  $x = g(x)$  مرتب نمود، به عبارت دیگر  $g(x)$  های متفاوتی را

می توان تولید کرد. سؤال این است که آیا تمام این  $g(x)$  ها مفیدند و به ریشه معادله  $f(x)$  همگرا می

شوند و سؤال دیگر این است که مقدار اولیه  $x_0$  را چگونه انتخاب کنیم، برای جواب دادن به این سؤالات

قضیه بسیار زیبایی زیر را با تمام وجود می پذیریم :

قضیه همگرایی : اگر  $f(x) = 0$  در فاصله  $[a, b]$  دارای ریشه بوده و  $g(x)$  و  $g'(x)$  در این فاصله پیوسته و

$g'(x)$  در شرط زیر صدق کند :

$$|g'(x)| \leq m < 1 \quad : \forall x \in [a, b]$$

آنگاه دنباله  $x_{i+1} = g(x_i)$  به ریشه معادله  $f(x) = 0$  همگرا می شود ، در ضمن  $x_0$  را می توان از فاصله

$[a, b]$  انتخاب نمود. توجه شود که شرط فوق یک شرط کافی است و شرط لازم نمی باشد؛ زیرا برای بعضی

مسائل شرط فوق برقرار نبوده ولی به سمت جواب همگرا می شود.

مثال : با استفاده از روش تکراری ساده، ریشه معادله زیر را بیابید.

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

$$x^3 + x = 1 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} < 1 \rightarrow \quad \text{لذا شرط همگرایی برقرار است.}$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 0.8, \quad x_3 = 0.729, \quad x_4 = 0.701$$

$$x_5 = 0.682328$$

$$x_6 = 0.5, \quad x_7 = 0.610, \dots, \quad x_8 = 0.653$$

مثال : ریشه معادله زیر را از روش تکراری ساده به دست آورید.

$$f(x) = e^x - 3x$$

$$e^x - 3x = 0 \Rightarrow 3x = e^x \Rightarrow x = \frac{1}{3}e^x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}e^x$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = \frac{1}{3}e^{x_i}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.333, \quad x_2 = 0.465, \quad x_3 = 0.530, \quad x_4 = 0.567$$

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 2.46, \quad x_2 = 3.91, \quad x_3 = 16.7$$

ملاحظه می شود که به ازای  $x_0 = 0$  به سمت ریشه همگرا و به ازای  $x_0 = 2$  واگرا می باشد. برای بررسی

کردن این موضوع به سراغ قضیه همگرایی می رویم :

$$g(x) = \frac{e^x}{3} \Rightarrow g'(x) = \frac{e^x}{3}$$

$$|g'(x)| < 1 \quad \text{شرط همگرایی} \Rightarrow \left| \frac{e^x}{3} \right| < 1 \Rightarrow \frac{e^x}{3} < 1 \Rightarrow e^x < 3$$

$$\Rightarrow \ln e^x < \ln 3 \Rightarrow x < \ln 3$$

نکته : اگر نتوانیم  $|g'(x)| < 1$  را ساده کنیم اعداد را چک می کنیم اگر در رابطه صدق کرد همگرا می شود

و برعکس.

تمرین : با توجه به روش تکراری ساده ریشه های معادلات زیر را بیابید.

$$I) f(x) = x^2 - x - 2$$

$$II) f(x) = x^3 - 10x + 4$$

روش پیدا کردن ریشه با استفاده از رسم منحنی :

بعضی اوقات می توان  $f(x)$  را به صورت تفاضل دو تابع که رسم آنها ساده است نوشت.

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

منحنی های زیر را رسم می کنیم :

$$y_1 = f_1(x) \quad , \quad y_2 = f_2(x)$$

حال می‌گوییم اگر  $f(\alpha) = 0$  باشد آنگاه

$$f(\alpha)$$

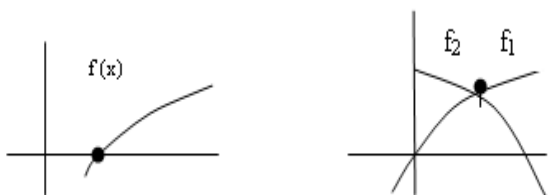
$$\Rightarrow f_1(\alpha) - f_2(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = \beta$$

یعنی نقطه  $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$  روی منحنی  $y_1$  و  $y_2$  قرار دارد، به عبارت دیگر  $\alpha$  طول نقطه تقاطع منحنی های

$y_1$  و  $y_2$  می‌باشد. از این رو منحنی ها را رسم می‌کنیم و طول نقاط تقاطع آنها را می‌یابیم.

لذا ریشه  $f(x)$  برابر است با نقطه تقاطع دو منحنی.

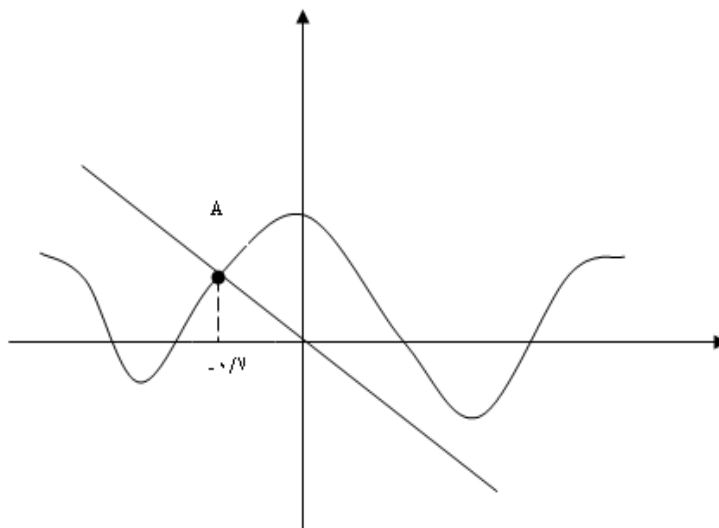


مثال : حدود و تعداد ریشه های معادله  $f(x) = x + \cos x$  را تعیین کنید.

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

$$f(x) = \cos x - (-x)$$

$$f_1(x) = \cos x \quad \text{و} \quad f_2(x) = -x$$

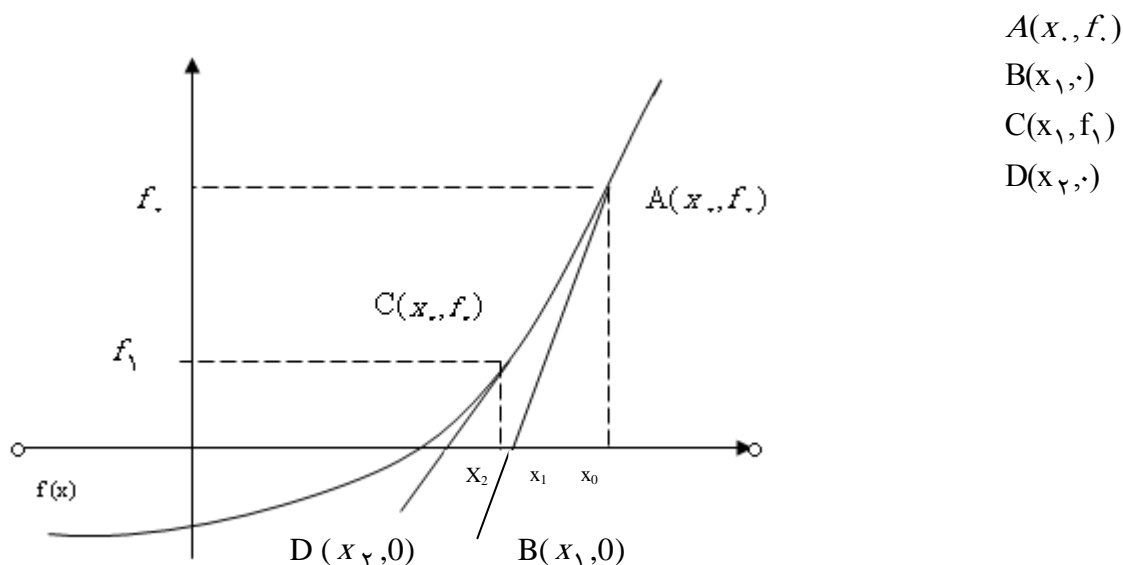


تمرین : تعداد و محل ریشه های معادله زیر را تعیین کنید.

$$\cos x = x(x-2)(x-3)$$

روش تکراری نیوتن :

یکی دیگر از روش های تکراری برای حل معادله  $f(x) = 0$  روش تکراری نیوتن می باشد که در آن  $f$  یک تابع مستقیم پذیر می باشد. طرز عمل به این شکل است که نمودار  $f$  را با یک مماس مناسب تقریب می نماییم، سپس با انتخاب مقدار  $x_0$  و رسم عمودی بر محور  $x$  ها به طوری که نمودار  $f(x)$  را قطع نماید. سپس از نقطه تلاقی مماس بر  $f(x)$  رسم می کنیم، تا محور  $x$  ها را در نقطه ای به طول  $x_1$  قطع کند. حال معادله مماس را به دست می آوریم :



حال معادله خط مماس بر  $f(x)$  و گذرا از دو نقطه  $A$  و  $B$  را می نویسیم :

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = f'(x) \Big|_{x_0} = f'(x_0) = f'_0$$

$$\text{معادله خط} \Rightarrow y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$

$$y - f_0 = f'_0(x - x_0)$$

حال نقطه  $B$  باید در معادله فوق صدق کند :

$$0 - f_0 = f'_0(x_1 - x_0) \Rightarrow -\frac{f_0}{f'_0} = (x_1 - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f_0}{f'_0} \quad *$$

حال معادله خط مماس بر  $f(x)$  و گذرا از دو نقطه  $C$  و  $D$  را می نویسیم.

$$CD \text{ شیب} = m_{CD} = f'(x) \Big|_{x_1} = f'(x_1) = f'_1$$

معادله خط  $\Rightarrow y - y_C = m_{CD}(x - x_C)$

$$y - f_1 = f'_1(x - x_1)$$

حال نقطه D باید در معادله فوق صدق کند.

$$0 - f_1 = f'_1(x_2 - x_1) \Rightarrow -\frac{f_1}{f'_1} = (x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f_1}{f'_1} \quad **$$

به همین ترتیب این عمل را ادامه می دهیم تا مقادیر  $x_2$  و  $x_3$  و  $x_4$  و .... و  $x_n$  محاسبه شود، بنابراین می

توان از بحث های گفته شده فرمول کلی زیر را استخراج کرد :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f_i}{f'_i} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

تذکر (۱) : روش تکراری نیوتن به روش مماسی نیز معروف است.

تذکر (۲) : در روش تکراری نیوتن نمودار  $f(x)$  توسط کثیر الجمله درجه ۱ تقریب می شود. (یعنی توسط

بی نهایت خط مماس) و به جای آنکه ریشه  $f(x)$  را به دست آوریم. ریشه کثیر الجمله درجه ۱ را می یابیم.

مثال : با استفاده از روش تکراری نیوتن، ریشه معادله زیر را بیابید.

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{فرمول تکراری نیوتن}$$

$$\text{داریم : } x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + x_i - 1}{3x_i^2 + 1} \Rightarrow x_{i+1} = \frac{2x_i^3 + 1}{3x_i^2 + 1}$$

i	$x_i$	$f_i$
۰	۰/۵	۰/۳۷۵۰۰
۱	۰/۷۱۴۲۹	۰/۰۷۸۷۳
۲	۰/۶۸۳۱۸	۰/۰۰۲۰۴
۳	۰/۶۸۲۳۳	۰/۰۰۰۰۰
۴	۰/۶۸۲۳۳	۰/۰۰۰۰۰

پس نتیجه می گیریم که  $0/68233$  ریشه معادله  $f(x)$  تا ۵ رقم اعشار می باشد.

مثال : با استفاده از روش تکراری نیوتن - رافسون، جذر عدد  $C$  را محاسبه کنید. (در حالت خاص  $C=2$  بگیرید)

$$\sqrt{C} = x \Rightarrow C = x^2 \Rightarrow x^2 - C = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - C \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - C}{2x_i} \Rightarrow x_{i+1} = \frac{1}{2} \left( x_i + \frac{C}{x_i} \right)$$

حال اگر  $C=2$  باشد :

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \left( x_i + \frac{2}{x_i} \right)$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1/0, \quad x_2 = 1/416667, \quad x_3 = 1/414216$$

$$x_4 = 1/414214, \quad x_5 = 1/414214$$

حال اگر  $x_0 = 1$  بگیریم، داریم :

مثال : معادله  $x^5 - x = 10$  را به روش نیوتن به دست آورید.

$$x^5 - x = 10 \Rightarrow x^5 - x - 10 = 0 \Rightarrow f(x) = x^5 - x - 10 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^5 - x_i - 10}{5x_i^4 - 1} \Rightarrow x_{i+1} = \frac{4x_i^5 + 10}{5x_i^4 - 1}$$

تکرار	$x_i$	$f_i$
۱	۱	۳۳۸/۲۶۰۸
۲	۴/۳۳۳	۱۰۳/۹۸۴۳
۳	۳/۲۹۰۸	۳۰/۱۳۹۰
۴	۲/۰۹۸۲	۱/۰۱۶۲
۵	۱/۸۹۵۶	۰/۰۳۲۳
۶	۱/۸۵۶۹	۰/۰۰۰۳
۷	۱/۸۵۵۶	
۸		



- لازم به یادآوری است که روش تکراری نیوتن برای حل معادلات جبری و مثلثاتی به کار می رود،

همچنین از آن برای معادلاتی که دارای ضرائب موهومی و یا ریشه موهومی باشند نیز استفاده می شود،

در ضمن در یک معادله جبری با ضرائب حقیقی، اگر مقدار اولیه یعنی  $x$  حقیقی باشد در صورت همگرایی

به ریشه حقیقی همگرا شده و به ریشه موهومی نمی رسیم. برای آنکه همگرایی روش تکراری نیوتن را مورد

بررسی قرار دهیم، کافیهست به جمله  $\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$  توجه شود. این جمله باعث می شود که در هر تکرار به

ریشه واقعی نزدیک یا دور شویم، در واقع این جمله ممکن است باعث خطا شود، یا اینکه اصلاح شده باشد.

از نقطه نظر هندسی اگر نمودار  $f(x)$  نزدیک ریشه تقریباً عمود بر محور  $x$  ها باشد سرعت همگرایی بسیار

سریع است، ولی اگر نمودار تابع در نزدیکی ریشه تقریباً افقی باشد سرعت همگرایی بسیار کند است. مثلاً

در هر نقطه  $x_i$  اگر  $f'(x_i)$  مساوی صفر باشد، آنگاه روش تکراری نیوتن کاربرد ندارد. نقاط عطف منحنی

در دامنه محاسبات ایجاد اشکال می کند و ممکن است روش واگرا شود. یک شرط کافی برای روش تکراری

نیوتن وجود دارد که آن را به صورت زیر می پذیریم :

نکته : اگر  $f'(x)$  و  $f''(x)$  در فاصله  $(x, a)$  تغییر علامت نداده و  $f'(x)$  و  $f''(x)$  هم علامت باشند،

آنگاه روش تکراری نیوتن به ریشه  $a$  همگرا می شود. بنابراین برای ریشه های ساده روش تکراری نیوتن

سریعاً همگرا می شود. روش تکراری نیوتن ممکن است در اثر یکی از حالات زیر همگرا نشود :

الف) ممکن است که تابع  $f(x)$  ریشه حقیقی نداشته باشد.

ب) ممکن است که نمودار  $f(x)$  در اطراف ریشه حالت تقارن داشته باشد.

ج) ممکن است که در روش تکراری نیوتن  $x$  که انتخاب می کنیم خیلی خیلی دورتر از ریشه واقعی

انتخاب شود.

تمرین : با استفاده از روش تکراری نیوتن ریشه معادله  $f(x) = x^2 - 10x + 4 = 0$  را به دست آورید و برنامه

کامپیوتری آن را بنویسید (تا چهار رقم اعشار دقت)

روش قاطع : (S-m) (روش وتری)

اگر در فرمول تکراری نیوتن به جای  $f'(x_i)$  عبارت  $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$  جایگزین کنیم معادله ای به

صورت زیر به دست می آید :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{x_i f(x_i) - x_i - x_{i-1} f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = \frac{x_i f(x_i) - x_i f(x_{i-1}) - x_i f(x_i) + x_{i-1} f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = \frac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

مثال : با استفاده از روش تکراری قاطع (S-m) و نقاط شروع  $x_0 = 0$  و  $x_1 = 1$  ریشه معادله زیر را بیابید

$$f(x) = \cos x - x$$

$$x_2 = \frac{x_1 f(x_1) - x_0 f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} , \dots$$

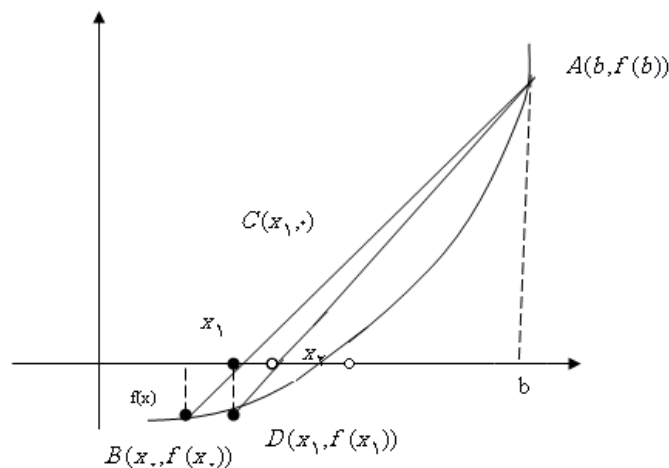
i	$x_i$	$f_i$
0	0/0	1
1	1/0	-0/45970
2	0/68507	0/08930
3	0/73630	0/00466
4	0/73912	-0/00006
5	0/73908	0/00000

تمرین : مسئله زیر را حل و برنامه کامپیوتری آن را نیز بنویسید :

با استفاده از روش تکراری قاطع یا S-m ریشه معادله  $f(x) = x^3 - 10x + 4 = 0$  را به دست آورید. برای نقطه شروع  $x_0 = 0.5$  و  $x_1 = 1$  در نظر بگیرید. (تا ۴ رقم اعشار دقت)

### روش تکراری F-p : (ناجایی)

در این روش منحنی  $f(x)$  توسط کثیر الجمله ای درجه ۱ تقریب شده و برای به دست آوردن ریشه تابع  $f(x)$ ، ریشه کثیر الجمله درجه ۱ را به دست می آوریم، به عبارت دیگر منحنی  $f(x)$  توسط پاره خط AB تقریب می شود، برای به دست آوردن محل تلاقی  $f(x)$  با محور X ها؛ محل تلاقی پاره خط AB را با محور X ها به دست می آوریم، بنابراین معادله پاره خط AB را می نویسیم :



حال معادله خط AB را می نویسیم :

$$\text{شیب خط AB} = m_{AB} = \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b}$$

معادله خط را می نویسیم :

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B)$$

$$\rightarrow -f(x_0) = \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b}(x - x_0)$$

حال باید نقطه  $C(x_1, 0)$  در معادله صدق کند :

$$0 - f(x_0) = \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b}(x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{x.f(b) - bf(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

اگر این روند را برای خط AD نوشته و تکرار کنیم، داریم :

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

لذا در حالت کلی می توان نوشت :

$$x_{i+1} = \frac{x_i f(b) - b f(x_i)}{f(b) - f(x_i)} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

در این روش چون نیاز به محاسبه مشتق نیست بنابراین روشی ساده. روش تکراری F-p به روش پاره خط یا روش درون یابی خطی نیز معروف است.

تذکر :  $b$  و  $x_0$  بایستی طوری انتخاب شود که :  $f(b).f(x_0) < 0$

به خاطر اینکه ریشه داشته باشد.

مثال : با استفاده از روش F-p مقدار تقریبی ریشه معادله  $f(x) = x^2 + x - 1 = 0$  را با  $b = 1$  و  $x_0 = 1/2$  به دست آورید. (تا چهار رقم اعشار درست).

بررسی :  $f(0.5) = -0.375$

$$\Rightarrow f(1)f(0.5) < 0$$

شرط :  $f(1) = 1$

لذا در این بین ریشه وجود دارد.

$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

$$x_0 = 0.5, x_1 = 0.6364, x_2 = 0.6712, x_3 = 0.6797$$

$$x_4 = 0.6817, x_5 = 0.6822, x_6 = 0.6823$$

$$x_7 = 0.6823$$

تمرین : با استفاده از روش تکراری F-p ریشه معادله زیر را با فرض  $x_0 = 0$  و  $b = 2$  و معادله

$$f(x) = x \sin x - 1 \quad \text{را به دست آورید. (بعد از 5 بار تکرار } x_{10} = 1.11416)$$

روش S-m روش وتری

## روش P-m نابجایی

### روش تنصیف – دو بخشی

#### تفاوت میان روش های F-p و S-m :

گرچه بر حسب ظاهر اختلافی به نظر نمی رسد و در هر دو روش به دو مقدار اولیه نیاز داریم، اما در روش F-p یک مقدار اولیه  $b$  همیشه ثابت است و مرتب جای  $x_i$  را با  $x_{i+1}$  و جای  $x_1$  با  $x_2$  عوض می شود و در ضمن ریشه بین  $x_i$  و  $b$  محصور شده و در نهایت به ریشه معادله همگرا می شود ولی در روش S-m اینطور نبوده و برای محاسبه  $x_2$  به  $x_1$  و  $x_1$  نیاز داریم و ... در ضمن ریشه معادله معلوم نیست که در میان  $x_i$  و  $x_{i+1}$  محصور شده باشد در نتیجه ممکن است روش به ریشه معادله همگرا نشود. از طرف دیگر اگر روش S-m به ریشه همگرا شود؛ سرعت همگرایی آن از سرعت همگرایی F-p بیشتر است. با توجه به مباحث فوق این سؤال پیش می آید که در روش های تکراری تا چند تکرار محاسبات را ادامه دهیم. برای پاسخ به این سؤال یکی از قاعده های زیر را پیش می گیریم :

الف) فرض کنید که  $e$  عددی باشد که خطا را مشخص می کند، در این صورت به محض آنکه شرط

$$|x_{i+1} - x_i| < e$$

برقرار شد، تعداد تکرار متوقف می شود.

ب) علاوه بر قسمت الف ممکن است از شرط  $|f(x_i)| < d$  استفاده کنیم که در آن  $d$  یک عدد بسیار کوچک و متناسب با تعداد ارقام اعشار درست است.

ج) ممکن است از یک حلقه do استفاده کنیم، بدین معنی که اگر قسمت های الف و ب رخ ندهد بعد از  $n$  تکرار متوقف شود.

#### مرتبه همگرایی :

اگر  $a$  ریشه معادله  $f(x) = 0$  باشد. در آن صورت در معادله  $f(x)$  صدق کرده یعنی  $f(a) = 0$  می شود، از طرفی اگر فرمول تکراری  $x_{i+1} = g(x_i)$ ، برای به دست آوردن ریشه معادله به کار رود بایستی  $a$  در رابطه صدق کند، یعنی  $g(a) = a$  با فرض :

$$e_n = x_n - a$$

می توانیم بنویسیم :

$$e_n = x_n - a$$

$$x_n = e_n + a$$

$$x_{n+1} = e_{n+1} + a \quad (*)$$

که در آن  $e_n$  خطا در  $n$  امین تکرار و  $e_{n+1}$  خطا در  $(n+1)$  امین تکرار می باشد. حال در رابطه

$$x_{n+1} = g(x_n) \text{ به جای } x_n \text{ مساویش را قرار می دهیم :}$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$x_n = e_n + a$$

$$x_{n+1} = g(e_n + a)$$

که می توان بسط تیلور را حول نقطه  $a$  به صورت زیر نوشت و آن را با رابطه  $(*)$  ترکیب و خلاصه آن را به صورت زیر درآوریم :

$$x_{n+1} = g(e_n + a) = g(a) + e_n g'(a) + \frac{e_n^2}{2!} g''(a) + \frac{e_n^3}{3!} g'''(a) + \dots$$

$$e_{n+1} + a = a + e_n g'(a) + \frac{e_n^2}{2!} g''(a) + \dots$$

$$e_{n+1} = e_n g'(a) + \frac{e_n^2}{2!} g''(a) + \dots (**)$$

اگر روش همگرا شود، از یک مرحله به بعد بایستی قدرمطلق خطا از مرحله مابعد آن بیشتر باشد. یعنی:

$$|e_{n+1}| < |e_n|$$

بنابراین اگر تعداد تکرار  $(n)$  به اندازه کافی زیاد گردد در آن صورت خطای  $e_n$  کوچک خواهد بود، به

قسمی که  $(e_n)^2$  نسبت به  $e_n$  بسیار کوچک خواهد بود و می توان از آن چشم پوشی کرد، یعنی رابطه

$(**)$  به صورت زیر نوشته می شود :

$$e_{n+1} \cong e_n g'(a)$$

با فرض اینکه  $g'(a) \neq 0$  باشد در این حالت گوییم همگرایی از مرتبه ۱ است. ملاحظه می شود که اگر  $n$  به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود در آن صورت خطا در تکرار  $(n+1)$  ام برابر است با حاصلضرب خطا در تکرار ماقبل آن در  $g'(a)$  و می توان با استفاده از گفته های زیر نوشت :

$$e_{n+1} = e_n g'(a)$$

$$|e_{n+1}| = |e_n \cdot g'(a)|$$

$$|e_{n+1}| = |e_n| \cdot |g'(a)| \Rightarrow |g'(a)| = \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} < 1$$

$$\Rightarrow |g'(a)| < 1$$

ملاحظه می شود که شرط کافی برای همگرایی آن است که  $|g'(a)| < 1$  باشد. لازم به یادآوری است که هر چه  $g'(a)$  کوچک گردد به همان نسبت سرعت همگرایی افزایش می یابد و به اندازه ای که به ۱ نزدیک شود از سرعت همگرایی کاسته می شود که برای رفع این مشکل باید تعداد تکرار را افزایش دهیم. اگر  $g'(a) = 0$  باشد آنگاه رابطه  $(**)$  به صورت زیر در می آید :

$$e_{n+1} \cong \frac{1}{2} e_n^2 g''(a)$$

با فرض اینکه  $g''(a) \neq 0$  باشد در این حالت گوییم همگرایی از مرتبه دوم می باشد و به همین ترتیب اگر  $g''(a) = 0$  باشد در آن صورت از رابطه  $(**)$  جمله سوم را در نظر می گیریم و همگرایی از مرتبه سوم می باشد ...

معمولاً فرمول هایی که همگرایی آنها از مرتبه اول می باشد؛ فرمول های ساده بوده و در هر مرحله نیاز به محاسبات زیادی ندارد و عموماً فرمول هایی که همگرایی آنها از مرتبه دوم باشد نسبتاً پیچیده تر از فرمول های مرتبه اول بوده و در هر مرحله محاسبات بیشتری را می خواهد ولی برای رسیدن به همان دقت لازم نیست که تکرارهای زیادی را انجام دهیم. پس فرمول های مرتبه سوم و چهارم به دلیل پیچیدگی عموماً از آنها اجتناب می شود.

مثال : فرض کنید فرمول تکراری به صورت زیر باشد :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

که در آن  $a$  یک مقدار ثابت مثبت بوده و مقدار اولیه  $x$  طوری انتخاب شود که فرمول تکراری فوق به

ریشه  $C$  همگرا گردد. مطلوب است :

الف) حد نهایی  $x_n$  چیست.

ب) نشان دهید که فرمول فوق از مرتبه همگرایی دوم برخوردار است.

الف)  $x_n \rightarrow C$

$$C = \frac{1}{2} \left( C + \frac{a}{C} \right) \Rightarrow 2C = \frac{C+a}{1} \Rightarrow 2C^2 = C^2 + a \\ \Rightarrow C^2 = a \quad * \Rightarrow C = \sqrt{a}$$

ب)  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$g(x_n) = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

لذا داریم:

$$g(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right) \Rightarrow g'(C) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{C^2} \right)$$

$$* \Rightarrow g'(C) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{a} \right) = 0$$

لذا قطعاً مرتبه همگرایی اول نیست.

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right)$$

$$g''(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{x^3} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{C^2}{C^3} \right) \neq 0$$

لذا مرتبه همگرایی مرتبه دوم است.



روش نصف کردن (تنصیف) : (روش دو بخشی)

اگر فرض کنیم  $f(x)$  در فاصله  $[a,b]$  پیوسته بوده و  $f(a)$  و  $f(b)$  مختلف العلامه باشند در آن صورت حداقل یک ریشه  $f(x)$  در فاصله  $[a,b]$  وجود دارد. به عبارت دیگر حداقل یک  $k$  به دست می آید که در  $f(x) = 0$  صدق کند یعنی  $f(k) = 0$  و  $k \in [a,b]$ .

برای به دست آوردن  $k$  فاصله را نصف می کنیم یعنی  $k = \frac{a+b}{2}$ . حال  $f(a)$  و  $f(b)$  و  $f(k)$  را محاسبه می کنیم، علامت های آنها این سه حالت را دارد :

حالت اول : یا  $f(k)$  با  $f(b)$  هم علامت است. آن گاه می گوئیم ریشه در بازه  $[a,k]$  قرار دارد.

حالت دوم :  $f(k)$  با  $f(a)$  هم علامت باشد. آنگاه می گوئیم ریشه در بازه  $[k,b]$  قرار دارد.

حالت سوم : اگر  $f(k) = 0$  باشد در آن صورت  $k = c$  و ما مستقیم خود ریشه را یافته ایم.

در حالت اول و دوم این روند مجدداً تکرار می شود، تنها در حالت سوم است که روند خاتمه می یابد.

مثال : با استفاده از روش نصف کردن ریشه معادله زیر را بیابید، در فاصله  $[1,2]$ .

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

تکرار	a	b	c	f (a)	f (b)	f (c)
۱	۱	۲	۱/۵	-۴/۰	۳/۰	-۱/۸۷۵
۲	۱/۵	۲	۱/۷۵	-۱/۸۷۵	۳/۰	۰/۱۷۱۸۷
۳	۱/۵	۱/۷۵	۱/۶۲۵	-۱/۸۷۵	۰/۱۷۱۸۷	-۰/۹۴۳۳۵
۴	۱/۶۲۵	۱/۷۵	۱/۶۸۷۵	-۰/۹۴۳۳۵	۰/۱۷۱۸۷	-۰/۴۰۹۴۲
۵	۱/۶۸۷۵	۱/۷۵	۱/۷۱۸	-۰/۴۰۹۴۲	۰/۱۸۱۸۷	-۰/۱۲۴۷۸
۶	۱/۷۱۸۷۵	۱/۷۵	۱/۷۳۴۳۷	-۰/۱۲۴۷۸	۰/۱۷۱۸۷	۰/۰۲۱۹۸
۷	۱/۷۱۸۷۵	۱/۷۳۴۳۷	۱/۷۲۶۵۶			
$k = 1/73205$				0/000....		

همگرایی روش نصف کردن :

همگرایی روش نصف کردن به صورت زیر می باشد :

$$|e_n| \leq \frac{|b_n - a_n|}{2} = \frac{|b. - a. |}{2^{n+1}}$$

مثال : نشان دهید که رابطه زیر برقرار است :

$$n \cong \frac{\ln(b. - a.) - \ln e}{\ln 2}$$

$$e_n \leq \frac{(b. - a.)}{2^{n+1}} \Rightarrow \ln e_n \leq \ln\left(\frac{b. - a.}{2^{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \ln e_n \leq \ln(b. - a.) - \ln(2^{n+1})$$

$$\Rightarrow \ln e_n \leq \ln(b. - a.) - (n+1)\ln 2$$

$$\Rightarrow (n+1)\ln 2 \leq \ln(b. - a.) - \ln(e_n)$$

$$\Rightarrow (n+1) \leq \frac{\ln(b. - a.) - \ln e}{\ln 2}$$

با فرض  $e_n = e$  داریم :

$$n \leq \frac{\ln(b. - a.) - \ln e}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow n \cong \frac{\ln(b. - a.) - \ln e}{\ln 2}$$

نکته : توجه شود که اگر  $f(x)$  در فاصله  $[a,b]$  ناپیوسته باشد این روش ممکن است یک ریشه نادرست بدهد.

مثال : اگر  $a. = 0$  و  $b. = 2$  و  $n = 31$  باشد، ریشه تقریبی مسئله تا چند رقم اعشار دقیق است.

$$|e_n| \leq \frac{|b. - a. |}{2^{n+1}} = \frac{|2 - 0|}{2^{32}} \Rightarrow |e_n| \leq \frac{2}{2^{32}} = 4/656612 \times 10^{-10} \\ = 0./0000000004656612$$

لذا تا ۹ رقم اعشار دقت دارد.

تمرین : با استفاده از روش نصف کردن ریشه معادله  $f(x) = x^3 - 10x + 4$  در فاصله  $[0, 1]$  را نوشته و برنامه کامپیوتری آن را بنویسید.

تمرین : اگر روش نصف کردن برای پیدا کردن ریشه معادله  $f(x) = 0$  در بازه  $[۲, ۷]$  به کار رفته باشد، چند مرتبه فاصله بایستی نصف شود تا ریشه تقریبی  $C_n$  دقتی معادل  $۵ \times ۱۰^{-۹}$  داشته باشد.

$$b. = ۷ \text{ و } a. = ۲ \text{ و } e_n = ۵ \times ۱۰^{-۹} \text{ و } n = ?$$

$$|e_n| \leq \frac{|b. - a. |}{۲^{n+۱}} \quad \text{یا} \quad n \cong \frac{\ln(b. - a.) - \ln e}{\ln ۲}$$

$$\Rightarrow n \cong \frac{\ln(۷ - ۲) - \ln e}{\ln ۲} = \frac{\ln ۵ - ۱}{\ln ۲}$$

$$\Rightarrow n \cong \frac{۱/۶۰۹۴۳۷۹۱۲ - ۱}{۰/۶۹۳۱۴۷۱۸} = ۰/۸۷۹۲ \Rightarrow n \leq ۰/۸۷۹۲$$

همچنین می توان از فرمول اول استفاده کرد که در آن صورت داریم :

$$|۵ \times ۱۰^{-۹}| \leq \frac{۷-۲}{۲^{n+۱}} \Rightarrow ۵ \times ۱۰^{-۹} \leq \frac{۵}{۲^{n+۱}} \Rightarrow ۱۰^{-۹} \leq \frac{۱}{۲^{n+۱}}$$

$$\Rightarrow ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱ \leq ۲^{-(n+۱)} \Rightarrow n \cong ۰$$

## فصل سوم :

### درون یابی و تقریب چند جمله ای ها :

در این فصل بررسی می کنیم که چگونه مقدار یک تابع را که مقادیر عددی آن در برخی از نقاط داده شده است در نقطه دیگر بیابیم.

به عبارت دیگر مقدار  $f(x)$  در نقاطی به طول  $x_۰$  و  $x_۱$  و ..... و  $x_n$  معلوم است. سؤال این است که مقدار

تابع  $f(x)$  در نقطه ای مثلاً به طول  $a$  چند است. برای پاسخ به این سؤالات ما باید  $f(x)$  را توسط یک

کثیرالجمله تقریب نموده و سپس مقدار تابع را از کثیرالجمله تقریب به دست آوریم.

قبل از بررسی روش ها لازم است که چند نکته متذکر شویم :

نکته (۱) : توجه شود که اگر دو نقطه  $(x_۰, f_۰)$  و  $(x_۱, f_۱)$  معلوم باشند در آن صورت توسط کثیرالجمله

درجه ۱ تقریب می شود و اگر سه نقطه  $(x_۰, f_۰)$  و  $(x_۱, f_۱)$  و  $(x_۲, f_۲)$  از تابع  $f(x)$  معلوم باشند  $f(x)$

توسط کثیرالجمله درجه ۲ تقریب می شود و در حالت کلی اگر  $(n+۱)$  نقطه از  $f(x)$  معلوم باشد، آنگاه

$f(x)$  توسط یک کثیرالجمله درجه  $n$  تقریب می شود.

نکته (۲): اگر وظل نقاط متساوی الفاصله باشند،  $x_n$  ها یک تصاعد عددی باشند در آن صورت از

کثیرالجمله های پیشرو و پسرو و مرکزی نیوتن استفاده می کنیم که بر اساس تفاوت های محدود استوار بوده که بسیار ساده می باشد، ولی اگر نقاط متساوی الفاصله نباشند در آن صورت از کثیرالجمله های فوق الذکر نمی توان استفاده کرد و بایستی از کثیرالجمله های دیگری مانند لاگرانژ یا تفاضل های تقسیمی یا ضرائب نامعین و ... استفاده نمود.

لازم به یادآوری است که از روش های لاگرانژ و تفاضل های تقسیمی در هر دو حالت می توان استفاده کرد، اما محاسبات آن بسیار حجیم، طولانی و خسته کننده می باشد. بنابراین تا جایی که می توانیم از این روش ها اجتناب می کنیم مگر در حالتی که مختلف الفاصله باشند که ناچاریم.

نکته (۳): توجه شود کثیرالجمله ای که از  $(n+1)$  نقطه  $(x_n, f_n)$  و ... و

$(x_2, f_2)$  و  $(x_1, f_1)$  و  $(x_0, f_0)$  عبور می کند منحصر به فرد می باشد. به عبارت دیگر هر روشی را که پیش

می گیریم در نهایت به یک کثیرالجمله خواهیم رسید. دانستن قاعده هی زیر قبل از بیان روش لاگرانژ حائز اهمیت است :

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{دلتای کرونکر:}$$

$$L_j(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$$

مثال :

$$1) L_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$2) L_1(x) = (x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$3) L_j(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{j-1})(x_i - x_{j+1}) \dots (x_i - x_n)$$

چند جمله ای های لاگرانژ :

اگر بخواهیم با استفاده از کثیرالجمله لاگرانژ چند جمله ای را بنویسیم که از نقاط زیر بگذرد از

قاعده زیر استفاده می کنیم :

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$$

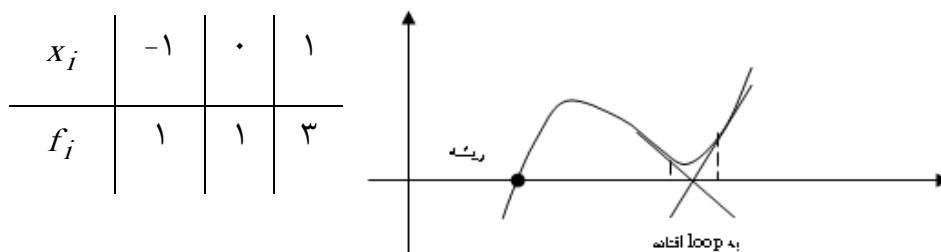
$$\Rightarrow f(x) \approx p_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j$$

که برای حالات خاص  $n=2$  و  $n=3$  آن را بررسی می کنیم :

$$\begin{aligned} & (x, f.) \\ n=2 \quad & \Rightarrow f(x) \approx \sum_{j=0}^2 \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} f_0 + \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} f_1 = \\ & (x_1, f_1) \\ & = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x, f.) \\ n=3 \quad & (x_1, f_1) \quad \Rightarrow f(x) \approx \sum_{j=0}^3 \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} f_0 + \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} f_1 + \\ & (x_2, f_2) \\ & + \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} f_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2 \end{aligned}$$

مثال : چند جمله ای  $p(x)$  را با استفاده از روش لاگرانژ برای سه نقطه زیر محاسبه کنید.



$$\begin{aligned} f(x) \approx \sum_{j=0}^3 \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2 = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} \times 1 + \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} \times 1 + \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} \times 3 \end{aligned}$$

$$= \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x^2-1)}{-1} + \frac{3x(x+1)}{2} = \frac{x(x-1) - 2(x^2-1) + 3x(x+1)}{2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 2}{2} = x^2 + x + 1$$

مثال : چند جمله ای درون یاب مربوط به چند جمله ای زیر را نوشته، سپس  $f(1/5)$  را حساب کنید.

$x_j$	-1	0	1	2
$f_j$	-2	-1	0	7

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^r \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x-(-1))(x-0)(x-1)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} (-2)$$

$$+ \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} (-1) + \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} (0) + \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} (7)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + \frac{(x^2-1)(x-2)}{-2} + \frac{7(x^2-1)(x)}{6} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3} +$$

$$\frac{x^3 - x - 2x^2 + 2}{-2} + \frac{7x^3 - 7x}{6} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x + 3x^3 - 3x - 6x^2 + 67x^3 - 7x}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 1 \Rightarrow f(1/5) = 2/375$$

**معایب روش لاگرانژ :**

(۱) محاسبات برای تعیین چند جمله ای درون یاب واقعاً طاقت فرسات.

(۲) درجه چند جمله ای درون یاب تنها بعد از اتمام محاسبات تعیین می شود.

(۳) بدترین و محکمترین ایراد این است که با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط یک جدول کلیه

محاسبات باید از نو انجام شود و این یک مصیبت است.

**روش ضرایب نامعین :**

در این روش برای کثیرالجمله ای که از نقاط  $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$  بگذرد آن را

به صورت زیر می نویسیم.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

برای محاسبه پارامترهای  $a_0, a_1, \dots, a_n$  از دستورالعمل زیر استفاده می کنیم :

$$\sum_{j=0}^n p_n(x_j) = f_j \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

که پس از جایگذاری و مرتب کردن نسبت به پارامترهای مجهول  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  به صورت دستگاه زیر

نشان داده می شود :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرائب A      × ماتریس      ماتریس b

سمت راست      یا مجهولات

$$\Rightarrow AX = b$$

که به صورت یک دستگاه  $AX = b$  نیز می توان آن را نوشت که با حل آن  $a_i$  ها را یافت. با توجه به

اطلاعات قبلی شما سیستم فوق در صورتی دارای جواب منحصر به فرد است که دترمینان ضرائب مخالف

صفر باشد و این زمانی رخ می دهد که نقاط  $x_0, x_1, \dots, x_n$  با هم متفاوت باشند.

توجه شود که کثیرالجمله درجه  $n$  که از نقاط  $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$  عبور می

کنند منحصر به فرد اس. اگر  $f(x)$  خود یک کثیرالجمله درجه  $n$  باشد در آن صورت کثیرالجمله تقریب و

$f(x)$  با هم برابرند، در حل سیستم ممکن است ضریب  $a_n$  یا برخی از آنها صفر شود. در این صورت درجه

کثیرالجمله از  $n$  کمتر می شود.

مثال : با استفاده از دو روش ضرایب نامعین و لاگرانژ کثیرالجمله ای را بیابید که از نقاط زیر بگذرد:

$$(0, -1), (1, 2), (2, 7)$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f_j$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 (0) + a_2 (0)^2 = -1 \\ a_0 + a_1 (1) + a_2 (1)^2 = 2 \\ a_0 + a_1 (2) + a_2 (2)^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 + a_2 = 3 \\ 2a_1 + 4a_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow -2 \times \begin{cases} a_1 + a_2 = 3 \\ 2a_1 + 4a_2 = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 2a_2 = -6 \\ 2a_1 + 4a_2 = 8 \end{cases}$$

$$2a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 1 \quad , a_1 + 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$p(x) = (1)x^2 + 2(x) + (-1)$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2 + 2x - 1$$

روش لاگرانژ :

$$f(x) = \sum_{j=0}^2 \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 +$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} f_2 = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} (-1) + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} (2) + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} (7)$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{-2} + \frac{2x^2 - 4x}{-1} + \frac{7x^2 - 7x}{2} = \frac{x^2 + 3x - 2 - 4x^2 + 4x + 7x^2 - 7x}{2}$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - 2}{2} = x^2 + 2x - 1$$

تمرین : با استفاده از روش ضرائب نامعین کثیرالجملة مثلثاتی زیر را به قسمی پیدا کنید که از نقاط زیر

بگذرد.

$$P(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x \quad a_0 = 1, a_1 = -1$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{6}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (0, 0) \quad a_2 = 2, a_3 = -2$$



روش حذفی گوس :

$$\begin{cases} a_1 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + a_2 \cos 2\left(\frac{\pi}{3}\right) + a_3 \cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \\ a_1 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + a_2 \cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) + a_3 \cos 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_1 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + a_2 \cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + a_3 \cos 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_1 + a_1 \cos(0) + a_2 \cos 2(0) + a_3 \cos 3(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 - a_3 = \frac{3}{2} \\ a_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}a_1 + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}a_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + 0 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_1 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

که با روش حذفی گوس آن را به یک ماتریس پایینی مثلثی تبدیل می کنیم که به ترتیب به دست می آید :

$$a_3 = -2, a_2 = 2, a_1 = -1, a_0 = 1,$$

در نتیجه داریم :

$$P(x) = 1 \cos x + 2 \cos 2x - 2 \cos 3x$$

تمرین : تابع  $f$  را به صورت  $p(x,y)$  طوری تقریب نمایید که از نقاط  $(1, 1, 5)$  و  $(2, 1, 3)$  و  $(1, 2, 9)$  عبور

$$z = f(x, y) \approx p(x, y) = A + Bx + Cy \quad \text{نمایند، به طوری که :}$$

$$(1, 1, 5), (2, 1, 3), (1, 2, 9)$$

$$z = A + Bx + Cy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 5 \\ A + 2B + C = 3 \\ A + B + 2C = 9 \end{cases}$$

حال با استفاده از روش گوس و عملیات سطری مقدماتی آن را به ماتریس پایینی مثلثی تبدیل می کنیم

داریم :

$$\begin{aligned} d_1 & \left\{ \begin{array}{l} A+B+C=5 \\ +2B+0=-2 \\ +0+C=4 \end{array} \right. \Rightarrow C=4 \text{ و } B=-2 \text{ و } A=3 \\ -d_1+d_2 & \\ -d_1+d_4 & \end{aligned}$$

حال با جایگذاری اعداد به دست آمده در  $z = f(x, y) \approx p(x, y) = A + Bx + Cy$  داریم :

$$z = f(x, y) \approx p(x, y) = 3 - 2x + 4y$$

توجه شود که کاربرد روش ضرائب نامعین معمولاً بیشتر از سایر روشهاست. روش های فراوانی وجود دارد،

ولی برخی روش ها ساده تر و مفیدترند، مثلاً در روش لاگرانژ اگر درجه کثیرالجمله کم یا زیاد شود،

محاسبات قبلی مورد استفاده قرار نمی گیرد و یا مثلاً در روش ضرایب نامعین بایستی یک سیستم  $(n+1)$

معادله و  $(n+1)$  مجهول را حل کنیم که نسبتاً طاقت فرسات و ایرادی که به آنها گرفته می شود این است

که به صورت زنجیره ای نمی توان از محاسبات قبلی استفاده کرد در اینجا به بیان یک روش زیبا و ساده

می پردازیم که ایرادهای روش های فوق را ندارد.

این روش به نام روش تفاضل های تقسیمی معروف است، ما قبل از بحث نیاز است علائمی را تعریف کنیم،

داریم :

$$I)f[x.] = f.$$

$$II)f[x., x_1] = \frac{f[x_1] - f[x.]}{x_1 - x.}$$

$$III)f[x., x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x., x_1]}{x_2 - x.}$$

$$IV)f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

و در حالت کلی :

$$\Rightarrow f[x., x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x., x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x., x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x.}$$

$x_j$	$f_j$	
$x_.$	$f_.$	$f[x_., x_1]$
$x_1$	$f_1$	$f[x_., x_1, x_2]$
		$f[x_., x_1, x_2, x_3]$
		$f[x_1, x_2]$
$x_2$	$f_2$	$f[x_1, x_2, x_3]$
		$f[x_., x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$
$x_3$	$f_3$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$
		$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$
		$f[x_3, x_4]$
$x_4$	$f_4$	$f[x_3, x_4, x_5]$
		$f[x_4, x_5]$
$x_5$	$f_5$	$f[x_4, x_5]$
		$f[x_5, x_6]$
$x_6$	$f_6$	

بنابراین روش تفاضل های تقسیمی با استفاده از جدول فوق کثیرال جمله ای را به صورت زیر بیان می کند.

$$p(x) = f[x_.] + (x - x_.)f[x_., x_1] + (x - x_.)(x - x_1)f[x_., x_1, x_2] + \dots + (x - x_.)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_., x_1, x_2, \dots, x_n]$$

مثال : با استفاده از نقاط زیر چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده

نیوتن به دست آورید و  $f[5]$  را تخمین بزنید.

$x_j$	۰	۱	۳	۶
$f_j$	۱	-۶	۴	۱۶۹

$x_i$	$f_i$	
۰	۱	
۱	-6	$f[x_0, x_1] = \frac{-6-0}{1-0} = -6$ $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{0-(-6)}{2-0} = 3$ $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{10-3}{3-0} = 7$ $f[x_1, x_2] = \frac{3-(-6)}{2-1} = 9$
۳	۴	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{55-3}{3-1} = 26$ $f[x_2, x_3] = \frac{169-3}{6-2} = 42$
۶	۱۶۹	

$$p(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

$$\Rightarrow p(x) = 1 + (x - 0)(-6) + (x - 0)(x - 1)(3) + (x - 0)(x - 1)(x - 3)(7) =$$

$$= 1 - 6x + 3x^2 - 7x^3 + 21x^4$$

$$\Rightarrow p(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 6x + 1$$

$$p(5) = (5)^4 - 7(5)^3 + 3(5)^2 - 6(5) + 1 = 1250 - 875 + 75 - 30 + 1 = 451$$

لذا:

مثال: یک چند جمله ای درون یاب با استفاده از نقاط زیر به دست آورید.

$x_i$	۰	۱	۲	۴
$f_i$	۱	۱	۲	۵

$x_j$	$f_j$	
0	1	$f = \frac{1-1}{1-0} = 0$
1	1	$f = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$
2	2	$f = \frac{1/2 - 1/2}{2-1} = -1/2$ $f = \frac{2-1}{2-1} = 1$
4	5	$f = \frac{3/2 - 1}{4-1} = \frac{1}{6}$
		$f = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$

$$p(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

$$\Rightarrow p(x) = 1 + x \times 0 + (x)(x-1) \times 1/2 + (x)(x-1)(x-2)(-1/2) =$$

$$= 1 + \frac{x^2 - x}{2} - \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{12}$$

$$= \frac{x^3}{12} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

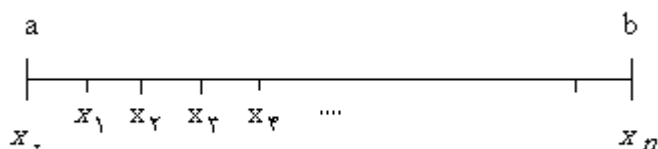
### كثير الجمله هاى پيشرو و پسرو نيوتن :

اين كثير الجمله ها زمانى به كار برده مى شوند كه طول نقاط متساوى الفاصله باشند، در اين روش نيز اگر

نقاطى به جدول اضافه شوند، محاسبات قبلى از بين نمى رود. براى تشریح اين كثير الجمله ها

علائم زير را معرفى مى كنيم. اگر بخواهيم بين بازه  $[a, b]$  يك كثير الجمله داشته باشيم، ابتدا آنها را به  $n$

قسمت مساوى تقسيم مى كنيم.



$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_0 = a$$

$$x_1 = x_0 + h = a + h$$

$$x_2 = x_1 + h = a + h + h = a + 2h$$

⋮

$$x_j = a + jh \quad (\text{ب}) \quad x_j = x_0 + jh$$

$$x_j - x_0 = jh$$

$$x_j - x_{j-1} = h$$

در حالت کلی تفاوت های پیشرو و پسرو را با علائم:  $\Delta$  (پیشرو) و  $\nabla$  (پسرو) نمایش می دهیم.

برای محاسبه این تفاوت ها می توان از جدول زیر استفاده کرد :

$x_i$	$f_i$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$
$x_{-3}$	$f_{-3}$						
		$\Delta f_{-3}$					
$x_{-2}$	$f_{-2}$		$\Delta^2 f_{-3}$				
		$\Delta f_{-2}$		$\Delta^3 f_{-3}$			
$x_{-1}$	$f_{-1}$		$\Delta^2 f_{-2}$		$\Delta^4 f_{-3}$		
		$\Delta f_{-1}$		$\Delta^3 f_{-2}$		$\Delta^5 f_{-3}$	
$x_0$	$f_0$		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$		$\Delta^6 f_{-3}$
		$\Delta f_0$		$\Delta^3 f_{-1}$		$\Delta^5 f_{-2}$	
$x_1$	$f_1$		$\Delta^2 f_0$		$\Delta^4 f_{-1}$		
		$\Delta f_1$		$\Delta^3 f_0$			
$x_2$	$f_2$		$\Delta^2 f_1$				
		$\Delta f_2$					
$x_3$	$f_3$						
.	.						
.	.						
.	.						

که در این جدول :

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$$

$$\Delta^2 f_j = \Delta f_{j+1} - \Delta f_j$$

از روابط کلی می توان استفاده کرد:

$$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$= (f(x+2h) - f(x+h)) - (f(x+h) - f(x))$$

$$\rightarrow \Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

به طور کلی:

$$\Delta^j f(x) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^i f[x+(j-i)h]$$

مثال :

جدول زیر را کامل کنید.

$x_i$	$f_i$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
-2	-11	7					
-1	-4	1	-6	6			
0	-3	1	0	+6	0	0	
1	-2	7	6	6	0	0	0
2	5	19	12	6	0		
3	24	37	18				
4	61						

نکته طلایی:

توجه شود در جدول تفاوت های محدود حاصل جمع هر ستون برابر است با تفاضل اولین عنصر

از آخرین عنصر ستون ما قبل آن . این نکته تست مناسبی برای بررسی صحت محاسبات جدول

می باشد: داریم:

(اولین عنصر ستون) - (آخرین عنصر ستون) = حاصل عناصر ستون

$k+1$ ام

$k$ ام

$k$ ام



### نکته:

کثیرالجمله های پیشرو این دو خاصیت را دارند:

اینکه از تمام نقاط جدول می گذرد ، یعنی خطای آن در آن نقاط برابر صفر است . سپس درجه

کثیرالجمله حاصل یک واحد از تعداد نقاط کمتر است . درون یا بی خطی تا زمانی متمر ثمر

است که رفتار تابع  $f(x)$  شبیه کثیرالجمله ما باشد.

کثیرالجمله درجه  $n$  ام پیشرو :

در حالت کلی کثیرالجمله ای که از نقاط

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$$

می گذرد به صورت زیر تعریف می شود :

$$F(x) \approx p(x) = f_0 + r \Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-(n-1))}{n!} \Delta^n f$$

$$r = \frac{x - x_0}{n}$$

### مثال :

چند جمله ای درون یا ب جدول زیر را با استفاده از تفاضلات پیشرو نیوتن بنویسید.

$x_i$	$f_i$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
-2	3			
		-2		
-1	1		2	
		0		0
0	1		2	
		2		
1	3			

$$F(x) \approx p(x) = 3 + r(-2) + \frac{r(r-1)}{2!}(2) + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(0)$$

$$\Rightarrow p(x) = 3 - 2r + r^2 - r$$

$$\Rightarrow p(x) = r^2 - 3r + 3$$

$$r = \frac{x - x_0}{n} = \frac{x + 2}{1} = x + 2$$

$$\Rightarrow p(x) = (x + 2)^2 - 3(x + 2) + 3$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2 + 4x + 4 - 3x - 6 + 3$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2 + x + 1$$

جدول پسر و :

$x_i$	$f_i$	$\nabla f$	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$	$\nabla^5 f$
$x_{-3}$	$f_{-3}$					
$x_{-2}$	$f_{-2}$	$\nabla f_{-2}$				
			$\nabla^2 f_{-1}$			
$x_{-1}$	$f_{-1}$	$\nabla f_{-1}$		$\nabla^3 f_0$		
$x_0$	$f_0$		$\nabla^2 f_0$		$\nabla^4 f_1$	
$x_1$	$f_1$	$\nabla f_0$		$\nabla^3 f_1$		$\nabla^5 f_2$
			$\nabla^2 f_1$		$\nabla^4 f_2$	
$x_2$	$f_2$	$\nabla f_1$		$\nabla^3 f_2$		
$x_3$	$f_3$		$\nabla^2 f_2$			
		$\nabla f_2$				

که در این جدول :

$$\nabla f_j = f_j - f_{j-1}$$

$$\nabla^2 f_j = \nabla f_j - \nabla f_{j-1}$$

کثیرال جمله پسرو درجه n ام نیوتن:

در حالت کلی فرمول کثیرال جمله ای که از نقاط  $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$  عبور می

کند به صورت زیر تعریف می شود :

$$f(x) \approx p(x) = f_n + r\nabla f_n + \frac{r(r-1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} \nabla^3 f_n + \dots$$

$$+ \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-(n-1))}{n!} \nabla^n f_n$$

$$r = \frac{x - x_n}{h}$$

**تمرین :**

با استفاده از نقاط زیر کثیرال جمله پسرو نیوتن را روی آن پیاده سازی کنید.

$x_i$	-1	0	1	2
$f_i$	0	-1	2	9

$x_i$	$f_i$			
-1	0			
		-1		
0	-1		4	
		3		0
1	2		4	
		7		
2	9			

$$f(x) \approx p(x) = f_n + r \nabla f_n + \frac{r(r-1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} \nabla^3 f_n$$

$$\Rightarrow p(x) = 9 + r(7) + \frac{r(r-1)}{2} (4) + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} (0)$$

$$\Rightarrow p(x) = 9 + 7r + 2r^2 - 2r = 9 + 5r + 2r^2$$

$$r = \frac{x - x_n}{h} = \frac{x - 2}{1} = x - 2$$

$$\Rightarrow p(x) = 9 + 5(x - 2) + 2(x - 2)^2$$

$$\Rightarrow p(x) = 9 + 5x - 10 + 2x^2 - 8x + 8$$

$$\Rightarrow p(x) = 2x^2 - 3x + 7$$

### تمرین (1):

با استفاده از جدول زیر از روش های گفته شده تقریب کنید.

الف) پیشرو      ب) پسرو      ج) لاگرانژ      د) تفاضل های تقسیمی      ه) ضرائب نا معین

$x_i$	2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6
$f_i$	1/4143	1/4491	1/4832	1/5166	1/5493	1/5813	1/6162

### تمرین (2):

جدول زیر فشار گاز را در دماهای متفاوت نشان می دهد:

الف) با استفاده از دو روش پسرو و پیشرو نیوتن فشار گاز را در دمای  $22^\circ$  معین کنید.

ب) مقدار فشار گاز را با استفاده از دو روش پسرو و پیشرو در دمای  $59^\circ$  محاسبه کنید.

$t_i = \text{دما}$	20	25	30	35	40	4	50	55	60
$f_i$	850	985	1170	1365	1570	1790	2030	2300	2610

فشار گاز

### تمرین (3):

برای داده های زیر مانند تمرین (1) همگی را پیاده سازی کنید.

$x_i$	0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5
$f_i$	1/00	1/32	1/68	2/08	2/52	3/00

تبدیل درون یابی معکوس به درون یابی مستقیم:

اگر  $y=f(x)$  باشد و  $f$  معکوس پذیر باشد، آنگاه:  $x = f^{-1}(y)$

$x_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	.....	$x_n$	لذا به جای
$f_i$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	.....	$f_n$	

می توانیم جدول زیر را در نظر بگیریم:

$f_i$	$f_0$	$f_1$	.....	$f_n$
$x_i$	$x_0$	$x_1$	.....	$x_n$

با توجه به اینکه معمولا فاصله  $f_i$  ها یکسان نیست و انتخاب آنها نیز در اختیار ما نیست ، لذا می

توان از فرمول های پیشرو و پسرو نیوتن استفاده کرد . از این رو تنها روش موثر که همواره قابل

استفاده است جدول تفاضلات تقسیم شده می باشد که در آن نقش  $x_i$  ها و  $f_i$  ها عوض می شود.

مثال :

جدول زیر مفروض است تخمینی از صفر این تابع را به دست آورید:

$x_i$	0	1	2	3
$f_i$	-1/5	-1	2/5	15

نکته :

معمولا  $f_i$  ها را می توان به صورت دلخواه مرتب کرد . این عمل را طوری انجام می دهیم که

$|f(x) - f^*|$  صعودی باشد . این عمل برای کم کردن خطای گرد کردن لازم است و باید همیشه

انجام شود.

$f_i$	$x_i$	اول	دوم	سوم
-1	1	2		
-1/5	0	0/5	-0/4286	0/0252
2/5	2	0/08	-0/0255	
15	3			

$$x \approx 1 + (0+1) \times 2 + (0+1)(0+1/5) \times (-0/4286) + (0+1)(0+1/5)(0-2/5) \times (0/0252) \\ = 1 + 2 - 0/6429 - 0/0945 = 2/2626$$

مشاهده میشود که جواب به دست آمده بسیار نادقیق است، زیرا که  $f(2) = 2/5$  و  $f(1) = -1$  که قاعدتا ریشه باید بین 1 و 2 باشد نه بیش 2.

علت این امر آن است که فاصله بین  $x$  های جدول بسیار زیاد است، در صورتی که فاصله بین  $x$  ها را کمتر بگیریم دقت جواب زیاد خواهد شد.

### تمرین :

با استفاده از جدول زیر تقریبی از صفر تابع  $f$  به دست آورید.

$x_i$	1	1/1	1/2	1/3
$f_i$	-1/25	-0/876	0/338	0/388

### برازش منحنی :

واقعیت این است که مقادیر  $f_i$  در یک تابع جدولی تقریبی هستند، زیرا از طریق اندازه گیری یا آزمایش به دست می آیند، بنابراین اصرار در این که چند جمله ای درون یا ب در نقاط  $x_i$  مقدار  $f_i$  را داشته باشد بیهوده است. در عمل اکثرا نقاط جدولی را بوسیله یک منحنی چنان برازش می کنند که خطا به نوعی حداقل شود.

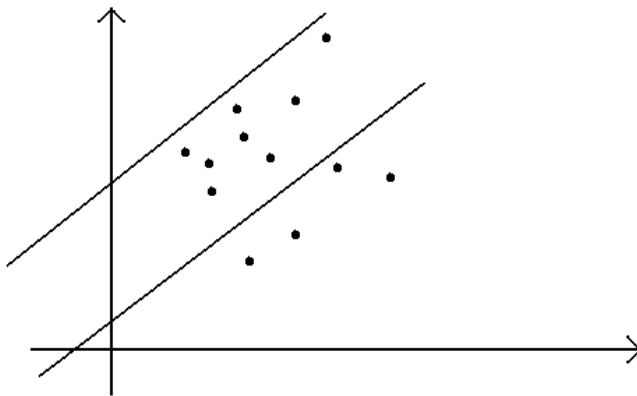
### تعریف :

فرض کنید نقاط  $(x_i, y_i)$  :  $i=0, 1, 2, \dots, n$  ، مفروض باشد و چند جمله ای  $p(x)$  که ما داریم :

$$s = \sum_{i=1}^n (y_i - p(x_i))^2$$

چنان باشد که کمترین مقدار را داشته باشد در این صورت  $p(x)$  را چند

جمله ای تقریب کمترین مربعات برای داده های  $(x_i, y_i)$  ،  $i=0, 1, 2, \dots, n$  می نامند.



$$s = \sum_{i=1}^n (y_i - p(x_i))^2$$

### خط کمترین مربعات :

یکی از متداولترین روشهای برازش منحنی انتخاب خط کمترین مربعات می باشد که برای برازش

$n$  نقطه  $(x_i, y_i)$  که  $i=0, 1, 2, \dots, n$  ، به صورت زیر عمل می کنیم :

$$s = \sum_{i=1}^n (y_i - (p(x_i)))^2$$

در این روش  $p(x) = ax + b$  که باید  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنیم که

$$s = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

یا  $s$  مینموم باشد از این رو پس از مرتب کردن و ساده کردن نتیجه زیر

حاصل می شود :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^n y_i$$



مثال :

خط کمتريـن مربعات براي تابع جدولی زیر را بنویسید.

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$y_i$	0	1	2	3	3

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	
-2	0	4	0	
-1	1	1	-1	
0	2	0	0	
1	2	1	2	
2	3	4	6	
$n=5$	$\sum x_i = 0$	$\sum y_i = 8$	$\sum x_i^2 = 10$	$\sum x_i y_i = 7$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\Rightarrow 10a + 0b = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{10}$$

$$0a + 5b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{7}{10}x + \frac{8}{5}$$

تمرین :

خط کمتريـن مربعات مربوط به جدولهای زیر را بنویسید.

1)

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
-3	1	9	-3
-2	3	4	-6
1	0	1	0
2	2	4	4
3	5	9	15
$n=5$	$\sum x_i = 1$	$\sum y_i = 11$	$\sum x_i^2 = 27$
			$\sum x_i y_i = 10$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\Rightarrow 27a + b = 10$$

$$-135a - 5b = -50$$

$\Rightarrow$

$$0a + 5b = 11$$

$$a + 5b = 11$$

$$\Rightarrow -134a = -39 \Rightarrow a = \frac{39}{134}$$

$$\Rightarrow b = \frac{287}{134}$$

$$\Rightarrow p(x) = ax + b$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{39}{134}x + \frac{287}{134}$$

2)

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
-1	-0/9	1	0/9
0	0/3	0	0

1	1/6	1	1/6	
2	2/8	4	5/6	
3	4	9	12	
$n=5$	$\sum x_i = 5$	$\sum y_i = 7/8$	$\sum x_i^2 = 15$	$\sum x_i y_i = 20/1$

با جایگذاری در فرمول داریم:

$$\Rightarrow 15a + 5b = 20/1 \qquad 15a + 5b = 20/1$$

$\Rightarrow$

$$\times (-1) \quad 5a + 5b = 7/8 \qquad -5a - 5b = -7/8$$

$$\Rightarrow 10a = 12/3 \Rightarrow a = \frac{12/3}{10} = 1/23$$

$$\Rightarrow b = 0/33$$

$$\Rightarrow p(x) = ax + b \Rightarrow p(x) = 1/23x + 0/33$$

فصل چهارم :

مشتق:

اغلب اوقات مقدار عددی یک تابع در جدول داده شده و مشتق آن در یک یا چند نقطه خاص از

ما می خواهند و یا خود تابع را داریم و مشتق آن، آنقدر پیچیده و مشکل بوده و خواستار مقدار

عددی مشتق هستیم، در این فصل نیز مانند سایر مباحث، اول تابع را توسط کثیرالجمله ای

تقریب می کنیم سپس از کثیرالجمله حاصل مشتق می گیریم:  $f(x) = p_n(x) \Rightarrow f'(x_j) = p'_n(x_j)$

اینک به اثبات چند فرمول مشتق می پردازیم که از طریق بسط تیلور به دست می آید.

بسط تیلور را برای نقطه  $x_{i+1}$  می نویسیم:

(1)

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots$$

حال چون  $x_{i+1} - x_i = h$ ؛ و می توانیم  $f(x_i)$  را با  $f_i$  نشان دهیم، لذا داریم:

$$f_{i+1} \approx f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots$$

$$\Rightarrow -hf'_i \approx f_i - f_{i+1} + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots$$

$$\Rightarrow f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2!} f''_i + \dots$$

$$\Rightarrow f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - E$$

که در آن  $E = O(h)$  یعنی خطا نسبت به  $h$  از مرتبه 1 می باشد. حال فرمول دیگری را برای این

منظور برای  $x_{i-1}$  می نویسیم:

(2)

$$f(x_{i-1}) \approx f(x_i) + (x_{i-1} - x_i)f'(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots$$

حال چون  $x_{i-1} - x_i = h$  و می توانیم  $f(x_i)$  را با  $f_i$  نمایش دهیم ، لذا داریم:

$$f_{i-1} \approx f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots$$

$$hf'_i \approx f_i - f_{i-1} + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots$$

$$f'_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{h}{2!} f''_i + \dots$$

$$\Rightarrow f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + E$$

که در آن خطای E نسبت به h از مرتبه 1 می باشد.

ملاحظه می شود که در دو فرمول فوق خطا نسبت به h از مرتبه 1 می باشند. حال فرمول دیگری

را به دست می آوریم که خطا نسبت به h از مرتبه 2 باشد، برای این منظور طرفین معادلات 1 و

2 را از هم کم می کنیم:

$$\Rightarrow f_{i+1} - f_{i-1} = (f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots) - (f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots)$$

$$\Rightarrow f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + \frac{2h^3}{3!} f'''_i + \dots$$

$$\Rightarrow 2hf'_i = f_{i+1} - f_{i-1} - \frac{2h^3}{3!} f'''_i - \dots$$

$$\Rightarrow f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''_i - \dots$$

$$\Rightarrow f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - E$$

$$E = O(h^2)$$

ملاحظه می شود که دقت این فرمول به مراتب بیشتر از 1 و 2 می باشد . اگر خواسته باشیم باز هم

دقت را افزایش دهیم آنگاه بسط تیلور را برای  $x_{i+2}$  می نویسیم:

$$f(x_{i+2}) \approx f(x_i) + (x_{i+2} - x_i)f'(x_i) + \frac{(x_{i+2} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots$$

.

.

.

$$f'_i = \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h} + E$$

$$E = O(h^4)$$

مثال :

با استفاده از فرمولهای به دست آمده  $f'(1/4)$  را حساب کنید . (با استفاده از جدول (4D) ).

[ نکته :  $f'(1/4) = \cosh(1/4) = 2/1509$  ]

$x_i$	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$f_i$	1/5095	1/6984	1/9043	2/1293	2/3756

$$f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{n} \Rightarrow f'(1/4) = \frac{f(1/5) - f(1/4)}{0/1} = \frac{2/1293 - 1/9043}{0/1} = 2/25$$

$$f'_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \Rightarrow f'(1/4) = \frac{f(1/4) - f(1/3)}{0/1} = \frac{2/1293 - 1/6984}{0/1} = 2/059$$

$$f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \Rightarrow f'(1/4) = \frac{f(1/5) - f(1/3)}{0/2} = \frac{2/1293 - 1/6984}{0/2} = 2/1545$$

$$f'_i \approx \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h}$$

$$\Rightarrow f'(1/4) = \frac{f(1/2) - 8f(1/3) + 8f(1/5) - f(1/6)}{1/2}$$

$$= \frac{1/5095 - 8(1/6984) + 8(2/1293) - (2/3756)}{1/2} = 2/1509$$

انتگرال :

در این فصل مقدار عددی انتگرال معین مورد نظر ماست ، یعنی  $\int_a^b f(x)dx$  که در آن  $a$  و  $b$  معلوم

و  $f(x)$  به طور تحلیلی توسط یک فرمول داده شده یا اینکه مقادیر  $f(x)$  به ازای  $x$  های مختلف در

جدولی مشخص گردیده است. می دانیم که اگر تابع  $f(x)$  را به قسمی پیدا کنیم که

$f(x) = F'(x)$  صدق کند، آنگاه مقدار عددی انتگرال از رابطه زیر بدست می آید:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

به هر حال در کاربردهای مهندسی اغلب به انتگرال هایی برخورد می کنیم که برای تابع زیر

انتگرال  $f(x)$  تابع اولیه ای مانند  $f(x)$  را نمی توانیم به طور تحلیلی بیان کنیم یا مقدار عددی تابع

$f(x)$  در یک جدول داده شده است ، در این حالات بایستی از یک روش تقریبی برای محاسبه

مقدار عددی انتگرال استفاده کنیم، مثلاً انتگرالهایی که به روش عادی نمی توان آنها را محاسبه

کرد :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \int_{-2}^2 e^{-x^2} dx, \dots$$

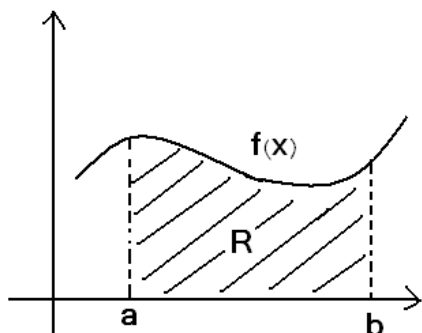
- انتگرال  $\int_a^b f(x)dx$  همان مساحت محصور شده بین منحنی  $y = f(x)$  و خطوط  $x = a$  و  $x = b$

و محور  $x$  ها می باشد . در واقع برای محاسبه مقدار عددی انتگرال بایستی سطح  $R$  را حساب

کنیم در این زمینه روش های متعددی وجود دارد که چند روش از آن ها را بیان کرده که بعداً

شما برنامه کامپیوتری

آنها را خواهید نوشت .



برای این منظور تابع  $f(x)$  را توسط یک کثیرالجمله تقریب می کنیم سپس از کثیرالجمله حاصل انتگرال گرفته و مقدار عددی انتگرال را به دست می آوریم . بدیهی است که هر چه درجه کثیرالجمله تقریب بیشتر باشد دقت ما بیشتر خواهد بود . یکی از این روشها روش مستطیل است که آن را توضیح می دهیم.

### قانون مستطیل:

در این روش اول فاصله  $[a,b]$  را به  $n$  قسمت مساوی تقسیم می کنیم آنگاه در هر بازه  $f(x)$  توسط یک کثیرالجمله درجه صفر تقریب می شود ، یعنی در زیر فاصله  $[x_i, x_{i+1}]$  توسط مقدار  $f(x_i)$  تقریب می شود در واقع در هر زیر فاصله منحنی توسط خطی موازی محور  $x$  ها تقریب می شود.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \quad , \quad x_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$s = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$



اما برای محاسبه یکی از آنها داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx = f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = f(x_i)(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = hf(x_i)$$

حال می توان تعمیم داد و نوشت:

$$s = hf(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + \dots + hf(x_i) + \dots + hf(x_{n-1})$$

$$\Rightarrow s = h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

**مثال:**

مطلوب است با استفاده از روش گفته شده  $\int_0^1 x^2 dx$  با  $h = \frac{1}{2}$  را حل کنید.

$$\int_0^1 x^2 dx = h(f(x_0) + f(x_1))$$

$x_i$	$x_0$	$x_0$	$x_1$	$x_1$	$x_2$
	0	0/25	0/5	0/75	1
$f_i$	0		0/25		1
	$f_0$		$f_1$		$f_2$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 dx = h(f(x_0) + f(x_1)) = \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{16} + \frac{9}{16} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{10}{16} \right) = \frac{5}{16}$$

$$\text{مقدار دقیق: } \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{خطا} = \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{16} \right) = \frac{1}{48}$$

### قاعده ذوزنقه :

در روش مستطیل چون  $f(x)$  توسط یک کثیرالجمله درجه صفر تقریب می شد، از دقت نسبتاً کمی برخوردار بود. حال برای بالا بردن دقت، کثیرالجمله را از درجه صفر به درجه یک ارتقا می دهیم.

؟؟؟

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$p_1(x) = f_i + r\Delta f_i$$

$$x = x_i + rh \Rightarrow r = \frac{x - x_i}{h}$$

لذا در هر بازه مانند  $[x_i, x_{i+1}]$  توسط یک چند جمله ای درجه یک پیشرو تقریب می شود، لذا:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} h(f_i + r\Delta f_i)dr = h \left[ rf_i + \frac{r^2}{2} \Delta f_i \right]_0^1$$

$$= h(f_i + \frac{1}{2} \Delta f_i)$$

حال اگر:  $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$  را جاگذاری کنیم داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

لذا:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

در نتیجه فرمول کلی آن را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &= \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \frac{h}{2}(f_2 + f_3) + \dots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) \\ &= \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-1} + f_n] = T(h) \\ &= h \left[ \frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right]\end{aligned}$$

فرمول بالا نشان می دهد که هر چه  $h$  کوچکتر باشد خطا کمتر است.

**مثال :**

تقریبهایی از  $\int_0^1 x^2 dx$  برای  $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  حساب و خطای آن را بررسی کنید.

$$f(x) = x^2$$

$$T(h) = h \left[ \frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right]$$

$$T(1) = 1 \left[ \frac{f_{(0)}}{2} + \frac{f_{(1)}}{2} \right] = \frac{1}{2} [0 + 1] = \frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{f_{(0)}}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f_{(1)}}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}T\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{4} \left[ \frac{f_{(0)}}{2} + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{f_{(1)}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{8}{16} \right] = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}\end{aligned}$$

$$\text{مقدار دقیق: } \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$T(1) \text{ خطای} = \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2-3}{6} \right| = \frac{1}{6}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) \text{ خطای} = \left| \frac{1}{3} - \frac{3}{8} \right| = \left| \frac{8-9}{24} \right| = \frac{1}{24}$$

$$T(\frac{1}{4})_{\text{خطای}} = \left| \frac{1}{3} - \frac{11}{32} \right| = \frac{1}{96}$$

ملاحظه می شود که هر چه  $h$  کوچکتر می شود خطا کم می شود.

### تمرین:

تقریبی از  $\int_0^1 f(x)dx$  را با استفاده از جدول مقادیر زیر حساب کنید.

$x_i$	0	0/2	0/4	0/6	0/8
	1				
$f_i$	1	1/2214	1/4918	1/8221	2/2255
	2/7183				

### تمرین:

تقریبی از  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  را با استفاده از  $h = \frac{n}{8}$  حساب کنید و با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

### با روش دوزنقه:

$$F(x) = \sin x$$

$$T(h) = h \left[ \frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right]$$

$$T(\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{8} \left[ \frac{f_0}{2} + f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{2\pi}{8}) + f(\frac{3\pi}{8}) + \frac{f(\frac{4\pi}{8})}{2} \right]$$

$$\Rightarrow T(\frac{\pi}{8}) = 0/3925 [0 + 0/3824 + 0/7068 + 0/9236 + 0/4999] = 0/986274$$

$$\text{مقدار دقیق: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1 = A$$

$$\Rightarrow \text{خطا} \quad E = A - T(h) = 1 - 0/986274 = 0/013726$$

که با روش مستطیل نیز همین مقدار به دست می آید.

### تمرین:

مطلوب است محاسبه انتگرال های زیر با  $h$  های داده شده ؟

1)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$T(1) = 1 \left[ \frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{4} = 0/75$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f(1)}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{31}{20} \right] = \frac{31}{40} = 0/775$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \left[ \frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{f(1)}{2} \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{4} \right] = 0/25 [2/5167] = 0/6291$$

$$\text{مقدار دقیق} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} = 0/785$$

$$\Rightarrow |ET(1)| = 0/035 \quad \left| ET\left(\frac{1}{2}\right) \right| = 0/01 \quad \left| ET\left(\frac{1}{4}\right) \right| = 0/1559$$

2)

$$\int_0^2 x e^x dx \quad h = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{4}$$

– اگر  $M_2$  یک کران بالا برای  $|f''(x)|$  باشد یعنی:

$$\max |f''(x)| \leq M_2$$

$$a \leq x \leq b$$

آنگاه در مورد خطای دوزنقه می توان نوشت :

$$|ET(h)| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

$$\left[ \frac{b-a}{12} h^2 M_2 \leq \varepsilon_e \right]$$

**مثال :**

تقریبی از  $\int_0^1 x \sin x dx$  با قاعده دوزنقه ای حساب کنید که خطای آن از  $10^{-2}$  کمتر باشد.

حل) ابتدا باید  $M_2$  را حساب کنیم لذا :

$$f(x) = x \sin x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$$

$$|f''(x)| = |2 \cos x - x \sin x| \leq 2|\cos x| + |x||\sin x| \leq 2 \times 1 + 1 \times 1 = 3 \rightarrow M_2$$

که داریم

حال  $h$  را از رابطه زیر محاسبه می کنیم:

$$\frac{b-a}{12} h^2 M_2 \leq \varepsilon_e \Rightarrow \frac{1-0}{12} h^2 (3) \leq \varepsilon_e \Rightarrow \frac{h^2}{4} \leq 10^{-2} \Rightarrow h^2 \leq 0/04 \Rightarrow h \leq 0/2$$

حال اگر  $h$  را برابر  $0/2$  بگیریم با استفاده از قاعده دوزنقه داریم:

$$\int_0^1 x \sin x dx =$$

$$\frac{0/2}{2} [0 \sin(0) + 2(0/2) \sin(0/2) + 2(0/4) \sin(0/4) + 2(0/6) \sin(0/6) + 2(0/8) \sin(0/8) + 1 \sin(1)]$$

$$= 0/30578$$

برای محاسبه انتگرال واقعی داریم:

$$\int_0^1 x \sin x dx = -x \cos x - \int_0^1 -\cos x dx = -x \cos x + \sin x \Big|_0^1 = 0/30117$$

$$\Rightarrow |ET(0/2)| \leq |0/30117 - 0/30578| = 0/00461$$

$$|ET(0/2)| \leq 10^{-2}$$

تمرین: اگر  $M$  تعداد نقاط و  $h$  طول فاصله را مشخص کند آنها را طوری بیابید که قانون دوزنقه

در مورد انتگرال زیر دقتی معادل  $5 \times 10^{-9}$  داشته باشد.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$$

$$f(x) = \cos x, \quad b = \frac{\pi}{6}, \quad a = -\frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon_e = 5 \times 10^{-9}$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x$$

$$|f''(x)| = |-\cos x| \leq 1 = M_2 \quad \text{که داریم}$$

$$\frac{b-a}{12} h^2 M_2 \leq \varepsilon_e \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}}{12} h^2 (1) \leq 5 \times 10^{-9}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{18} h^2 \leq 5 \times 10^{-9} \Rightarrow 0/1744 h^2 \leq 5 \times 10^{-9} \Rightarrow h^2 \leq 28/6624 \times 10^{-9}$$

$$\Rightarrow h^2 \leq 286/624 \times 10^{-10} \Rightarrow h \leq 16/9299 \times 10^{-5}$$

**تذکر:**

توجه شود که در روش دوزنقه هر چه تعداد تقسیمات یعنی  $n$  زیاد شود در نتیجه طول فواصل

یعنی  $h$  کوچک می شود لذا دقت بالا می رود. در نتیجه خطا کم می شود ولی از یک مرحله به

بعد در اثر خطای گرد کردن با افزایش  $n$  دقت کم می شود.

برای اینکه بتوان یک  $n$  مناسب انتخاب نمود، راههای متفاوتی وجود دارد:

در هر مرحله که تعداد تقسیمات را افزایش می دهیم، جواب های دو مرحله را با هم مقایسه می

کنیم اگر نتایج دو مرحله تا  $k$  رقم مثل هم بود، آنگاه دقت مورد نظربه دست آمده و باید

محاسبات متوقف و تعداد تقسیمات افزایش نیابد.

### قانون سیمپسون:

مشهود است که قاعده ذوزنقه بسیار کند است به عبارت دیگر برای به دست آوردن تقریبی نه

چندان دقیق باید تابع را در نقاط بسیاری محاسبه کرد. در روش های قبلی، مثلاً مستطیل، توسط

یک کثیرالوجه درجه صفر و ذوزنقه توسط یک کثیرالوجه درجه ۱ تقریب می شد. اما در

روش سیمپسون این بار  $f(x)$  را توسط کثیرالوجه درجه ۲ تقریب می کنیم که  $h$  ها و  $n$  ها از

همان قوانین قبلی تبعیت می کند.

ابتدا چند جمله ای درون یاب  $f$  را برای نقاط  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$  می نویسیم، این چند جمله ای با

توجه به مطالب گفته شده در فصل قبل به صورت زیر تقریب می شود:

$$P(x) = f_i + r\Delta f_i + \frac{r(r-1)}{r!} \Delta^2 f_i$$

بنابراین قرار می دهیم:

$$\int_{x_i}^{x_i+2} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_i+2} P(x)dx$$

و انتگرال سمت راست را حل می کنیم:

با تغییر متغیر  $x = x_i + rh$  داریم:



$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x) dx \approx \int_0^2 (f_i + r\Delta f_i + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 f_i) h dr$$

حال انتگرال را حساب می کنیم ، داریم :

$$= h \left[ rf_i + \frac{r^2}{2} \Delta f_i + \left( \frac{r^3}{6} - \frac{r^2}{4} \right) \Delta^2 f_i \right] \Big|_0^2$$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx = \left( 2f_i + 2\Delta f_i + \frac{1}{3} \Delta^2 f_i \right) h$$

باتوجه به اینکه

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i, \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

وجایگذاری داریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x) dx = \frac{h}{3} (f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$$

حال اگر قاعده سیمپسون را برای کل بازه  $[x_0, x_n]$  دو گام ، دو گام یعنی  $[x_i, x_{i+2}]$

اجرا کنیم (n باید زوج باشد) ، داریم :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

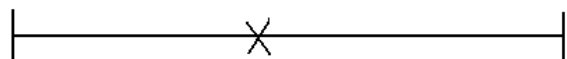
$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

لذا داریم :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3} (f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3} (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

فرمول قاعده سیمپسون مرکب

$$0 \qquad \qquad \pi/4 \qquad \qquad \pi/2$$



$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = s(h) \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

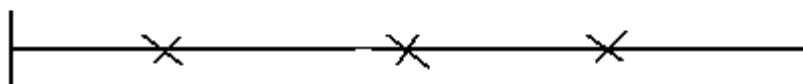
مثال :

تقریبی از  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$  با قاعدهٔ سیمپسون با  $h = \frac{\pi}{4}$  و تقریب دیگری با  $h = \frac{\pi}{8}$  حساب کنید .

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{\pi}{12}(\sin(0) + 4\sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2}))$$

$$= \frac{\pi}{12}(0 + 2\sqrt{2} + 1) = 1/0028$$

$$\pi/2 \qquad 3\pi/8 \qquad \pi/4 \qquad \pi/8 \qquad \pi/8$$



$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) = \frac{\pi}{8}(\sin(0) + 4\sin(\frac{\pi}{8}) + 2\sin(\frac{\pi}{4})$$

$$+ 4\sin(\frac{3\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{24}(0 + 1/53073 + 1/4142 + 3/69552 + 1) = 1/00013$$

از طرفی می دانیم :

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0)) = 0 - (-1) = 1$$

تمرین :

تقریبی از  $\int_0^1 x^3 dx$  را با استفاده از قانون سیمپسون نوشته و نشان دهید که سیمپسون برای چند جمله

ای هایی تا درجهٔ سوم دقیق است.

$$h = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{\frac{1}{2}}{3} \left( 0 + 4\left(\frac{1}{8}\right) + 1 \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\text{مقدار دقیق: } \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{IES}\left(\frac{1}{2}\right) = 0:$$

حال برای چند جمله ای های درجه اول و دوم بررسی می کنیم :

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{1}{6} \left( 0 + 4\left(\frac{1}{4}\right) + 1 \right) = \frac{1}{6} (1 + 1) = \frac{1}{3}$$

$$\text{مقدار دقیق} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \left| \text{ES}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = 0:$$

$$\int_0^1 x dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{1}{6} \left( 0 + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \right) = \frac{1}{6} (3) = \frac{1}{2}$$

$$\text{مقدار دقیق: } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \text{ES}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = 0$$

### خطای قائدهٔ سیمپسون :

اگر یک کران بالا برای  $|f^{(4)}(x)|$  باشد یعنی :

$$|f^{(4)}(x)| \leq M_4$$

$$x_0 \leq x \leq x_4$$

که از آن نتیجه می شود:  $|\text{ES}(h)| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4$

$$\frac{b-a}{180} h^4 M_4 \leq \varepsilon_e \quad \text{و داریم:}$$

### تمرین:

تقریبی از  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$  را به روش سیمپسون حساب کنید. خطای آن کمتر از  $10^{-5}$  باشد

( برنامه کامپیوتری آن را بنویسید )

$$f(x) = x \cos x$$

$$f'(x) = \cos x - x \sin x$$

$$f''(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2 \sin x - x \cos x$$

$$f'''(x) = -2 \cos x - \cos x + x \sin x = -3 \cos x + x \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = 3 \sin x + \sin x - x \cos x = 4 \sin x - x \cos x$$

$$|f^{(4)}(x)| = |4 \sin x - x \cos x| \leq 4|\sin x| + |x||\cos x| = 6 = M_4$$

$$\frac{b-a}{180} h^4 M_4 \leq \varepsilon_e \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}}{180} h^4 \times 6 \leq 10^{-5} \Rightarrow \frac{\pi}{60} h^4 \leq 10^{-5}$$

$$\Rightarrow h^4 \leq \frac{60 \times 10^{-5}}{\pi} \Rightarrow h^4 \leq 0.019 \times 10^{-2} \Rightarrow h \leq 1176 \times 10^{-4}$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1176 \times 10^{-4}} = \frac{1/57}{1176 \times 10^{-4}} \Rightarrow n \geq 13/35 \Rightarrow n = 14$$

حال بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  را به ۱۴ قسمت تقسیم می کنیم و به روش سیمپسون تقریبی از  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$  را

می یابیم .

### تمرین:

تقریبی از هر یک از انتگرال های زیر را با قاعده سیمپسون حساب کنید که خطای آنها از  $10^{-3}$

کمتر باشد.

$$\text{الف) } \int_0^1 e^x dx \quad \text{ب) } \int_1^2 x e^x dx \quad \text{پ) } \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \quad \text{ت) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

که از آن نتیجه می شود :

و داریم :

**تمرین:**

حدود  $h$  را برای محاسبه تقریبی  $\int_0^1 e^x \sin x dx$  چنان تعیین کنید که:

$$|ET(h)| < 10^{-5} \quad \text{الف) داشته باشیم}$$

$$|ES(h)| < 10^{-5} \quad \text{ب) داشته باشیم}$$

### قاعده نقطه میانی: Midle point

روش های انتگرال گیری ذوزنقه و سیمپسون که تاکنون شرح داده ایم از نقاط ابتدایی و انتهایی

بازه انتگرال گیری استفاده می کنند. بنابراین محاسبه انتگرال هایی به فرم:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

،

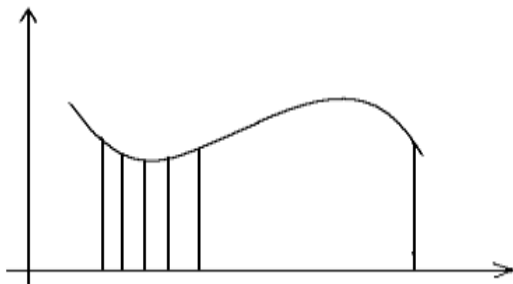
با آن روش ها میسر نمی باشد.

در این قسمت روش ساده ای را شرح می دهیم که می توان تقریب هایی از حساب کرد که از

$$f(a), \quad f(b) \quad \text{استفاده ننماید.}$$

قاعده نقطه میانی : در این قاعده قرار می دهیم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong hf(x_i + \frac{h}{2})$$



که در حالت کلی داریم:

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_0 + \frac{h}{2}) + hf(x_1 + \frac{h}{2}) + \dots + hf(x_{n-1} + \frac{h}{2})$$

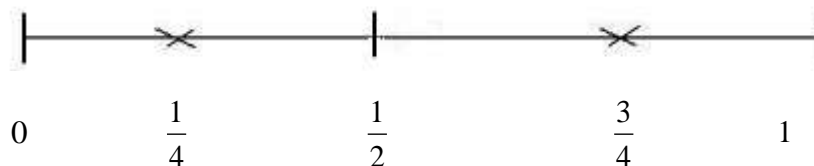
$$\int_a^b f(x)dx = M(h) \approx h \left[ f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1 + \frac{h}{2}) + \dots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2}) \right]$$

ملاحظه می شود که در فرمول فوق نه از  $x_0$  استفاده شده و نه از  $x_n$

**مثال:**

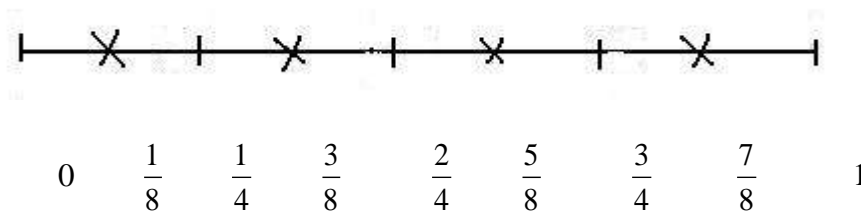
تقریب هایی از  $\int_0^1 x^2 dx$  را به روش نقطه میانی به ازای  $h = \frac{1}{2}$  و  $h = \frac{1}{4}$  حساب کنید و خطای این

مقادیر را به دست آورید.



$$f(x) = x^2$$

$$h = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{16} + \frac{9}{16} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125$$



$$h = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{4} \left[ f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right] =$$

$$\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{25}{64} + \frac{49}{64} \right] = 0/328125$$

دقيق:  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} = 0/33$

$$\left| \text{EM}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = |0/33 - 0/3125| = 0/0208$$

$$\left| \text{EM}\left(\frac{1}{4}\right) \right| = |0/33 - 0/328125| = 0/00521$$

**مثال:**

تقریبی از  $\int_0^{0/09} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  را حساب کنید.

حل) مقدار واقعی انتگرال چنین به دست می آید:

$$\int_0^{0/09} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[ 2\sqrt{x} \right]_0^{0/09} = 0/6$$

ضمناً با استفاده از فرمول نقطه میانی به دست می آوریم: ( با انتخاب  $h = 0/04$  )

$$\int_0^{0/09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0/03 (f(0/015) + f(0/045) + f(0/075))$$

$$= 0/03 (8/165 + 4/7140 + 3/6515)$$

بنابراین:

$$\int_0^{0/09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0/03 \times 16/5305 = 0/49595$$

مشاهده می شود که این مقدار تقریبی حدود 0/104 خطا دارد که قابل توجه است.

از این رو توصیه می شود که در نزدیکی نقاط که  $f(a)$  یا  $f(b)$  بی نهایت هستند، مقدار  $h$  بسیار

کوچک اختیار شود. با انتخاب  $h=1\%$  به دست می آوریم:

$$\int_0^{0/09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0/01 \left[ \frac{1}{\sqrt{0/005}} + \frac{1}{\sqrt{0/015}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{0/085}} \right] = 0/539587$$

خطای این مقدار تقریبی حدود 0/07 است به طوری که در چنین انتگرال هایی باید برای

قسمتی که نزدیک نقطه منفرد تابع است؛  $h$  را بسیار کوچک اختیار کرد و برای بقیه بازه  $h$  را

خیلی کوچک نگرفت، مثلاً قرار دهید:

$$\int_0^{0/09} f(x)dx = \int_0^{0/01} f(x)dx + \int_{0/01}^{0/09} f(x)dx$$

و برای  $\int_0^{0/01} f(x)dx$  مقدار  $h$  را 0/002 و برای  $\int_{0/01}^{0/09} f(x)dx$  مقدار  $h$  را 0/02 در نظر بگیرید

با این انتخاب به دست می آوریم:



$$\int_0^{0.01} f(x)dx \approx 0.02 \left[ \frac{1}{\sqrt{0.001}} + \frac{1}{\sqrt{0.003}} + \frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.007}} + \frac{1}{\sqrt{0.009}} \right] =$$

$$= 0.002(31/6228 + 18/2574 + 14/1421 + 11/9523 + 10/5409) = 0.173031$$

و همچنین داریم:

$$\int_{0.01}^{0.09} f(x)dx \approx 0.02 \left[ \frac{1}{\sqrt{0.02}} + \frac{1}{\sqrt{0.04}} + \frac{1}{\sqrt{0.06}} + \frac{1}{\sqrt{0.08}} \right] =$$

$$0.02(7/0711 + 5 + 4/0825 + 3/5355) = 0.02 \times 19/6891 = 0.393782$$

پس:

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0.173031 + 0.393782 = 0.566813$$

اختلاف این مقدار با مقدار واقعی (0/6)، برابر 0/033187 است. اما برای کم کردن خطا، h را باید

کوچک گرفت.

خطای نقطه میانی:

$$\max |f''(x)| \leq M_2$$

$$a \leq x \leq b$$

$$|EM(h)| \leq \frac{b-a}{24} h^2 M_2$$

$$\left[ \frac{b-a}{24} h^2 M_2 \leq \varepsilon_e \right]$$

### خصوصیات روش نقطه میانی:

این روش ظاهراً بهتر از روش دوزنقه ای است زیرا خطای آن نصف خطای دوزنقه ای است.

علاوه بر این برای انتگرال توابعی که در نقاط یا مقدار نامعین (بی نهایت) دارد قابل استفاده است.

اما قاعده دوزنقه ای خاصیت جالبی دارد که نه روش میانی و نه قاعده سیمپسون آن خاصیت را

ندارد. فرض کنید به ازای  $h$  ثابتی  $T(h)$  و  $M(h)$  را حساب کنید. در  $T(h)$  نقاطی که تابع در آنها

حساب می شود به صورت زیر می باشد:

$$T(h) \Rightarrow a, a+h, a+2h, \dots, a+(n-1)h, b$$

و نقاطی که برای نقطه میانی استفاده می کنیم عبارت اند از:

$$M(h) \Rightarrow a + \frac{h}{2}, a + 3\frac{h}{2}, \dots, a + (n-1)h + \frac{h}{2}$$

حال اگر برای این روابط را باز نویسی کنیم داریم:

$$T\left(\frac{h}{2}\right) \Rightarrow a, a + \frac{h}{2}, a + h, a + 3\frac{h}{2}, \dots, a + (n-1)h, a + (n-1)h + \frac{h}{2}, b$$

$$M\left(\frac{h}{2}\right) \Rightarrow a + \frac{h}{4}, a + 3\frac{h}{4}, a + 5\frac{h}{4}, \dots, b - \frac{h}{4}$$

**نکته:**

مشاهده می شود که تمام نقاطی که برای محاسبه  $T(h)$  بکار می رود در محاسبه نیز دیده می شود لذا برای محاسبه می توان از مقادیر تابع که قبلاً حساب شده است استفاده کرد ولی هیچ کدام از نقاطی که در محاسبه به کار می روند از نقاطی که در محاسبه  $M(h)$  به کار رفته اند نیستند.

**نکته:**

اشکال دیگر نقطه میانی آن است که ممکن است نتوان آن را برای برآورد مقدار انتگرال یک تابع جدولی به کار برد. زیرا اگر مقدار تابع در نقاطی که در جدول نیست لازم باشد ابتدا باید از درون یابی استفاده و سپس این مقدار را برآورد کرد.

**تمرین:**

تقریب هایی از انتگرال های زیر را با قاعده میانی به ازای  $h$  های معین شده حساب کنید.

الف)  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$        $h = 0/1$

ب)  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$        $h = 0/2$

**تمرین:**

تقریبی از انتگرال های زیر را حساب کنید که برای آنها  $|EM(h)| < 10^{-3}$

الف)  $\int_0^1 x \sin x dx$

ب)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$

**تمرین:**

تقریبی از  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  حساب کنید.

راهنمایی:  $\left[ \int_0^1 = \int_0^{0.1} + \int_{0.1}^1 \right]$

**فصل پنجم:**

**دستگاهها:**

برای حل دستگاه معادلات خطی دو روش وجود دارد:

الف) روش های مستقیم

ب) روش های تکراری

الف) روش هایی هستند که پس از انجام چند مرحله مشخص به جواب می رسیم که این جواب

بدون در نظر گرفتن خطای گرد کردن جواب دقیق دستگاه است. در حالی که در روش هایی

تکراری تنها به یک تقریب از جواب می رسیم. روش های مستقیم مانند روش  $A^{-1}$  و یا روش

حذفی گوس. که آنها را به صورت زیر شرح می دهیم:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

$Ax=b \Rightarrow$  سمت راست      ماتریس مجهول      ماتریس ضرایب A

$\times$       b

روش:  $A^{-1}$ :

$$Ax=b$$

طرفین را در  $A^{-1}$  ضرب می کنیم:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot b$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot b \Rightarrow X = A^{-1}b$$

برای محاسبه  $A^{-1}$  از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} N^T$$

اما  $N$  چیست:

$$N = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdot & \cdot & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdot & \cdot & \Delta_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdot & \cdot & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

$\Delta_{ij}$  اینگونه حساب می شود که: عنصر  $a_{ij}$  را در نظر گرفته و سطر و ستونش را حذف می کنیم

حال اگر درمیان مابقی آن را حساب کنیم و در علامت محل آنها ضرب کنیم  $\Delta_{ij}$  به دست می آید.

$$a_{ij} \quad \text{علامت محل} = (-1)^{i+j}$$

حال ماتریس  $n$  پدید آمده است اگر سطر و ستون های آن را عوض کنیم ترانواده یا همان

ترنسپوز یا همان  $N^T$  به دست آمده است.

**مثال:**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} N^T$$

نکته:

اگر دترمینان مساوی صفر باشد چون معکوس آن محاسبه نمی شود، به آن ماتریس منفرد می

گویند و در غیر این صورت به آن ماتریس غیر منفرد می گویند.

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & 5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3}(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1-1) - 2(2-3) + (1)(2-(-3)) = 10 + 5 = 15 \neq 0$$

لذا A غیر منفرد است.

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \begin{bmatrix} +(0) & -(-5) & +(5) \\ -(-3) & +(-4) & -(-5) \\ +(3) & -(-1) & +(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N^T = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}+0+\frac{2}{15} \\ \frac{1}{3}+0-\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{5} \\ \frac{7}{15} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{7}{15} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{7}{15} \\ x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

### روش حذفی گوس:

در این روش با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، ماتریس را به یک ماتریس بالا مثلثی (یا پایین

مثلثی) تبدیل می کنیم، آنگاه با جایگذاری پسر و مجهول ها را یکی یکی می یابیم.

( اگر ماتریس پایین مثلثی باشد با عملیات پیشرو به جواب می رسیم).

سؤال: عملیات سطری مقدماتی چیست؟ جواب: عبارت است از:

الف) تعویض کردن دو سطر

ب) ضرب کردن سطر در عددی مخالف صفر

ج) ضرب یک سطر در عددی مخالف صفر و جمع نمودن آن با سطری دیگر.

مثال:



$$\begin{cases} d_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ d_2 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ d_3 \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 \begin{cases} d_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ L_2 - 2d_1 + d_2 \begin{cases} 0 - 5x_2 - x_3 = -2 \\ L_3 - 3d_1 + d_3 \begin{cases} 0 - 5x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ L_2 \begin{cases} 0 - 5x_2 - x_3 = -2 \\ -L_2 + L_3 \begin{cases} 0 - 0 - 3x_3 = 1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2(\frac{7}{15}) + (-\frac{1}{3}) = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5} \\ -5x_2 - (-\frac{1}{3}) = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{15} \\ x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

**نکته:**

اگر ماتریس را به یک ماتریس پایین مثلثی تبدیل می کردیم، جواب ها یمان یکسان به دست می

آمدند. نکته ای دیگر وجود دارد که بسیار مهم است و آن را بعد از مثال زیر خواهیم گفت.

**مثال:**

$$1) \quad \frac{-1}{0/00001} \begin{cases} 0/00001x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow d_1(\frac{-1}{0/00001}) + d_2 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0/00001x_1 + x_2 = 1 \\ 0 + (-10^5 + 1)x_2 = (2 - 10^5) \Rightarrow x_2 = 0/9999 \approx 1 \\ , \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

$$2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 0/00001x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{matrix} \quad \text{ق ق}$$

پس نتیجه می گیریم که جا به جا کردن سطر ها الکی نیست. اگر ماتریس حسابی باشد، احتمال اینکه به جواب غلط برسیم بسیار است. در اینجا روندی را بیان می کنیم که برای ماتریس های حساس نیز به مشکل برنخوریم.

روش کار به این شکل است که ماتریس را نرمالیزه می کنیم یعنی در هر ستون ضریب بزرگ را تشخیص داده و سطر متعلق به آن را به سطر اول انتقال می دهیم، آنگاه از ستون دوم عدد بزرگ را تشخیص داده و سطر متعلق به آن عدد را به سطر دوم انتقال می دهیم و این عمل را تا ستون آخر ادامه می دهیم. یعنی بعد از عمل نرمالیزه کردن باید تا حد امکان ها بزرگترین مقدار را داشته باشد. حال اگر هر معده را در تقسیم کنیم لذا عناصر روی قطر اصلی یک و اکثر عناصر دیگر از یک کوچکتر می باشند. این عمل را عمل نرمالیزه می گویند. حال برای پایین مثلثی کردن، هر  $k$  ایی را در نظر بگیرید قدر مطلق آن کوچکتر از یک خواهد بود. ( $|K| < 1$ )

### ب) روش های تکراری برای حل دستگاههای معادلات خطی:

در این قسمت روش هایی را مورد بررسی قرار می دهیم که این روش ها برنامه کامپیوتری آنها به مراتب ساده تر می باشد. به ویژه اگر در دستگاهی که ماتریس ضرائب آن صفر های زیادی را داشته باشد. روش های تکراری به مراتب مناسب تر از روش های مستقیم می باشد. از روش های

تکراری دو روش ژاکوبی و گوس – سایدل استفاده می کنیم. در این روش ها این عمل برای

هر دو روش یکسان است:

در دستگاه  $AX = b$  از معادله اول را به دست می آوریم. از معادله دوم  $x_2$  را به دست می

آوریم،... و از معادله  $j$ ام را به دست می آوریم. آنگاه با یک تقریب اولیه و جایگذاری و تکرار به

جواب دلخواه می رسیم. حال صحبت هایمان را برای یک دستگاه سه معادله و سه مجهول مثال

می زنیم.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3$$

$$(2) \Rightarrow x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3$$

$$(3) \Rightarrow x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2$$

**تذکر:**

احتمال دارد یکی از ها صفر باشد، برای فرار از این مشکل دو سطر را تعویض می کنیم.

## روش ژاکوبی:

بعد از اینکه نقطه شروع  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$  استفاده می کنیم و با استفاده از معادلات به دست

آمده در مرحله قبل به تقریب جدید  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$  می رسیم، حال اگر در مرحله بعد از این

$x^{(1)}$  استفاده کنیم به  $x^{(2)}$  می رسیم، و در حالت کلی با در دست داشتن  $x^{(k)}$  به  $x^{(k+1)}$  می رسیم

، که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})$$

مثال:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 & \Rightarrow x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 & \Rightarrow x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 & \Rightarrow x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}) \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

$$K=0 \left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + 0 - 0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(9 - 0 - 0) = \frac{9}{6} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(2 + 0 + 0) = \frac{2}{5} \end{array} \right. \Rightarrow x^{(1)} = \left(1, \frac{9}{6}, \frac{2}{5}\right)$$

شماره	$x_1$	$x_2$	$x_3$
تکرار			
•	•	•	•
۱	۱	۱/۵	۰/۴
۲	۱/۲۷۵	۱/۲۰۰۰	۱/۲۰۰۰
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
۱۴	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰

محاسبات تا (۴D) « چهار رقم اعشار » درست است

### روش گوس – سایدل :

روش تکراری گوس – سایدل همان روش تکراری ژاکوبی است با این تفاوت که از هر مقدار

جدید به دست آمده از مؤلفه های جواب در سایر این مؤلفه ها استفاده می شود؛ برای توضیح

بهتر ماتریس  $۳ \times ۳$  زیر را نگاه کنید:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)})$$

مثال:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 & \Rightarrow x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 & \Rightarrow x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 & \Rightarrow x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + 0 - 0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(9 - 1 - 0) = \frac{4}{3} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\left(2 + 1 + \frac{8}{3}\right) = \frac{17}{15} \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{17}{15}\right)$$

شماره

$x_1$

$x_2$

$x_3$

تکرار

•	•	•	•
۱	۱/۰۰۰۰	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
۵	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰

### نکته:

همانگونه که از مثال ها پیداست روش تکراری گوس - سایدل سریع تر از روش ژاکوبی به جواب می رسد. البته مثال های خاصی وجود دارد که از این گفته تبعیت نمی کند اما غالباً گوس - سایدل قوی تر است. نکته بعدی این که قبل از حل مسئله بهتر است ماتریسی به صورت قطری قالب نوشته شود (قطری قالب چیست؟ همان مرحله اول نرمالیزه کردن است، یعنی روی قطر بزرگترین اعداد ضرائب قرار گیرند) شرط توقف عملیات به این شکل است که برای تمام  $i$  ها داشته باشیم:

$$M^{(k)} = \max \left\{ |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \right\}$$

$$M^{(k)} < \varepsilon_e$$

## فصل ششم:

### روش های عددی حل معادله دیفرانسیل معمولی:

مثال:

معادله  $y' = x + y$  را با شرط  $y(0)=1$  در نظر بگیرید. تقریبی از  $y(0/1)$  را با استفاده از فرمول

رونگه کوتاه مرتبه ی ۴ با  $h=0/1$  بدست آورید.

$$\begin{array}{ll} y' = x + y & f(x, y) = x + y \\ y(0) = 1 & x_0 = 0 \\ h = 0/1 & y_0 = 1 \\ y(0/1) = ? & h = 0/1 \end{array}$$

$$k_1 = 0/1 \times f(x_0, y_0) = 0/1(x_0, y_0) = 0/1(0+1) = 0/1$$

$$k_2 = 0/1 \times f\left(x_0 + \frac{0/1}{2}, y + \frac{0/1}{2}\right) = 0/1 \left( \left(0 + \frac{0/1}{2}\right) + \left(1 + \frac{0/1}{2}\right) \right) = 0/11$$

$$k_3 = 0/1 \times f\left(x_0 + \frac{0/1}{2}, y + \frac{0/11}{2}\right) = 0/1 \left( \left(0 + \frac{0/1}{2}\right) + \left(1 + \frac{0/11}{2}\right) \right) = 0/1105$$

$$k_4 = 0/1 \times f\left(x_0 + \frac{0/1}{1}, y_0 = 0/1105\right) = 0/1 \left( \left(0 + 0/1\right) + \left(1 + 0/1105\right) \right) = 0/12105$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + \frac{1}{6} [0/1 + 2 \times (0/11) + 2(0/1105) + (0/12105)] = 1/11034$$

مرتبه ۴:

داریم  $h =$



$$\begin{aligned}x_n &= x_0 + nh \\k_1 &= hf(x_n, y_n) \\k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]\end{aligned}$$

۱- میله ی C را که طول آن ۱۰ متر است با تقریب ۰/۰۱ سانتی متر اندازه گیری کرده ایم و میله

ی D را که طول آن ۱۰ میلی متر است با تقریب ۰/۰۱ سانتی متر اندازه گیری شده است دقت

کدامیک از این اندازه گیری ها بیشتر است؟

۲- ریشه معادله  $f(x) = e^x - e^2 x$  درچه بازه ای همگرا می باشد. (روش تکراری)

۳- با استفاده از روش تکراری نیوتن ریشه معادله ی  $x^4 - x = 10$  را تا ۳ رقم اعشار بیابید.

۴- فرض کنید فرمول تکراری به صورت  $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$  تعریف شده باشد که در آن a یک

مقدار ثابت مثبت بوده و مقدار اولیه ی  $x_0$  طوری انتخاب شده که فرمول تکراری فوق به ریشه ی

c همگرا گردد مطلوب است.

الف) حد نهایی  $x_n$  چیست

ب) نشان دهید که فرمول فوق از مرتبه دوم است.

۵- اگر  $a_0 = 0$  ,  $b_0 = 2$  ,  $n = 31$  تکرار صورت گرفته باشد ریشه ی تقریبی مساعد تا چند

رقم اعشار دقیق است.

۶- چند جمله ای درون یاب مربوط به تابع جدولی زیر را بنویسید و سپس  $f(1/5)$  را حساب کنید. (روش لاگرانژ)

۷- مساله ۶ را با یکی از روش های تفاضل های تقسیمی یا ضرایب نامعینی حساب کنید.

۸-  $n$  تعداد نقاط و  $h$  طول فاصله را طوری بیابید که قانون دوزنقه در مورد انتگرال زیر با دقتی

معادل  $5 \times 10^{-9}$  داشته باشد

$$\int_{-\frac{n}{6}}^{\frac{n}{6}} \cos x dx$$

۹- با استفاده از قانون سیمپسون و جدول و  $h=0/5$  مطلوب است محاسبه  $\int_0^4 f(x) dx$

$x_i$	0	0.5	1	1/5	2
	2/5				
$f_i$	0	0.2423	0/4401	0/5579	0/5767
	0/4971				

۱۰- الف) تفاوت روشهای ژاکوبی و گاوس سایدل را بنویسید.

ب) دستگاه زیر را با استفاده از روش گاوس سایدل حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

۱۱- معادله ی  $y' = 1 - y^2$  را با شرط  $y(0) = 0$  با قرار دادن  $h=0/1$  به روش رونگه کوتای مرتبه

۴ حل کنید و مقدار تقریبی  $y(0/1)$  را بدست آورید.